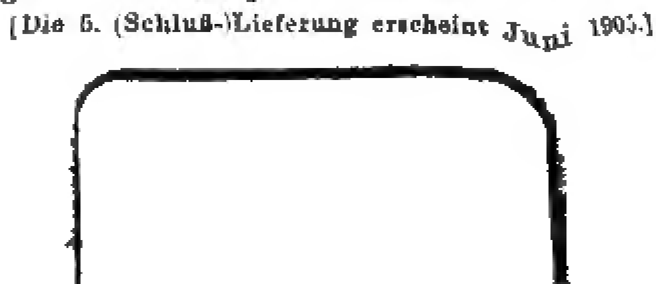




Darwin, George Howard, Prof. an der Universität Cambridge, Ebbe und Flut, sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Autorisierte deutsche Ausgabe nach der zweiten englischen Auflage von A. Pockels in Braunschweig. Mit einem Einführungswort von Professor Dr. Georg von Neumayer, Wirklichem Geheimen Admiralitätsrat und Direktor der deutschen Seewarte zu Hamburg, und 43 Illustrationen im Text. [XXII u. 344 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 6.80.

Fischer, Dr. Karl T., Neuere Versuche zur Mechanik der festen und flüssigen Körper (mit einem kurzen Anhange über das sog. „absolute Maßsystem"), ein Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts. [68 S.] gr. 8. 1902. kart. n. ℳ 2.—

— Der naturwissenschaftliche Unterricht in England, insbesondere in Physik und Chemie. Mit einer Übersicht der englischen Unterrichtsliteratur zur Physik und Chemie und 18 Abbildungen im Text und auf 3 Tafeln. [VIII u. 94 S.] gr. 8. 1902. In Leinw. geb. n. ℳ 3.60.

Fleming, J. A., Professor der Elektrotechnik am University College zu London, Elektrische Wellen-Telegraphie. 4 Vorlesungen. Autorisierte deutsche Ausgabe von Dr. E. Aschkinaß, Privatdozent an der Universität Berlin. Mit 53 Abbildungen. gr. 8. 1905. [Unter der Presse.]

Föppl, Professor Dr. A., Vorlesungen über technische Mechanik. 4 Bände. gr. 8. In Leinw. geb. I. Einführung in die Mechanik. 2. Aufl. Mit 96 Figuren im Text. [XIV u. 412 S.] 1900. n. ℳ 10.— II. Graphische Statik. 2. Aufl. Mit 176 Figuren im Text. [XII u. 471 S.] 1903. n. ℳ 10.— III. Festigkeitslehre. 2. Aufl. Mit 79 Figuren im Text. [XVIII u. 512 S.] 1900. n. ℳ 12.— IV. Dynamik. 2. Aufl. Mit 69 Figuren im Text. [XV u. 506 S.] 1901. n. ℳ 12.—

— Die Geometrie der Wirbelfelder. In Anlehnung an das Buch des Verfassers über die Maxwellsche Theorie der Elektrizität und zu dessen Ergänzung. [X u. 108 S.] gr. 8. 1897. geh. n. ℳ 3.60, in Leinw. geb. n. ℳ 4.60.

Gans, Dr. Richard, Privatdozent an der Universität Tübingen, Einführung in die Vektoranalysis. Mit Anwendungen auf die mathematische Physik. Mit 31 Figuren im Text. [X u. 98 S.] gr. 8. 1905. geb. n. ℳ 2.80.

Gleichen, A., in Berlin, Lehrbuch der geometrischen Optik. Mit zahlreichen Abbildungen im Text [XIV u. 511 S.] gr. 8. 1902. geb. n. ℳ 20.—

Graetz, Dr. L., Prof. in München, Das Licht und die Farben. Sechs Vorlesungen, gehalten im Volkshochschulverein München. Mit zahlreichen Abbild. [IV u. 150 S.] 8. 1900. geh. ℳ 1.—, geschmackvoll geb. n. ℳ 1.25.

[Ja]hnke, Dr. Eugen, Prof. an der Bergakademie zu Berlin, Vorlesungen über Vektorrechnung mit Anwendungen auf Geometrie, Mechanik und Physik. gr. 8. 1905. geb. ca. ℳ 5.—

[Ja]uschke, Hans, k. k. Direktor der Staats-Oberrealschule in Teschen, [D]as Prinzip der Erhaltung der Energie und seine Anwen[du]ng in der Naturlehre. Ein Hilfsbuch für den höheren Unter[ric]ht. Mit 95 Figuren im Text. [X u. 456 S.] gr. 8. 1897. In [Le]inw. geb. n. ℳ 12.—

[Fortsetzung am Ende des Buches.]

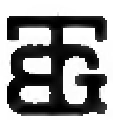
LEHRBUCH
DER PRAKTISCHEN PHYSIK

VON

FRIEDRICH KOHLRAUSCH

ZEHNTE VERMEHRTE AUFLAGE
DES LEITFADENS DER PRAKTISCHEN PHYSIK

MIT ZAHLREICHEN FIGUREN IM TEXT



LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1905

Aus dem Vorwort zur zweiten Auflage 1872.

Die Aufgaben, welche der praktischen Physik gestellt werden können, lassen sich in vier Punkte zusammenfassen. Zunächst steht erfahrungsgemäß fest, daß ein Teil der physikalischen Lehren, und zwar vorzugsweise der quantitative, also nicht der unwichtigste, durch bloßes Hören nicht begriffen wird. Interesse und Verständnis für diese Sätze werden nicht durch den bloßen Vortrag geweckt, wogegen oft die einmalige praktische Anwendung eines Satzes genügt, um den Schüler mit ihm vertraut zu machen. Zweitens gibt es eine Reihe von Aufgaben, deren Ausführung dem Chemiker, Mineralogen, Mediziner, Pharmazeuten oder Techniker bekannt sein soll. Die Vorlesung, wenn sie überhaupt auf eine solche Aufgabe eingeht, kann diese nur in prinzipieller Weise behandeln; von hier aber bis zur praktischen Ausführung ist noch ein weiter Schritt. Der Stand der Kenntnisse in diesen Dingen macht denn auch den bisherigen Mangel an praktischem Unterricht fühlbar genug: ihre geringe Verbreitung, die oft eine erstaunliche Scheu vor den einfachsten physikalischen Aufgaben zur Folge hat, ist eben so bekannt, wie erschreckend groß.

Sodann aber liegt für die Physik selbst das Bedürfnis einer Vorschule für die experimentelle wissenschaftliche Forschung vor. Unterrichtsgegenstand kann freilich die eigentliche Forschung nur in sehr beschränktem Maße sein, wohl aber fordern die Pflicht und das eigene Interesse von der Physik, daß sie den künftigen Physiker mit seinem, ich möchte sagen wissenschaftlichen Handwerkszeug vertraut macht. Es bleiben immer noch mehr als genug Einzelheiten übrig, welche bei einer Untersuchung selbständig beschafft werden müssen.

Die genannten drei Disziplinen sind es in erster Linie, welche das Buch ins Auge faßt, indem es Vorschriften zur Ausführung physikalischer Messungen gibt und dabei diejenigen bevorzugt, welche als Anwendungen außerhalb der Physik oder als Elemente wissenschaftlicher Untersuchung eine besondere Bedeutung haben. Soll auch die vierte Aufgabe, nämlich die Heranbildung physikalischer Lehrer durch Versuche mit Unterrichtsapparaten hereingezogen

werden, so glaube ich, daß auch diese Übungen am besten durch eine passende Auswahl der instrumentellen Mittel mit messenden Aufgaben zu verbinden sind. Dadurch wird die Gefahr vermieden, daß die Anstellung von Versuchen, welche kein bestimmtes Ziel haben, in Spielerei ausarte. Ein eigentlicher Kursus in Unterrichts-Experimenten würde manchen Schwierigkeiten begegnen; er erscheint aber auch weniger notwendig; denn wer sich in den quantitativen Aufgaben einige Gewandtheit erworben hat, wird auch die Vorlesungsversuche ohne Schwierigkeit bewältigen.

Inhalt und Umfang einer Anleitung zur physikalischen Arbeit werden vor allem durch die Grenze der Genauigkeit bestimmt, bis zu welcher die Aufgaben durchgeführt werden sollen, und darin bleibt natürlich ein weiter Spielraum. Ich habe die Grenze inne zu halten gesucht, bei welcher die um der Einfachheit willen vernachlässigten Korrektionen mindestens nicht größer sind, als die unfreiwilligen Beobachtungsfehler bei den gewöhnlich gebrauchten Instrumenten und bei mittlerer Geschicklichkeit im Beobachten. Bei den sehr auseinander gehenden individuellen Zwecken und Mitteln kann ich selbstverständlich nicht daran denken, jedermanns Wünschen gerecht geworden zu sein, vielmehr wird ohne Zweifel der eine noch eine gründlichere Behandlung vermissen, wo dem anderen die Strenge schon als Pedanterie erscheint.

An bestimmte Instrumente schließen sich die Anleitungen, wo es möglich war, nicht an; auch Beschreibungen von Apparaten finden sich selten, denn letztere sind ja dem Arbeitenden meistens gegeben, und in den Lehrbüchern der Experimentalphysik findet er fast immer Abbildungen und Beschreibungen. Nur bei einigen neueren oder weniger bekannten Apparaten ist eine Ausnahme gemacht worden.

Die ausführliche Begründung aller Rechnungsregeln würde zu weit gehen, doch sind häufig kurze Beweise und Erläuterungen (mit kleiner Schrift) beigefügt worden, um dem Arbeitenden die Einsicht in den Zusammenhang zu erleichtern. Zum Verständnis der magnetischen und elektrischen absoluten Messungen, denen eine übersichtliche Literatur fehlt, auf welche aber die praktische Physik das größte Gewicht legen muß, wird im Anhang eine kurze Darlegung der wichtigsten Punkte des absoluten Maßsystems gegeben.

Der mathematische Apparat beschränkt sich, außer an wenigen Stellen in den Erläuterungen, auf Elementar-Mathematik.

Von den zum größeren Teil neu berechneten Tabellen dürften manche auch für Physiker nützlich sein. Ich habe mich bemüht, sie auf das beste Beobachtungsmaterial zu gründen.

Aus dem Vorwort zur neunten Auflage 1901.

Die vorigen Worte, zu einer Zeit geschrieben, da der Verfasser sich mit der Aufgabe beschäftigte, einen praktisch-physikalischen Anfängerkurs auszubilden, für den man damals noch kein Muster fand, werden für das Programm der physikalischen Übungen immer noch wesentlich zutreffen.

Die erste Ausgabe des Leitfadens hatte aus einigen zusammengehefteten Bogen bestanden, gedruckt zu dem Zwecke, das Lehren und Lernen bei den Aufgaben zu erleichtern, die ich in dem Maße wie die in Göttingen damals vorhandenen Mittel es gestatteten, nach und nach in das Übungslaboratorium einführte. Die gedruckten Blätter waren später meinen Lehrern und Freunden Wilhelm Weber und Beetz vorgelegt worden, von denen der erstere, obwohl er sich an der Einrichtung und Leitung des Praktikums nicht beteiligte, diesem doch stets, und zwar besonders auch für den Elementarunterricht, einen großen Wert beilegte, während Beetz zu gleicher Zeit in München selbst physikalische Übungen eingeführt hatte, die er persönlich leitete. Beide rieten zur Veröffentlichung der Blätter, die dann in einem bald folgenden Neudruck geordnet und ergänzt wurden.

In den späteren Auflagen weicht der Inhalt von dem ursprünglichen Programm ab, insofern zunehmend für wissenschaftliche Zwecke Gegenstände eingereiht wurden, die nicht eigentlich zum Unterricht zu rechnen sind. Die vorliegende Ausgabe legt sich in dieser Richtung noch weniger Einschränkung auf als die bisherigen, da inzwischen für die Zwecke des elementaren Praktikums der kleine Leitfaden erschienen ist. Zur bequemeren Unterscheidung von diesem — nicht mit dem Anspruch, erschöpfend zu sein — ist der Titel Lehrbuch gewählt worden.

Es wurde natürlich erwogen, ob der Stoff zwischen den beiden Ausgaben derartig zu teilen sei, daß die eine sich der anderen als Fortsetzung anschlösse; indessen ist dies doch nicht leicht durchführbar, und für den Gebrauch würden unbequeme Folgen daraus entstanden sein. Demgemäß wird die Vollständigkeit auch in dem „Lehrbuch“ festgehalten, so daß dieses in dem Anfangspraktikum dienen kann, sobald der Arbeitende nicht scheut, seine Aufgabe aus einer größeren Menge anderen Inhaltes herauszusuchen und die für ihn weniger in Betracht kommende Literatur, sowie auch zuweilen ein wenig mehr mathematische Zugaben mitzunehmen, welche ja aber dem, der sie zu gebrauchen weiß, auch eine raschere und eingehendere Kenntnis ermöglichen. Außer dem Fachstudierenden der Mathematik, physikalischen Chemie oder Elektrotechnik und der Physik selbst wird auch mancher andere vorziehen, bei der Arbeit

gleich die größere Ausgabe zu gebrauchen und dabei vielleicht durch Lektüre manches kennen zu lernen, was in den Kurs des Praktikums nicht eingeschlossen ist.

Der Gang ist in beiden Büchern der gleiche, und soweit es sich ohne starken Zwang durchführen ließ, nämlich in den ersten hundert Paragraphen, stimmt auch die Bezifferung überein.

Die doppelte Aufgabe, welche das Buch sich stellt, bringt es mit sich, daß die Darstellung, einschließlich der eingeschobenen Figuren, nicht einheitlich ausfällt, daß sie in den Teilen, welche zum Nachschlagen für den Physiker bestimmt sind, knapper gehalten ist als in dem, was für den Unterricht in Betracht kommt. Diesen Schönheitsfehler, der ja nicht schwer ins Gewicht fällt, brauche ich aber wohl weniger zu entschuldigen als einen anderen mir wohl bewußten, daß nämlich in dem Bestreben, dem Buche einen handlichen Umfang zu bewahren, die Darstellung vielfach nur auf die Verständlichkeit und nicht auf eine wohlklingende Sprache Rücksicht nimmt.

Bezüglich der Gesichtspunkte, nach denen die Übungsaufgaben behandelt werden, darf auf das, dem kleinen Leitfaden beigegebene Vorwort verwiesen werden, dessen Inhalt ich auch bei wiederholtem Abwägen zwischen intellektuellem und unmittelbar praktischem Nutzen für richtig halte. Dem entsprechend wird, wenn auch viele Aufgaben durch ihren Anschluß an moderne Hilfsmittel der Messung bestimmter gefaßt worden sind, als nach dem früher in dem Buche herrschenden Gebrauch, möglichst immer die allgemeine Methode als Kernpunkt festgehalten. Dies rechtfertigt sich aber nicht nur durch die Zwecke des Unterrichts. Denn wenn man die Entwicklung der vereinfachenden, auch wohl eleganten Methoden näher verfolgt, die wir der Ausbreitung physikalischer Messung in andere Kreise, besonders in die elektrotechnischen verdanken, so zeigt sich da doch manches als vergänglich. Bei dem, die praktischen Anwendungen in unserer Zeit beherrschenden raschen Stoffwechsel ändern die gebräuchlichen Methoden sich nicht selten, und es kommen häufig Gegenstände, die man als veraltet angesehen hat, ganz unerwartet wieder zu moderner Geltung. Schon aus diesem Grunde ist aus dem Buche manches, momentan als veraltet erscheinende nicht gestrichen worden. Außerdem aber verbieten ja den meisten Unterrichtsinstituten ihre Mittel, sich immer dem Neuesten anzuschließen — eine Einschränkung, die übrigens auch ihre Vorteile hat, denn sie erschwert, daß manches Nützliche der Vergessenheit anheimfällt.

Recht fühlbar ist mir geworden, daß die Anregung und Belehrung, welche aus dem Praktikum selbst entspringt, mir nun seit Jahren abgeht. Einen Ersatz hierfür bildet freilich teilweise die Berührung mit den vielseitigen Arbeitsgebieten der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt und die Möglichkeit, hier die Erfahrung von Physikern heranzuziehen, welche bestimmte Gebiete vollständig

beherrschen. Ich glaube, daß der Leser diesen Vorteil an vielen Stellen bemerken wird, so in den technischen Anweisungen, in der Thermometrie, dann in zahlreichen Abschnitten der Strahlung, z. B. in den feineren Teilen der Optik, in der Photometrie und Wärmestrahlung; besonders aber in der Elektrizitätslehre, wo u. a. der Anwendung der Normalelemente, den Messungen an Wechselströmen und Dynamomaschinen, der Bestimmung von Magnetisierungs- und Dielektrizitätskonstanten, den Anwendungen auf die Chemie ein breiterer Platz eingeräumt worden ist als früher.

An vielen Stellen mußte die Ausführung angedeuteter Meßmethoden durch einen Literaturhinweis ersetzt werden. Soweit es möglich war, sind, natürlich unter Bevorzugung von Quellen, die dem Leserkreis leicht zugänglich erschienen, Zitate auf Abhandlungen gewählt worden, in denen die weitere Literatur nachgesehen werden kann.

Für jüngere Leser mögen hier einige von den ausgiebigsten Quellen genannt werden, die zum Aufsuchen physikalischer Literatur dienen können. Wenn der Name des Verfassers gegeben ist, so findet man die Aufsätze bis 1900 am bequemsten in Poggendorff-Oettingen's Handwörterbuch. Ist die Zeit des Erscheinens ungefähr bekannt, so dienen die „Beiblätter zu den Annalen", die „Science Abstracts" der London Physical Society oder, bei weitem am bequemsten, die „Fortschritte der Physik" der Deutschen Physikalischen Gesellschaft zum Nachschlagen und meist, wenn auch nicht immer, zugleich zur Orientierung über den Inhalt. [Für physikalisch-chemische Arbeiten seit 1894 wird oft das, jetzt von Danneel herausgegebene „Jahrbuch der Elektrochemie" gute Dienste leisten; als vollständige Literaturquelle, auch für die zur Physik im entfernteren Verwandtschaftsgrade stehenden Wissenschaften der, freilich durch seinen unbegreiflich hohen Preis in der beabsichtigten Verbreitung schwer geschädigte „International Catalogue of scientific Literature".]

In elektrischen Fragen dürfte G. Wiedemann's Elektrizitätslehre am reichhaltigsten sein und bis 1896 meistens genügen; in optischen oft das wertvolle Werk von Dufet, welches die ersten Bände des von der Société Française de Physique herausgegebenen Recueil de Données numériques de Physique bildet, für Spektroskopie das im Erscheinen begriffene Handbuch von Kayser. Als Nachschlagewerke allgemeinen Inhalts sind natürlich das von Winkelmann herausgegebene Handbuch, ferner nach mancher Richtung die Rapports au Congrès de Physique (1900), dann die Landolt-Börnstein'schen Tabellen, von den Lehrbüchern der Physik wohl besonders das von Wüllner mit seiner gewissenhaften Literaturangabe zu nennen [und, soweit es erschienen ist, das Lehrbuch von Chwolson].

Ein freilich mühsames und nicht von einem einzelnen zu bewältigendes, aber gewiß mit Dank begrüßtes Unternehmen würde

meines Erachtens in einer ad hoc gemachten sachlich geordneten Zusammenstellung der auf Messungsmethoden bezüglichen Literatur mit Stichwörtern bestehen. Es ist geradezu erstaunlich, welches Wachstum dieser Zweig der Physik in den letzten Jahrzehnten gezeigt hat, so, daß man bezüglich des Auffindens ohne systematische Hilfsmittel mehr oder weniger dem Zufall unterworfen bleibt, selbst wenn man über die fast zahllosen Quellen, in denen man suchen kann, wirklich verfügen sollte.

Der Leitfaden darf, glaube ich, für sich in Anspruch nehmen, zuerst und lange Zeit allein eine handliche Zusammenstellung kritisch ausgewählter physikalischer Zahlen gebracht zu haben. Auch diesmal ist dieser erheblich vergrößerte Teil des Inhaltes unter mehrseitiger Beaufsichtigung mit besonderer Sorgfalt behandelt worden, was freilich nicht mehr so mühsam ist, wie in früheren Zeiten, da jetzt in den bekannten großen Tabellensammlungen ein immer reicher werdendes Material als Grundlage vorliegt. Immerhin möchte ich gerade hier die Kollegen um Hinweise auf etwaige Verstöße bitten.

Genaue Temperaturangaben beziehen sich auf die Skale der Reichsanstalt. Der Kalorimetrie liegt, unter Rücksichtnahme auf Herrn Warburg's Darlegungen die Wasserkalorie bei 15° zugrunde, den Angaben hoher Temperaturen, wo es möglich war, die von den Herren Holborn und Day an das Gasthermometer angeschlossene Skale. Lichtwellenlängen sind einheitlich auf die Michelson'schen Messungen der Cadmiumlinien zurückgeführt. Die Atomgewichte, wie früher auf O = 16 bezogen, schließen sich an die Vorschläge der von der Deutschen Chemischen Gesellschaft ernannten Kommission an. Elektrische Leitvermögen werden durchweg auf das Ohm bezogen.

Als Norm für Zimmertemperatur ist 18° so gut wie vollständig durchgeführt worden.

Zum Zwecke der Vervollständigung oder der Kontrolle von Zahlen werden häufig die Quellen angegeben, doch ließ sich dies bei der Zerstreutheit der Arbeiten gerade hier nicht immer durchführen. Es werde also in dieser Hinsicht auf die großen Sammelwerke, insbesondere auch auf die Literaturangaben in den Landolt-Börnstein'schen Tabellen verwiesen.

Zur zehnten Auflage.

In der Anordnung schließt sich diese Auflage — das 23. bis 27. Tausend —, bis auf kleine Umstellungen in den Tabellen, der vorigen an. Neu aufgenommen sind u. a. die folgenden Gegenstände.

Bei der Konstantenbestimmung mit kleinsten Quadraten fehlte

es in der Literatur an einer brauchbaren allgemeinen Methode, welche die Fehler auf alle beobachteten Größen zu verteilen gestattet; eine solche Methode ist zugefügt worden. Herrn Helmert, der die Grundlage der Entwicklung freundlichst mitteilte, wird mancher Leser dafür dankbar sein.

Genannt seien ferner die Abschnitte: Spezifische Wärme von Gasen, Diffusionskonstante, Beobachtungen an ionisierten Gasen, ein Schema der Messungen am Drehstrom; sodann die optischen Pyrometer, das astatische Torsions-Magnetometer, die elektrischen Wellenmesser; auch die kritischeren Behandlungen der Reibungskapillaren und des Quadrantelektrometers verdienen erwähnt zu werden.

Unter den Tabellen darf besonders auf diejenigen für die physikalischen Eigenschaften der Gase hingewiesen werden, welche von den Herren Holborn und Scheel zusammengestellt worden sind; sodann etwa auf eine Sammlung elementarer mathematischer Formeln.

Je weniger ich bei diesen Erweiterungen und bei der Kritik des früheren Textes den eigenen Augen zumuten durfte, um so dankbarer bin ich u. a. den Herren Hallwachs, Henning, Jaeger, W. Kohlrausch, Liebenthal, v. Steinwehr, Wiebe für vielseitige Hilfe; ganz besonders aber den Herren Holborn, Scheel und Grüneisen für ihre hingebende Unterstützung bei der Ausarbeitung und Drucklegung. Zahlreiche und wertvolle, sowohl kritische wie erweiternde Ratschläge verdankt auch diese Auflage Herrn Dorn.

Eine der schwierigsten Fragen bildet für ein solches Buch die Zahl; wie viele Stellen soll die Tabelle usw. angeben? Wenn man, wie ich durch das Buch, jetzt 36 Jahre hindurch verpflichtet war, die Resultate der Konstantenbestimmungen zu verfolgen, so hat man sich überzeugt, daß die Versuchsfehler zum großen Teile nur langsam eingeengt werden. Es liegt nun freilich für den Verfasser wie für den Leser einer neuen Experimentalarbeit stets die Versuchung nahe, das Resultat, weil es Fehlerquellen der früheren zu vermeiden sucht, für das zuverlässigere zu halten; aber nicht selten wird man hinterher eines besseren belehrt. Besonders auch in der Neuzeit, wo im allgemeinen rascher veröffentlicht wird als früher, muß man bei der Bevorzugung neuer Resultate manche Vorsicht anwenden.

Man umschifft die Klippen — und das ist in den alten Auflagen dieses Buches meist geschehen — dadurch, daß man die Zahlen nur in den sicherstehenden Dezimalen wiedergibt. Für Zwecke des Unterrichts und technischer Anwendungen wird man so verfahren. Der Physiker wünscht aber oft mit Recht, auch von

einer noch nicht feststehenden Dezimale wenigstens den zur Zeit wahrscheinlichen Wert zu kennen. Diesem Bedürfnis gibt das Buch jetzt mehr als früher nach; natürlich unterliegen hierdurch die letzten Stellen nicht ganz selten einer Schwankung.

Über zwei konkrete Fälle von Konstanten möge hier folgendes angemerkt werden. Das Verhältnis der mittleren Wasserkalorie (0 bis 100°) zu derjenigen bei 15° wird S. 194 gleich 1,002±0,002 gesetzt. Mit Rücksicht auf die inzwischen erschienene Veröffentlichung Behn's würde man statt dessen vielleicht 1,000 zu wählen haben.

Die Dichtigkeit der Luft (0°, 760 mm, 45° Breite) wird, wo die Beschaffenheit der Zimmerluft in Betracht kommt, unter Zugrundelegung eines Kohlensäuregehaltes von 0,06 Prozent gleich 0,0012932 gesetzt. Die Gastabelle 12a dagegen gilt für kohlensäurefreie Luft von der Dichtigkeit 0,0012928.

Es ist begreiflich, daß man sich bestrebt, Verabredungen zu treffen, nach denen einem jeden Formelbuchstaben eindeutig angesehen werden kann, welche Größenart er darstellen soll. Zur Einigung haben diese Bestrebungen noch nicht geführt, und man wird zweifeln müssen, ob sie dazu führen werden. Die in Physik, Chemie, Elektrotechnik usw. vorkommenden Größenarten sind eben zahlreicher, als die zur Unterscheidung wirklich verfügbaren Zeichen. Denn daß man sich die Lizenz versagte, in einer Rechnung die Individuen derselben Größenart durch große und kleine, lateinische und griechische Buchstaben usw. zu unterscheiden, daß man also bezüglich dieser Unterscheidungen auf Indices angewiesen wäre, würde ja eine für den Schreiber, den Leser und den Setzer sehr lästige Beschränkung bedeuten.

Dies angenommen kann man leicht überschlagen, daß die Alphabete für eindeutige Bezeichnungen der Größenarten in diesem Buche nicht ausreichen. Gar so schlimm ist es aber auch kaum, wenn in verschiedenen Rechnungen der nämliche Buchstabe nicht immer dieselbe Größenart bezeichnet. Ein stillschweigender Usus hat die Willkür ohnehin stark eingeengt. Die im vorliegenden Buche gebrauchten Zeichen haben obendrein von jeher den Usus nach Möglichkeit berücksichtigt und stimmen in der Tat bei den wichtigeren Größenarten schon in den früheren Auflagen mit den, z. B. von der Deutschen Physikalischen Gesellschaft gemachten Vorschlägen überein. An einigen Stellen habe ich mich noch bemüht, die Übereinstimmung zu vergrößern oder Inkonsequenzen auszumerzen. Hoffentlich sind keine Fehler dadurch entstanden.

Im Februar 1905.

Inhalt.

Elektrostatik.

Das auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte „absolute" Maßsystem mit Anschluß von Gesetzen und Erläuterungen.

Elektrostatische Einheiten.

Magnetische Einheiten.

Elektromagnetische Einheiten.

Tabellen.

Berichtigungen.

S. 22 Mitte ist in der Formel für μ_a anstatt $[c a]$ einzusetzen $[a a]$.
S. 157 Z. 3 lies Tab. 10 statt Tab 16.
S. 170 gehört die untere Figur zum Holborn-Kurlbaum'schen Pyrometer.
S. 208 Z. 23 lies 56 statt 50.

Alphabetisches Verzeichnis.

(Die römischen Zahlen bedeuten die Tabellen am Schluß des Buches.)

Allgemeines über Messungen.

1. Beobachtungsfehler. Mittlerer und wahrscheinlicher Fehler.

Eine Größe messen heißt sie durch eine Zahl darstellen, welche angibt, wie oft die zugrunde gelegte Einheit in der gemessenen Größe enthalten ist.

Die durch Beobachtung gewonnene Zahl wird mit einem Fehler behaftet sein. Über die wahrscheinliche Fehlergrenze kann ein Urteil erstens aus der Übereinstimmung mehrerer Resultate und zweitens durch die Betrachtung der Methode abgeleitet werden.

Wenn eine Größe wiederholt gemessen worden ist und wenn, wie hier angenommen werden soll, die einzelnen Bestimmungen an sich denselben Grad von Zuverlässigkeit besitzen, so stellt bekanntlich das arithmetische Mittel den wahrscheinlichsten Wert dar.

Aus einer Reihe von Beobachtungen einzelne bloß deswegen auszuschließen, weil sie mit der Mehrzahl nicht übereinstimmen, ist im allgemeinen ungerechtfertigt. Der Wahrscheinlichkeit eines bei den abweichenden Zahlen begangenen größeren Fehlers wird durch das arithmetische Mittel selbst Rechnung getragen; denn als einzelne unter einer größeren Anzahl haben sie einen geringen Einfluß.

Die einzelnen Zahlen zeigen gegen ihr Mittel größere oder kleinere Differenzen, die „Fehler“, aus deren Betrage die wahrscheinliche Genauigkeit der einzelnen Beobachtung oder des Resultates nach folgenden Regeln geschätzt wird. Man bildet die Summe der Fehlerquadrate (Tab. 51). Diese Summe gibt, durch die um 1 verminderte Anzahl der einzelnen Beobachtungen dividiert, das mittlere Fehlerquadrat; die Quadratwurzel hieraus ist der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung. Dividiert man diesen durch die Quadratwurzel aus der Anzahl der Beobachtungen, so erhält man den sogenannten mittleren Fehler des Resultates.

Die Multiplikation des mittleren Fehlers mit 0,674 (nahe $\frac{2}{3}$) gibt den wahrscheinlichen Fehler, d. i. die Zahl, von der mit gleicher Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, der wirklich begangene Fehler sei kleiner, wie er sei größer als sie.

Den Umstand, daß ein durch Beobachtung gefundener Wert ebensowohl zu groß wie zu klein ausgefallen sein kann, deutet man durch ein dem Fehler vorgesetztes $\pm$ Zeichen an.

Bezeichnet man durch

n die Anzahl der einzelnen Bestimmungen,

$\Delta_1, \Delta_2 \ldots \Delta_n$ ihre Abweichungen vom Mittel,

S die Summe der Fehlerquadrate, d. h.

$$S = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2,$$

so ist also der mittlere Fehler

der einzelnen Messung — des Mittelwertes

$$\varepsilon = \pm\sqrt{\frac{S}{n-1}} \qquad \mathsf{E} = \pm\sqrt{\frac{S}{n(n-1)}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}.$$

Die wahrscheinlichen Fehler betragen $\frac{2}{3}$ hiervon.

Über die Fehlerrechnung in allgemeineren Fällen vgl. 2 und 3.

Selbstverständlich wird durch diese Rechnung nur der Teil des Fehlers ausgedrückt, welcher durch die eigentliche Unsicherheit der Beobachtung entsteht, das heißt durch solche Beobachtungsfehler, die ebenso häufig einen zu großen wie einen zu kleinen Wert ergeben. Außerdem können einseitige Fehler vorhanden sein, die aus den Angaben der Instrumente oder auch daraus entstehen, daß der Beobachter sich vorwiegend nach einer bestimmten Richtung irrt. Solche Fehler müssen besonders ermittelt oder durch eine geeignete Kombination von Beobachtungen oder Abwechselung der Methoden eliminiert werden.

Beispiel. Die Dichtigkeit eines Körpers wurde zehnmal bestimmt:

	Gefunden	Δ	Δ^2
	9,662	− 0,0019	0,000004
	9,673	+ 091	083
	9,664	+ 001	000
	9,659	− 049	024
	9,677	+ 131	172
	9,662	− 019	004
	9,663	− 009	001
	9,680	+ 161	259
	9,645	− 189	357
	9,654	− 0,0099	0,000098
Mittel	9,6639		$S =$ 0,001002

Also mittlerer Fehler einer Messung: $\varepsilon = \sqrt{\frac{0{,}001002}{10-1}} = \pm 0{,}011$,

mittlerer Fehler des Mittelwertes: $E = \pm 0{,}011/\sqrt{10} = \pm 0{,}0033$.

Die wahrscheinlichen Fehler betragen folglich $\pm 0{,}007$ bez. $\pm 0{,}0022$.

Die Bedeutung der Zahl 0,007, nämlich daß der Fehler einer einzelnen Dichtigkeitsbestimmung dieses Körpers, mit denselben Instrumenten mit gleicher mittlerer Sorgfalt und Erfahrung ausgeführt wie die obigen, ebenso wahrscheinlich kleiner wie größer ist als sie, spricht sich hier zufällig genau aus. Denn unter den Δ sind je fünf kleiner und größer als 0,007.

Die obigen Bestimmungen sind von verschiedenen Beobachtern mit verschiedenen Gewichtssätzen und Thermometern angestellt worden. Fehler der Wage von einseitiger Richtung sind nicht anzunehmen. Eine Quelle eines einseitigen Fehlers könnte aber z. B. durch nicht beachtete Luftbläschen am Körper entstanden sein, welche die Dichtigkeit immer zu klein erscheinen lassen.

„**Gewicht**" **einer Messung.** Die Einzelresultate, aus denen ein Schlußresultat berechnet wird, sind nicht immer gleich zuverlässig. Diesen Umstand sucht man dadurch zu berücksichtigen, daß man den Einzelwerten ein verschiedenes „Gewicht" beilegt, d. h. daß man sie bei der Mittelnahme einfach, doppelt oder dreifach usw. (Gewicht eins, zwei, drei usw.) in Rechnung setzt. Das arithmetische Mittel aus mehreren Resultaten r_1, r_2 etc., deren Gewichte $= p_1, p_2$ etc. sind, ist also

$$r = \frac{p_1 r_1 + p_2 r_2 + \cdots}{p_1 + p_2 + \cdots}.$$

Das Gewicht von Einzelresultaten, die schon aus mehreren gleichwertigen Beobachtungen abgeleitet worden waren, ist je gleich der Anzahl der benutzten Beobachtungen zu setzen, was ja auf das nämliche hinausführt, wie wenn man alle einzelnen Beobachtungen zum Mittel vereinigt. Es können auch andere Ursachen vorliegen, die den einzelnen Resultaten eine verschieden große Zuverlässigkeit erteilen und die zur Beilegung verschiedener Gewichte veranlassen; die Beurteilung dieser Frage bleibt der Umsicht und der Gewissenhaftigkeit des Beobachters überlassen. — Kennt man den mittleren Fehler ε eines Resultates, so ist dessen Gewicht p proportional $1/\varepsilon^2$.

Eingehenderes über Fehlerrechnung s. z. B. Gauß, Abhandl. über Wahrscheinlichkeitsrechnung, Ges. Werke Bd. IV, und deutsch von Börsch u. Simon, 1887; Helmert, die Ausgleichsrechnung, 1872; Weinstein, physik. Maßbestimmungen Bd. I, 1886; Czuber, Wahrscheinlichkeitsrechnung 1903.

2. Beurteilung des Fehlers aus der Methode. Einfluß der Beobachtungsfehler auf das Resultat.

Im allgemeinen wird ein Resultat nicht direkt durch die Beobachtung gegeben, sondern es muß aus ihr oder auch aus mehreren Beobachtungen durch Rechnung ermittelt werden: beispielsweise ein Gewicht aus Ablesungen am Zeiger der Wage, eine Gasdichte aus einer Ausströmungszeit, eine elektrische Stromstärke aus einem Ausschlagswinkel, ein spezifisches Gewicht aus mehreren Wägungen, ein Elastizitätsmodul aus Längenmessungen. Hierbei entsteht die Aufgabe, den Fehler des Resultates zu kennen, welcher aus einem Fehler der beobachteten Größe entspringt.

Den Zweck dieser Fehlerrechnung kann, außer einer Schätzung der Genauigkeit des Resultates selbst, das Urteil über etwa gestattete Abkürzungen der Rechnung bilden, oder über die Frage, auf welchen Teil der Messung die größte Sorgfalt zu verwenden ist. Auch liegt es häufig in unserer Gewalt, die Verhältnisse eines Versuches in verschiedener Weise anzuordnen: die Fehlerrechnung läßt beurteilen, welche Anordnung den geringsten Einfluß der Beobachtungsfehler auf das Resultat bewirkt.

Aus solchen Betrachtungen folgt z. B. die Regel für die Bestimmung der erdmagnetischen Intensität, daß man die beiden Abstände des ablenkenden Magnets am günstigsten etwa im Verhältnis 1,4 nimmt (78 II); daß die Messung einer elektrischen Stromstärke mit der Tangentenbussole den relativ genauesten Wert nicht bei einem möglichst großen Ausschlage, sondern bei etwa 45° liefert (vgl. 81 u. S. 6); daß die beiden Stromstärken, aus denen der Widerstand oder die Spannung einer galvanischen Säule bestimmt wird, etwa im Verhältnis 1 : 2 gewählt werden (97 1 u 100 II 2); daß das log. Dekrement eines Schwingungszustandes bei einem Verhältnis der beiden Schwingungsweiten ungefähr = 3 relativ am genauesten beobachtet wird (27). Dagegen wird für die genaue Bestimmung eines Lichtbrechungsverhältnisses der Prismenwinkel tunlichst groß gewählt usw.

I. **Ein aus einer einzigen beobachteten Größe abgeleitetes Resultat.** Das gesuchte Resultat (z. B. die Stromstärke) heiße z, die beobachtete Größe (der Ausschlagswinkel) heiße x. Es ist dann z als Funktion von x, d. h. durch irgendeinen mathematischen Ausdruck gegeben, in welchem x vorkommt. Nennen wir nun ξ den in x begangenen Fehler, so wird der hierdurch hervorgebrachte Fehler von z, welcher ζ

heiße, dadurch gefunden, daß man in den Ausdruck, aus welchem z berechnet wird, $x + \xi$ anstatt x einsetzt. Dabei muß selbstverständlich der Fehler ξ in derselben Einheit ausgedrückt werden wie die Größe x selbst. Jetzt wird man ein von dem richtigen Werte z etwas verschiedenes Resultat finden: die Größe dieses Unterschiedes ist der Fehler ζ.

Vorausgesetzt, daß die Beobachtungsfehler relativ kleine Größen sind, lassen sich diese Rechnungen sehr vereinfachen. So beachte man folgende Regeln:

1. Es ist zur Bestimmung des Fehlers im Resultate erlaubt, für die beobachtete Größe, die oben x genannt wurde, einen genäherten Wert zu setzen, was deswegen von Bedeutung ist, weil man den fehlerfreien Wert ja nicht kennt.

2. Korrektionsglieder (4), welche in der Formel für das Resultat vorkommen, dürfen, insofern man nicht etwa ihren Einfluß selbst untersucht, bei der Fehlerrechnung vernachlässigt werden.

3. Der Fehler im Resultat, welcher aus einem Beobachtungsfehler entsteht, wächst im allgemeinen der Größe des letzteren proportional. Mit anderen Worten: der Fehler des Resultates, die oben durch ζ bezeichnete Differenz, läßt sich als ein Produkt darstellen, in welchem der Fehler ξ der beobachteten Größe der eine Faktor ist.

4. Hieraus folgt auch, daß die Fehler des Resultates, welche aus gleich großen, aber im entgegengesetzten Sinne begangenen Fehlern einer Beobachtung hervorgehen würden, an Größe gleich sind, aber entgegengesetztes Vorzeichen haben.

Es kann vorkommen, daß der Resultatfehler nicht dem Beobachtungsfehler proportional ist, sondern z. B. dessen Quadrate oder auch dem Produkte mehrerer Fehler. Dann werden die Sätze unter 3 und 4, bez. auch unter 2 hinfällig.

Die Rechnung wird gekürzt mittels Näherungsformeln für das Rechnen mit kleinen Größen. Diese lassen sich mit Hilfe der Differentialrechnung zusammenfassen. Ist nämlich ξ der in dem beobachteten Werte x begangene Fehler, so wird der Fehler ζ des Resultates z erhalten, indem man den Differentialquotienten der Funktion z nach x mit ξ multipliziert. Also

$$\zeta = \xi \cdot \frac{\partial z}{\partial x}. \qquad \text{I.}$$

Meistens liefern die am Schlusse dieses Artikels angegebenen Näherungsformeln das gewünschte ohne Differenzieren. Einige Beispiele sollen dies zeigen.

1. Beispiel. Eine Gasdichte z werde aus der Ausströmungszeit x einer gegebenen Gasmenge abgeleitet mittels der Formel $z = C \cdot x^2$, wo C eine für den Apparat bekannte Konstante sein soll. Es fragt sich, um welche Größe ζ das Resultat falsch wird, wenn x um den relativ kleinen Wert ξ falsch beobachtet wird. Man hat also den Ansatz $z + \zeta = C(x + \xi)^2$. Für den Ausdruck rechts schreiben wir nach S. 9, 2

$$C(x+\xi)^2 = Cx^2\left(1+\frac{\xi}{x}\right)^2 = z\left(1+2\frac{\xi}{x}\right) = z + 2z\frac{\xi}{x}.$$

Der Fehler ζ ist also $\zeta = 2z\frac{\xi}{x}$, oder es ist $\frac{\zeta}{z} = 2\frac{\xi}{x}$.

Der in z auftretende relative Fehler ist also das Doppelte des in x begangenen relativen Fehlers.

Differentiation von $z = Cx^2$ gibt $\partial z/\partial x = 2Cx$, also den Fehler $\zeta = \xi \cdot 2Cx$, oder wie oben $\zeta/z = 2\xi/x$.

Am einfachsten erhält man relative Fehler oft durch „logarithmisches Differenzieren" Schreibt man statt $z = Cx^2$ $\lg z = \lg C + 2\lg x$ und differenziert diese Formel, so kommt $dz/z = 2dx/x$ ohne weiteres.

Die Verdoppelung tritt immer auf, wenn das Resultat quadratisch von der beobachteten Größe abhängt, also z. B. bei dem aus einer Schallgeschwindigkeit abgeleiteten Elastizitätsmodul oder einer mit dem gewöhnlichen Photometer bestimmten Lichtstärke. Umgekehrt wirkt der relative Fehler der Beobachtung auf das Resultat halbiert ein, wenn dieses die Quadratwurzel der Beobachtung enthält, so daß eine solche Methode cet. par. viermal günstiger ist als die erstere.

2. Beispiel. Eine elektrische Stromstärke z werde aus dem Ablenkungswinkel x einer Tangentenbussole nach der Formel $z = C \cdot \operatorname{tg} x$ bestimmt, wo C einen konstanten Faktor bedeutet. Wird ein Ablesefehler ξ begangen, so folgt der Fehler ζ in z aus

$$z + \zeta = C \operatorname{tg}(x+\xi) = C\left(\operatorname{tg} x + \frac{\xi}{\cos^2 x}\right)$$

nach der dritten Formel 10 (S. 10). Also ist

$$\zeta = C\frac{\xi}{\cos^2 x} = z\frac{\xi}{\sin x \cos x} = z\frac{2\xi}{\sin 2x}.$$

Differentiation gibt $\partial z/\partial x = C/\cos^2 x$, also $\zeta = \xi \cdot C/\cos^2 x$ etc. q. e. d.

Es ist also $2\xi/\sin 2x$ der in Bruchteilen von z ausgedrückte Fehler, welcher dem Ablesungsfehler ξ entspricht. Hieraus folgt, daß Winkel von ungefähr 45° am günstigsten sind, weil für $x = 45°$ der Nenner $\sin 2x$ seinen möglichst großen Wert Eins erhält.

II. Ein aus mehreren Beobachtungsdaten zusammengesetztes Resultat. Ein solches stellt sich als ein

mathematischer Ausdruck dar, welcher die verschiedenen beobachteten Größen enthält. Von diesen können mehrere einen Fehler enthalten; den Einfluß des in einer Größe begangenen Fehlers findet man, seltene Ausnahmen vorbehalten, ohne Rücksicht auf die übrigen Fehler.

Allgemein findet man den Fehler ε in einem Resultate u, dessen Abhängigkeit von den beobachteten Größen $x, y \ldots$ dargestellt werde durch $u = f(x, y \ldots)$, wieder mittels der Näherungsformeln S. 9 f. oder allgemein durch partielles Differenzieren. Sind nämlich $\xi, \eta \ldots$ die bei der Beobachtung von $x, y \ldots$ begangenen Einzelfehler, so wird der Fehler des Resultates

$$\varepsilon = \xi \frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial x} + \eta \frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial y} + \cdots \qquad 2.$$

Von vornherein ist nicht zu sagen, in welchem Sinne der Einzelfehler begangen wird; er kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit das Resultat u zu klein oder zu groß machen. Der Gesamtfehler wird je nach dem zufälligen Zusammentreffen der Vorzeichen größer oder kleiner ausfallen. Sein größter Betrag wird erhalten, wenn man die möglichen Partialfehler von u sämtlich mit gleichem Vorzeichen nimmt. Den durch das Zusammenwirken im Mittel zu erwartenden Fehler findet man, indem man aus der Summe der Quadrate der Partialfehler die Wurzel zieht.

Bedeuten also $\pm [\varepsilon]$ bez. $\pm [\xi]$, $\pm [\eta] \ldots$ die mittleren Fehler des Resultates u, bez. der beobachteten Größen $x, y \ldots$, so gilt

$$[\varepsilon]^2 = [\xi]^2 \left(\frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial x}\right)^2 + [\eta]^2 \left(\frac{\partial f(x, y \ldots)}{\partial y}\right)^2 \cdots \qquad 3.$$

3. Beispiel. Dichtigkeitsbestimmung eines festen Körpers. Es sei m das Gewicht des Körpers in der Luft, m' sein Gewicht im Wasser, so ist die Dichtigkeit $s = \frac{m}{m - m'}$. Also entspricht hier s der oben u genannten Größe, m und m' dem x und y.

Die Fehler in m und in m' dürfen, da beide Beobachtungen voneinander unabhängig sind, einzeln betrachtet werden. Ist bei der Wägung in Luft $m + \mu$ anstatt des richtigen Gewichts m gefunden, so

wird die Dichtigkeit erhalten $\frac{m+\mu}{m+\mu-m'}$ oder mit Anwendung der Formel 8, S. 9,

$$\frac{m}{m-m'}\frac{1+\mu/m}{1+\mu/(m-m')}=s\left(1+\frac{\mu}{m}-\frac{\mu}{m-m'}\right)=s-\mu\frac{m'}{(m-m')^2}.$$

Der Fehler des Resultates ist also $\sigma=-\mu\cdot m'/(m-m')^2$.

Zweitens sei bei der Wägung im Wasser $m'+\mu'$ anstatt m' gefunden. Das fehlerhafte Resultat wird, ähnlich wie oben,

$$\frac{m}{m-(m'+\mu')}=\frac{m}{m-m'}\frac{1}{1-\mu'/(m-m')}=s\left(1+\frac{\mu'}{m-m'}\right).$$

Das Resultat würde also um $\sigma'=\mu'\cdot m/(m-m')^2$ zu groß ausfallen.

Der Gesamtfehler, welcher aus den beiden Beobachtungsfehlern μ und μ' zusammengesetzt ist, hat offenbar den größten Wert $\pm\frac{m'\mu+m\mu'}{(m-m')^2}$, wenn entweder m zu groß und m' zu klein gefunden ist, oder beide umgekehrt. Der zu erwartende mittlere Gesamtfehler ist (Gl. 3, S. 7)

$$\pm\sqrt{\sigma^2+\sigma'^2}=\pm\frac{\sqrt{(m'\mu)^2+(m\mu')^2}}{(m-m')^2}.$$

Zahlenbeispiel. Der Körper (S. 2) wog rund in Luft $m=244$ und im Wasser $m'=218$ gr. Der größte Fehler der Wage war auf $\mu=0{,}005$, bei der weniger genauen Wägung unter Wasser auf $\mu'=0{,}008$ gr zu schätzen. Hiermit ergeben die Formeln

von μ stammend den Fehler $\sigma=0{,}005\cdot218/26^2=0{,}0016$,
von μ' " " " $\sigma'=0{,}008\cdot244/26^2=0{,}0029$.

Im ungünstigen Falle beträgt der Gesamtfehler, wenn z. B. m zu klein und m' zu groß bestimmt wurde, 0,0045, im wahrscheinlichen Falle $\sqrt{(\sigma^2+\sigma'^2)}=\pm0{,}0033$. Wenn einzelne der Bestimmungen (S. 2) erheblich größere Abweichungen zeigen, so müssen andere Fehlerquellen als die Unsicherheit der Wägung bestanden haben. (Luftbläschen, ungenaue Temperaturbestimmung, fehlerhaftes Abzählen der Gewichtstücke.)

4. Beispiel. Die Schwerbeschleunigung g wird aus der Länge l und der Schwingungsdauer t eines Fadenpendels nach dem Ausdruck $g=\pi^2\frac{l}{t^2}$ gefunden. l sei um λ und t um τ falsch bestimmt. Die beiden Fehler sollen gleich miteinander betrachtet werden. Es ist nach Gl. 2 u. 8, S. 9,

$$g+\gamma=\pi^2\frac{l+\lambda}{(t+\tau)^2}=\pi^2\frac{l}{t^2}\frac{1+\lambda/l}{(1+\tau/t)^2}=g\frac{1+\lambda/l}{1+2\tau/t}=g\left(1+\frac{\lambda}{l}-2\frac{\tau}{t}\right)$$

$=g+g\left(\frac{\lambda}{l}-2\frac{\tau}{t}\right)$. Also wird $\frac{\gamma}{g}=\frac{\lambda}{l}-2\frac{\tau}{t}$, d. h. es kommt der relative Fehler in l einfach, derjenige in t doppelt zur Wirkung.

Dasselbe erhält man leicht aus Formel 1, indem man die partiellen Differentialquotienten $\frac{\partial g}{\partial l}=\pi^2\frac{1}{t^2}$ und $\frac{\partial g}{\partial t}=-\pi^2\cdot2\frac{l}{t^3}$ bildet.

Am übersichtlichsten ist bei einer Gleichung von der obigen Form das „logarithmische Differenzieren"; aus der Gleichung $\lg g = \lg \pi^2 + \lg l - 2 \lg t$ ergibt sich sofort $dg/g = dl/l - 2dt/t$.

Man beachte aber noch folgendes. Um den größten Fehler in g zu finden, darf man nicht, wie es nach dem Ausdruck erscheint, den einen Teil vom anderen abziehen. t kann ebensowohl zu klein wie zu groß beobachtet worden sein; im ersteren Falle würde das Minuszeichen sich umkehren. **Der größtmögliche Resultatfehler ist stets durch Addieren der Partialfehler zu berechnen.**

Im Mittel ist zu erwarten (Gl. 3, S. 7) $\frac{\gamma}{g} = \pm\sqrt{\left(\frac{\lambda}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{\tau}{t}\right)^2}$.

Näherungsregeln für das Rechnen mit kleinen Größen.

Ein mathematischer Ausdruck, in welchem einzelne Größen gegen andere sehr klein sind, läßt sich für die Rechnung oft vereinfachen. Kann man dem Ausdruck eine Form geben, welche die Korrektionsgröße nur in einem zu 1 addierten Gliede enthält, so wird man häufig von einer der folgenden Formeln Gebrauch zur Vereinfachung machen können.

Die mit δ, ε, ζ ... bezeichneten Größen sollen gegen 1 so klein sein, daß ihre höheren Potenzen δ^2, ε^2 ... sowie ihre Produkte $\delta\cdot\varepsilon$, $\delta\cdot\zeta$ ..., die ja wieder gegen δ, ε ... selbst sehr klein sind, gegen 1 vernachlässigt werden dürfen. Ist z. B. $\delta = 0{,}001$, so ist $\delta^2 = 0{,}000001$. Wenn etwa ferner $\varepsilon = 0{,}005$, so wird $\delta\cdot\varepsilon = 0{,}000005$. Es kommt oft vor, daß einige Tausendtel noch wichtig, einige Milliontel dagegen gleichgültig sind.

Unter diesen Gesichtspunkten gelten die folgenden Formeln, in denen die rechts vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrücke für die Rechnung oft bequemer sind. Die Formeln 2 bis 6 sind spezielle Fälle von 1.

Eine Größe mit $\pm$ oder $\mp$ soll überall in der Formel entweder mit dem oberen oder mit dem unteren Zeichen genommen werden.

1. $(1+\delta)^m = 1 + m\delta$. $\quad (1-\delta)^m = 1 - m\delta$.

2. $(1+\delta)^2 = 1 + 2\delta$. $\quad (1-\delta)^2 = 1 - 2\delta$.

3. $\sqrt{1+\delta} = 1 + \frac{1}{2}\delta$. $\quad \sqrt{1-\delta} = 1 - \frac{1}{2}\delta$.

4. $\frac{1}{1+\delta} = 1 - \delta$. $\quad \frac{1}{1-\delta} = 1 + \delta$.

5. $\frac{1}{(1+\delta)^2} = 1 - 2\delta$. $\quad \frac{1}{(1-\delta)^2} = 1 + 2\delta$.

6. $\frac{1}{\sqrt{1+\delta}} = 1 - \frac{1}{2}\delta$. $\quad \frac{1}{\sqrt{1-\delta}} = 1 + \frac{1}{2}\delta$.

7. $(1\pm\delta)(1\pm\varepsilon)(1\pm\zeta)\cdots = 1 \pm \delta \pm \varepsilon \pm \zeta \cdots$

8. $\frac{(1\pm\delta)(1\pm\zeta)\cdots}{(1\pm\varepsilon)(1\pm\eta)\cdots} = 1 \pm \delta \pm \zeta \cdots \mp \varepsilon \mp \eta \cdots$

Weiter kann man statt des geometrischen Mittels zweier wenig verschiedener Größen p_1 und p_2 das arithmetische setzen (Beweis 4 Beisp. 3):

9. $\sqrt{p_1 p_2} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$.

Ferner 10.
$$\sin(x+\delta) = \sin x + \delta \cos x, \qquad \sin\delta = \delta,$$
$$\cos(x+\delta) = \cos x - \delta \sin x, \qquad \cos\delta = 1,$$
$$\operatorname{tg}(x+\delta) = \operatorname{tg} x + \frac{\delta}{\cos^2 x}, \qquad \operatorname{tg}\delta = \delta.$$

Als Einheit für δ gilt der Winkel (57,°3), für welchen der Bogen dem Radius gleich ist. In zweiter Annäherung ist (vgl. auch 50ª)

11. $\sin\delta = \delta(1 - \tfrac{1}{6}\delta^2)$; $\cos\delta = 1 - \tfrac{1}{2}\delta^2$; $\operatorname{tg}\delta = \delta(1 + \tfrac{1}{3}\delta^2)$.

12. $\log\operatorname{nat}(x+\delta) = \log\operatorname{nat} x + \frac{\delta}{x} - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{x^2}$; $\log\operatorname{nat}(1+\delta) = \delta - \tfrac{1}{2}\delta^2$.

13. $\log\operatorname{nat}\frac{x+\delta}{x-\delta} = 2\frac{\delta}{x} + \frac{2}{3}\frac{\delta^3}{x^3}$.

3. Bestimmung empirischer Konstanten mit kleinsten Quadraten.

I. Um Beobachtungsfehler auszugleichen, genügt das arithmetische Mittel nicht immer, weil häufig die gesuchte Größe neben einer oder mehreren beobachteten nur in einer Gleichung vorkommt, die man nicht auf jene Größe auflöst. Sie spielt dann die Rolle einer Konstanten, deren Zahlenwert so ermittelt werden soll, daß den Beobachtungen genügt wird.

Ein einfaches Beispiel, an welchem die Aufgabe erläutert werden soll, ist die Bestimmung eines Wärmeausdehnungs-Koeffizienten, der in einer Gleichung auftritt, welche außerdem die beobachteten Größen, hier Längen und Temperaturen, enthält.

Als sonstige Beispiele können genannt werden die Bestimmungen eines Elastizitätsmoduls aus Ausdehnungen, einer spezifischen Wärme aus Abkühlungszeiten, einer Galvanometerkonstante aus Skalenausschlägen, einer elektromotorischen Kraft aus kompensierenden Widerständen, eines Winkels durch ein Repetitionsverfahren. Nicht selten sind in der Gleichung noch andere unbekannte Konstanten, etwa als Faktoren von Korrektionsgliedern, von Temperatureinflüssen usw. vertreten, die gleichzeitig bestimmt oder wenigstens eliminiert werden müssen.

Zu diesem Zwecke werden also mindestens so viele Beobachtungen verlangt, wie unbekannte Größen vorkommen; wenn gerade nur diese Anzahl vorliegt, so werden durch das Einsetzen der beobachteten Werte in den mathematischen Ausdruck so viele Gleichungen wie Unbekannte gewonnen und die letzteren sind hierdurch bestimmt. Vgl. auch III, S. 16 Liegt jedoch

eine größere Anzahl von Beobachtungen vor, so lassen sich die Konstanten im allgemeinen nicht so bestimmen, daß allen Beobachtungen genügt wird, sondern es bleiben Abweichungen gegen die Rechnung übrig, die „Fehler" der Einzelbeobachtungen. Diese Fehler „auszugleichen", d. h. solche Resultate abzuleiten, daß die bleibenden Abweichungen im ganzen tunlichst klein ausfallen, bildet eine der wichtigsten Aufgaben, die aber oft mit Schwierigkeiten verbunden ist. Sie kann häufig zum voraus dadurch erleichtert werden, daß die Beobachtungen diesem Zwecke gemäß verteilt worden sind. Im allgemeinen aber ist Willkür schwer zu vermeiden.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung bietet nun in der **Methode der kleinsten Quadrate** für solche Aufgaben ein systematisches Verfahren.

Beispiel. Die Länge eines Stabes für 0° und seine Verlängerung auf 1° Temperaturerhöhung ist aus einer Anzahl von Längenmessungen bei verschiedenen Temperaturen abzuleiten. Nennen wir A die Länge bei 0°, B die Verlängerung für 1°, so ist für die Temperatur t die Länge u

$$u = A + Bt.$$

A und B sind die unbekannten, zu bestimmenden Konstanten, u und t sind die beobachteten Größen. Zwei Beobachtungen würden genügen. Sind nur für die Temperaturen t_1 und t_2 die resp. Längen u_1 und u_2 beobachtet, so folgt aus $u_1 = A + Bt_1$ und $u_2 = A + Bt_2$

$$A = \frac{t_1 u_2 - t_2 u_1}{t_1 - t_2}, \qquad B = \frac{u_1 - u_2}{t_1 - t_2}.$$

Es mögen außer t_1, u_1 und t_2, u_2 noch die zusammengehörenden Wertepaare t_3, u_3 t_4, u_4 usw. vorliegen. Wären die Beobachtungen fehlerfrei, so würden die gesuchten Größen A und B, aus irgendwelchen zwei Paaren berechnet, stets dieselben Zahlenwerte annehmen. In Wirklichkeit aber findet man der Fehler wegen keine Zahlen für A und B, die den sämtlichen Beobachtungen völlig genügen.

Der Grundsatz der Methode der kleinsten Quadrate sagt: **die Konstanten sollen so bestimmt werden, daß die Summe der Fehlerquadrate ein Minimum wird.** Das heißt: je nach verschiedenen Zahlenwerten der Konstanten werden die mit letzteren aus dem Gesetze berechneten Werte u von den beobachteten um verschiedene Größen (die Fehler) abweichen. Die wahrscheinlichsten Werte der Konstanten sind diejenigen, bei denen die Summe der zweiten Potenzen aller Abweichungen möglichst klein wird.

Bezeichnen wir den mathematischen Ausdruck von bekannter Form, welcher die Abhängigkeit der beobachteten Größe u von einer anderen t (oder auch von mehreren anderen) darstellt, allgemein als Funktion von t durch $\mathfrak{f}(t)$, so kommen in $\mathfrak{f}(t)$ die gesuchten Größen als Konstanten vor, die wir durch $A, B \ldots$ bezeichnen. Die Gleichung ist also

$$u = \mathfrak{f}(t). \qquad 1.$$

Beobachtet seien mehrere Größen $u_1, u_2 \ldots u_n$, welche zu den bekannten Größen $t_1, t_2 \ldots t_n$ gehören. Nach obigem Satze sollen die Zahlenwerte von $A, B \ldots$ so bestimmt werden, daß, wenn man sie in $\mathfrak{f}(t)$ einsetzt, die Summe der Quadrate der Differenzen zwischen den berechneten und beobachteten Größen u den möglichst kleinen Wert erhält.[1]) Also es soll sein

$$[u_1 - \mathfrak{f}(t_1)]^2 + [u_2 - \mathfrak{f}(t_2)]^2 + \cdots + [u_n - \mathfrak{f}(t_n)]^2 = \text{Minimum}$$

oder durch das Summenzeichen Σ bezeichnet

$$\Sigma[u - \mathfrak{f}(t)]^2 = \text{Min.} \qquad 2.$$

Es ist im Auge zu behalten, daß sämtliche u und t bekannte, beobachtete Größen sind. Wie man nötigenfalls die Gleichungen zuvor auf gleiche Genauigkeit gebracht hat, siehe unter IV.

Nach einem Satze der Differentialrechnung ist zu diesem Zwecke der Ausdruck $\Sigma[u - \mathfrak{f}(t)]^2$ nach $A, B \ldots$ zu differenzieren, indem man letztere Größen als Veränderliche behandelt, und jeder partielle Differentialquotient gleich Null zu setzen. Man erhält also gerade so viele „Normalgleichungen", wie Größen $A, B \ldots$ zu bestimmen sind, nämlich

$$\frac{\partial \Sigma[u - \mathfrak{f}(t)]^2}{\partial A} = 0, \qquad \frac{\partial \Sigma[u - \mathfrak{f}(t)]^2}{\partial B} = 0 \text{ usw.} \qquad 3.$$

Auf diesem Wege können beliebig viele Beobachtungen gleichmäßig benutzt werden.

Die gewöhnliche Ableitung eines Resultates aus verschiedenen Beobachtungen eines und desselben Objekts als arithmetisches Mittel ist die einfachste Anwendung dieses Satzes. Denn wenn u_1, $u_2 \ldots u_n$ die einzelnen beobachteten Größen und A das aus ihnen abzuleitende Resultat bezeichnen, so soll A also so bestimmt werden, daß

---

1) Über das Verfahren, welches die Fehler aller beobachteten Größen gleichmäßig berücksichtigt, vgl. V.

$\Sigma[u - A]^2 = \text{Min.}$, also $\frac{\partial \Sigma[u - A]^2}{\partial A}$ d. h $2\Sigma(u - A) = 0$ oder $(u_1 - A) + (u_2 - A) + \cdots + (u_n - A) = 0$ wird. Dies gibt $A = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$.

Freilich kommt es nicht selten vor, daß die durch Differentiation nach $A, B \ldots$ entstehenden Gleichungen nicht direkt auflösbar sind. Dann muß die Lösung durch Probieren und Annäherung gesucht werden. In dem häufigen Falle, wo $f(t)$ die Form hat $f(t) = A + Bt + Ct^2 \ldots$, ist die direkte Lösung immer möglich. Vgl. III und IV.

Fortsetzung des Beispiels. Es sind bei den Temperaturen $t_1, t_2 \ldots t_n$ die Längen $u_1, u_2 \ldots u_n$ beobachtet. Im vorliegenden Falle ist $u = f(t) = A + Bt$. Es sollen A und B so bestimmt werden, daß

$$(u_1 - A - Bt_1)^2 + (u_2 - A - Bt_2)^2 + \cdots + (u_n - A - Bt_n)^2 = \text{Min.}$$

oder kurz

$$\Sigma(u - A - Bt)^2 = \text{Min.}$$

Die Differentiation ergibt

nach A $\quad \Sigma(u - A - Bt) = 0$, $\qquad$ nach B $\quad \Sigma t(u - A - Bt) = 0$,

oder, weil hier $\Sigma A = A \cdot n$ ist,

$$\Sigma u - An - B\Sigma t = 0, \qquad \Sigma tu - A\Sigma t - B\Sigma t^2 = 0.$$

Aus diesen Gleichungen findet sich

$$A = \frac{\Sigma t \Sigma tu - \Sigma u \Sigma t^2}{(\Sigma t)^2 - n\Sigma t^2}, \qquad B = \frac{\Sigma t \Sigma u - n\Sigma tu}{(\Sigma t)^2 - n\Sigma t^2}.$$

Als kurzes Beispiel einer Zahlenrechnung werde ein Meterstab angenommen, der auch für höhere Temperaturen dienen soll. Durch Vergleichung mit einem Normalmaßstabe sei gefunden

bei der Temp. $t_1 = 20°$ $\quad t_2 = 40°$ $\quad t_3 = 50°$ $\quad t_4 = 60°$
die Länge $u_1 = 1000{,}22$ $\quad u_2 = 1000{,}65$ $\quad u_3 = 1000{,}90$ $\quad u_4 = 1001{,}05$ mm.

Nach diesen Beobachtungen soll die Länge u bei der Temperatur t als $u = A + Bt$ dargestellt werden.

Zur Vereinfachung der Zahlenrechnung ziehen wir von allen Längen u den Betrag 1000 mm ab und nennen den Rest τ, dann erhalten wir für A auch nur den Überschuß der Länge bei 0° über 1 m. Die Rechnung stellt sich in folgendem Schema dar:

Nr.	t	τ	t^2	$t\tau$
1.	20	+ 0,22	400	4,4
2.	40	0,65	1600	26,0
3.	50	0,90	2500	45,0
4.	60	1,05	3600	63,0
	$\Sigma t = 170$	$\Sigma\tau = 2{,}82$	$\Sigma t^2 = 8100$	$\Sigma t\tau = 138{,}4$

also ist

$$A = \frac{170 \cdot 138{,}4 - 2{,}82 \cdot 8100}{170^2 - 4 \cdot 8100} = -0{,}196 \text{ mm},$$

$$B = \frac{170 \cdot 2{,}82 - 4 \cdot 138{,}4}{170^2 - 4 \cdot 8100} = +0{,}0212.$$

Die Länge des Stabes bei 0° ist in der angenommenen Formel also $= 1000 - 0{,}196 = 999{,}804$ mm zu setzen und bei der Temperatur t

$$u = 999{,}804 + 0{,}0212\,t.$$

Hiernach berechnen sich die Längen für 20, 40, 50, 60°

Nr.	t	u ber.	u beob.	Δ	Δ^2
		mm	mm	mm	
1.	20°	1000,228	1000,22	+ 0,008	0,000064
2.	40	1000,652	1000,65	+ 0,002	0004
3.	50	1000,864	1000,90	− 0,036	1296
4.	60	1001,076	1001,05	+ 0,026	0676
					$\Sigma\Delta^2 = 0{,}002040$

Man kann sich davon überzeugen, daß jede Änderung von A oder B die Summe der Fehlerquadrate vergrößert.

Ebenso würde aus mehreren Beobachtungen der gegenseitige Gang zweier Uhren, der Elastizitätsmodul eines Stabes, die Empfindlichkeit einer Wage oder eines Galvanometers berechnet werden können usw.

Der lineare Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Größen stellt häufig bloß eine Annäherung dar, die nur bei kleinen Änderungen als merklich genau geltend angesehen werden kann. Als weitere Annäherung wird dann sehr oft, besonders bei Abhängigkeiten von der Temperatur, eine algebraische Form höheren Grades gebraucht, z. B. $u = A + Bt + Ct^2$. Die Wärmeausdehnung der Flüssigkeiten verlangt im allgemeinen noch weitere Glieder. Die Bestimmung der $A, B, C\ldots$ aus beliebig vielen Beobachtungen kann grundsätzlich ebenso geschehen wie oben, ist aber verwickelter und mühsamer.

Für solche Fälle und, falls man oft mit kleinsten Quadraten zu rechnen hat, auch bei einfachen Aufgaben, ist das Gaußsche Rechenverfahren (IV) bequemer und sicherer.

Die numerischen Rechnungen dürfen bei der Bildung der Quadrate und Produkte nicht mehr gekürzt werden. Man kann aber große Zahlen durch Kunstgriffe vermeiden, wie z. B. oben durch Verkleinerung aller u um 1000 mm. Wie man diesen und andere Vorteile durch vorgängige Berechnung von Näherungswerten erreicht, sieht man aus III.

Die Zahlenrechnung betreffend beachte man noch folgende praktische Regel. Die Konstanten $A, B\ldots$ sowie andrerseits die beobachteten Werte sind unter sich oft von verschiedener Größenordnung. So zählen in dem Beispiel schließlich die Temperaturen t nach Zehnern, während die Verlängerungen $\mathfrak{r}$ höchstens 1 mm erreichen. Es ist übersichtlicher, wenn die Größen homogen sind, was man durch Multiplikation oder Division durch Potenzen von 10 bewirkt. Anstatt $B.t$ kann

man schreiben $(10B).(t:10)$. Hätten wir dies getan, so würde 2, 4 ... statt 20, 40 ... in die Rechnung gekommen sein, was angenehmer ist. Das Rechnungsresultat $10B$ schließlich durch 10 geteilt führt zu genau dem früheren Werte von B.

Unzulässig sind dagegen Vereinfachungen, die mit den variabeln Größen selbst ausgeführt werden, z. B. in folgender Weise. Gegeben sei die Gleichung $u = Bt + Ct^2$. Die Anwendung der kleinsten Quadrate hierauf würde sehr vereinfacht werden, wenn statt dessen gesetzt würde $\frac{u}{t} = B + Ct$. Dies würde aber zu anderen Resultaten führen als die ursprüngliche Gleichung.

Den sogenannten **mittleren Beobachtungsfehler** erhält man bei diesen Aufgaben aus der Summe der Quadrate der Differenzen zwischen beobachteten und berechneten Größen, wenn n die Anzahl der Beobachtungen, m die Anzahl der zu bestimmenden Konstanten A, B ... d. h. die Anzahl der Normalgleichungen bedeutet, als

$$\pm\sqrt{\frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_n^2}{n - m}}. \qquad 4.$$

Also im obigen Beispiele $\pm\sqrt{\frac{0{,}00204}{4-2}} = \pm\, 0{,}032$ mm.

II. Rechnung bei gleich großen Intervallen.

Liegen die beobachteten Größen in gleichen Abständen voneinander, so wird die Rechnung einfacher. Dergleichen Verhältnisse kommen nicht selten vor; ein periodisches Ereignis sei z. B. wiederholt beobachtet worden, und es werde die Zwischenzeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden Ereignissen gesucht [Schwingungsdauer (28), Umlaufszeit]. Oder man will den Abstand zweier benachbarter Punkte bestimmen, wenn nicht nur zwei, sondern eine größere Anzahl solcher Punkte nebeneinander liegt, deren Örter beobachtet wurden [Abstand der Knotenpunkte eines Wellenzuges (56)].

Allgemein ändere sich eine Größe proportional einer zweiten; von letzterer sei eine Anzahl gleichweit voneinander abstehender bekannter Punkte genommen, zu denen man die zugehörigen Werte der anderen Größe beobachtet hat.

So könnten in der vorigen Aufgabe die Stablängen überall in gleichen Temperaturabständen gemessen sein.

Die beobachtete Größe u möge der Reihe nach mit den Werten $u_1, u_2 \ldots u_{n-1}, u_n$ gefunden sein. Ohne Fehler sollten die Intervalle $u_2 - u_1$, $u_3 - u_2$ ... $u_n - u_{n-1}$ alle gleich groß sein. In Wirklichkeit sind sie ungleich und man sucht den wahrscheinlichsten Wert. Das arithmetische Mittel aus allen Intervallen würde auf dasselbe hinauslaufen, wie wenn man nur den ersten und den letzten Wert berücksichtigte. Die gleichförmige Benutzung aller Beobachtungen mit kleinsten Quadraten verlangt, daß man das Intervall berechnet als

$$6\,\frac{(n-1)(u_n-u_1)+(n-3)(u_{n-1}-u_2)+\cdots}{n(n^2-1)}.$$

Das Gewicht dieses Resultates ist $P = n(n^2-1)/12$; der mittlere Fehler des Resultates beträgt dann, wenn ε der mittlere Fehler der einzelnen Beobachtung ist, $\mathsf{E} = \varepsilon/\sqrt{P}$.

Ableitung. Wenn t die Nummer der Beobachtung bedeutet und $u = A + Bt$ gesetzt wird, so ist B das gesuchte Intervall. Also

$$t_1 = 1, \quad t_2 = 2 \cdots, \quad t_{n-1} = n-1, \quad t_n = n.$$

Die Ausdrücke
$$\begin{aligned} \Sigma t &= 1 + 2 + \cdots + n = \tfrac{1}{2}n(n+1), \\ \Sigma t^2 &= 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \tfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1), \\ \Sigma u &= u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \\ \Sigma t u &= u_1 + 2u_2 + \cdots + n u_n \end{aligned}$$
in B (S. 13) eingesetzt geben den obigen Ausdruck.

Die mittleren Beobachtungen erhalten bei dieser Rechnung nur einen kleinen Einfluß auf das Resultat. — Man wird häufig ohne kl. Qu. rechnen, nämlich, wenn $n = 2m$ ist, das Mittel aus $(u_{m+1} - u_1)/m$, $(u_{m+2} - u_2)/m$ usw. nehmen. Vgl. 28.

III. Auflösung von Gleichungen, wenn Näherungswerte für die Unbekannten vorliegen.

Zuerst soll gezeigt werden, wie man die Aufgabe der Konstanten-Bestimmung einer Gleichung auf die Auflösung linearer Gleichungen zurückführen kann.

Eine beobachtete Größe u sei von anderen beobachteten Größen $r, s, t \ldots$ nach einem Gesetze von bekannter Form abhängig; dieses Gesetz enthalte die Konstanten A, B, C, welche eben aus den Beobachtungen bestimmt werden sollen. Eine größere Anzahl als drei wird bei physikalischen Aufgaben selten vorliegen und könnte überdies ebenso behandelt werden wie

unser Fall. Es müssen natürlich mindestens so viele Beobachtungen vorliegen, wie zu bestimmende Konstanten. Die beobachteten Größen bezeichnen wir mit $u_1 r_1 s_1 t_1 \quad u_2 r_2 s_2 t_2$ etc.

Die Abhängigkeit der Größen voneinander werde durch das Symbol dargestellt

$$u = \mathrm{f}(A, B, C, r, s, t, \ldots). \qquad 5.$$

Die $r, s \ldots$ werden im allgemeinen Ablesungen an Instrumenten enthalten, wie Uhr, Wage, Maßstab, Teilkreis, Thermometer, Manometer, Rheostat, Galvanometer, Brückendraht usw. Als Beispiele für die u bei physikalischen Aufgaben mögen Längen, Volumina, Dichtigkeiten, elektrische Stromstärken, Widerstände oder Spannungen, magnetische Momente, Lichtbrechungsverhältnisse genannt sein.

Eine Kritik und Ergänzung des praktisch gebräuchlichen Verfahrens, die Fehler nur einer Größe zuzuschieben, s. S. 23.

Die zu bestimmenden Konstanten A, B, C, welche hier die Unbekannten vorstellen, lassen sich häufig nicht direkt aus den Gleichungen entwickeln. Hat man sich aber Näherungswerte für A, B, C verschafft, so führt man die Aufgabe in folgender Weise auf die stets mögliche Auflösung linearer Gleichungen zurück.

Die Näherungswerte seien $[A]$, $[B]$, $[C]$; die richtigen werden dann sein

$$A = [A] + \alpha \qquad B = [B] + \beta \qquad C = [C] + \gamma. \qquad 6.$$

Diese Korrektionen α, β, γ sind also jetzt die Unbekannten, welche man bestimmen soll. Zu diesem Zwecke bilde man die partiellen Differentialquotienten der Funktion u oder f nach A, B, C, indem man letztere Größen zunächst als Veränderliche behandelt, nach der Differentiation aber $[A], [B], [C]$ dafür einsetzt. Wir bezeichnen die so definierten Werte der Differentialquotienten

$$\left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] = a \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] = b \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = c. \qquad 7.$$

In diese drei Ausdrücke sollen nun für die darin vorkommenden Werte $r, s, t \ldots$ die beobachteten Zahlen eingesetzt werden, z. B. $r_1, s_1, t_1 \ldots$ dann $r_2, s_2, t_2, \ldots$ etc.; die so entstehenden Größen sollen bez. $a_1, b_1, c_1 \quad a_2, b_2, c_2$ etc. heißen.

Endlich nennen wir $[u]$ den Wert, der für die Funktion u entsteht, wenn man $[A]$, $[B]$, $[C]$ in die Funktion f einsetzt, während u den wirklich beobachteten Wert bedeute. u und $[u]$

werden sich durch einen Rest $\mathfrak{r}$ voneinander unterscheiden, so daß

$$\mathfrak{r} = u - [u]. \tag{8.}$$

Nach dem Taylorschen Satze ist dann, wenn $\mathfrak{r}$, α, β, γ hinreichend klein sind,

$$\mathfrak{r} = \alpha\left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] + \beta\left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] + \gamma\left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = \alpha a + \beta b + \gamma c. \tag{9.}$$

Indem man in diese Gleichung die sämtlichen Beobachtungen einsetzt, erhält man so viele Gleichungen wie Beobachtungen, in denen außer α, β, γ alles zahlenmäßig gegeben ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{r}_1 &= \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 \\ \mathfrak{r}_2 &= \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 \\ &\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{aligned} \tag{10.}$$

Beispiel: Die Temperatur eines sich in konstanter Umgebung abkühlenden Körpers (oder die Lage einer aperiodisch gedämpften Magnetnadel oder eines in einem zähen Mittel sich bewegenden Körpers; oder der Verlauf einer langsam vor sich gehenden chemischen Reaktion usw.) sei für die Zeit t durch den Ausdruck dargestellt

$$u = A \cdot 10^{-Bt} + C.$$

A, B und C seien aus drei Beobachtungen zu bestimmen, welche zu den Zeiten t_1 t_2 t_3 für u die Werte u_1 u_2 u_3 ergeben haben. Setzt man zusammengehörige Paare in den Ausdruck ein, so erhält man allerdings drei Gleichungen, durch welche A, B, C bestimmt sind. Die Elimination z. B. von C und A führt aber für B auf die Beziehung $\frac{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_2}}{10^{-Bt_1} - 10^{-Bt_3}} = \frac{u_1 - u_2}{u_1 - u_3}$, eine Gleichung, welche nicht nach B aufgelöst werden kann. Wohl aber kann man durch Probieren leicht eine Zahl für B finden, welche der Gleichung genähert genügt. — Oder man zeichnet u_1 u_2 u_3 als Ordinaten zu t_1 t_2 t_3 in Koordinatenpapier, zieht die Kurve durch und legt zwei Tangenten an dieselbe, welche das Gefälle q' und q'' für zwei, der Rechnung bequem gewählte Abszissen t' und t'' ergeben. Dann ist $B = (\lg q' - \lg q'')/(t'' - t')$, der Wert wird aber nicht genau sein. — Oder endlich, es ist für die dritte Beobachtung t_3 etwa so groß, daß u_3 nahe den Endwert C vorstellt. — Sobald man A oder B oder C hat, so lassen die beiden übrigen Größen sich geschlossen ausdrücken, werden aber auch nur Näherungswerte sein, wenn die erste ein solcher ist.

So habe man sich die Näherungen $[A]$, $[B]$ und $[C]$ verschafft. Es ist dann

$$\mathfrak{r} = u - [A] \cdot 10^{-[B] \cdot t} - [C]. \tag{8a.}$$

$$a = \left[\frac{\partial u}{\partial A}\right] = 10^{-[B] \cdot t} \quad b = \left[\frac{\partial u}{\partial B}\right] = -\frac{[A] \cdot t \cdot 10^{-[B] \cdot t}}{\log e} \quad c = \left[\frac{\partial u}{\partial C}\right] = 1. \tag{7a.}$$

Durch Einsetzen der drei Beobachtungspaare in Gl. 7a und 8a und der hieraus erhaltenen Zahlen für $\mathfrak{r}, a, b, c$ in Gl. 9 erhält man drei Gleichungen 10. Aus diesen bestimmt man α, β, γ und dann aus Gl. 6 A, B, C, welche meistens den Beobachtungen schon genügen werden. Andernfalls benutzt man sie als bessere Näherungswerte und wird bei Wiederholung der einfachen Rechnung sicher zum Ziele kommen.

Liegen nur so viele Beobachtungen vor wie Unbekannte, so kann man die Gleichungen in gewöhnlicher Weise auflösen. Im anderen Falle dient die Methode der kleinsten Quadrate. Vgl. hierüber I und IV.

Es ist kaum nötig zu bemerken, daß, wenn u schon in der Form $u = A \cdot r + B \cdot s + C \cdot t$ gegeben ist (z. B. als $u = A + B \cdot s + C \cdot s^2$, wo s etwa eine Temperatur vorstellt), daß dann die eben auseinandergesetzte Reduktion nicht notwendig ist. Trotzdem wird man sie oft mit Vorteil gebrauchen, d. h. sich Näherungswerte für A, B, C verschaffen und mit den Resten rechnen, um nämlich kleinere Zahlen einzuführen, welche im Kopfe oder mit Multiplikationstafeln zu rechnen gestatten. Man hätte dann

$$a = \frac{\partial u}{\partial A} = r \qquad b = \frac{\partial u}{\partial B} = s \qquad c = \frac{\partial u}{\partial C} = t.$$

Dies sieht man hier auch ohne Differentialrechnung, denn wenn

$$[u] + \mathfrak{r} = ([A] + \alpha)r + ([B] + \beta)s + ([C] + \gamma)t,$$

so ist eben

$$\mathfrak{r} = \alpha \cdot r + \beta \cdot s + \gamma \cdot t.$$

An dem Beispiel von S. 18 mit zwei zu bestimmenden Konstanten A und B kann man den Vorteil leicht sehen. Es war $u = A + Bt$. Einen Näherungswert für B liefern offenbar die beiden Beobachtungen

$$t_1 = 20 \quad u_1 = 1000{,}22 \quad \text{und} \quad t_4 = 60 \quad u_4 = 1001{,}05,$$

nämlich

$$[B] = \frac{1001{,}05 - 1000{,}22}{60 - 20} = \frac{0{,}83}{40} = 0{,}021.$$

Aus der Beobachtung 1 findet man dann für A die Näherung

$$[A] = 1000{,}22 - 20 \cdot 0{,}021 = 999{,}8.$$

Also

$$[u] = 999{,}8 + 0{,}021 \cdot t.$$

Da nun $a = \frac{\partial u}{\partial A} = 1$ und $b = \frac{\partial u}{\partial B} = t$, so wird die Gleichung

$$u - [u] = \mathfrak{r} = \alpha \cdot a + \beta \cdot b = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot t.$$

Hierin sind α und β mit kleinsten Quadraten zu bestimmen. $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{r}_2 \ldots$, $a_1 a_2 \ldots$ und $b_1 b_2 \ldots$ berechnen sich:

Nr.	u mm	t	$[u] = 999,8 + 0,021 \cdot t$ mm	$\mathfrak{r}$ mm	a	b
1.	1000,22	20°	1000,22	+0,00	1	20
2.	1000,65	40	1000,64	+0,01	1	40
3.	1000,90	50	1000,85	+0,05	1	50
4.	1001,05	60	1001,06	−0,01	1	60

wo man nun alles nach dem Schema S. 13, aber im Kopfe rechnen kann; am einfachsten, wenn man noch $\mathfrak{r}$ in Hunderteln mm und b in Zehnern von Graden als Einheiten ausdrückt. Die so berechneten α bez. β wären natürlich zum Schluß durch 100 bez. 1000 zu dividieren.

IV. Das Gauß'sche Rechenverfahren bei der Auflösung linearer Gleichungen mit kleinsten Quadraten.

Es seien n Beobachtungen gemacht und nötigenfalls mit Näherungswerten nach III in linearen Zusammenhang gebracht. Die in Bezug auf α, β, γ als Unbekannte aufzulösenden Gleichungen heißen (Gl. 10, S. 18)

$$\mathfrak{r}_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1$$
$$\mathfrak{r}_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$\mathfrak{r}_n = \alpha a_n + \beta b_n + \gamma c_n.$$

Es wird im allgemeinen genügen, die Zahlen für $a_1 \ldots b_1 \ldots c_1 \ldots$ so weit auszurechnen, daß ihre Ziffernzahl derjenigen der bleibenden Reste $\mathfrak{r}$ ungefähr gleichkommt. Es ist dabei von großem Vorteil, wenn die Näherungswerte so nahe richtig sind, daß die Reste zwei, höchstens drei Ziffern umfassen. Dann kann man die Quadrate und Produkte mit Rechentafeln, z. B. von Crelle oder Zimmermann, oder mit drei- oder vierstelligen Logarithmen bilden. Bei diesen Rechnungen darf, wie schon oben bemerkt wurde, nicht weiter gekürzt werden.

Allen Gleichungen soll dasselbe wahrscheinliche Maß der Genauigkeit zukommen. Liegt eine Veranlassung vor, den verschiedenen Beobachtungen eine ungleiche Genauigkeit zuzuschreiben, so seien die Gleichungen bereits durch Multiplikation mit der Quadratwurzel des einer jeden zukommenden Gewichtes (S. 3) auf gleiche Genauigkeit gebracht. Dabei ist zu beachten, daß auch Faktoren 1 in demselben Verhältnis geändert werden müssen.

Um die Gleichungen nach kleinsten Quadraten aufzulösen, kann das S. 11 ff. erörterte Verfahren dienen unter Beachtung, daß den dortigen u $t \ldots$ $A, B \ldots$
hier die Größen entsprechen $\mathfrak{r}$ a, b, c α, β, γ.

Für eine größere Anzahl von Unbekannten, z. B. schon für unsere drei, ist aber die folgende Auflösung bequemer.

Man findet links die Reihenfolge der Hauptrechnung; daneben rechts für deren Richtigkeit eine Kontrolle, welche man neben der Hauptrechnung führt. Es handelt sich zunächst um die Berechnung von Summen der Quadrate oder der Produkte zusammengehöriger Größen, die wir in leichtverständlicher Weise abgekürzt so bezeichnen:

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = [aa] \qquad a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n = [ab]$$

$$a_1 \mathfrak{r}_1 + a_2 \mathfrak{r}_2 + \cdots + a_n \mathfrak{r}_n = [a\mathfrak{r}] \text{ usw.}$$

Rechnung.	Kontrolle.
Man bilde $[aa]$ $[ab]$ $[ac]$ $[a\mathfrak{r}]$	Es sei $a + b + c = S$.
$[bb]$ $[bc]$ $[b\mathfrak{r}]$	Ferner, wie oben bezeichnet,
$[cc]$ $[c\mathfrak{r}]$	$a_1 S_1 + a_2 S_2 + \cdots + a_n S_n = [aS]$ etc.
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$	Dann muß sein
$[\mathfrak{r}\mathfrak{r}]$ ist nur für die letzte Kontrolle notwendig.	$[aa] + [ab] + [ac] = [aS]$ $[ab] + [bb] + [bc] = [bS]$ $[ac] + [bc] + [cc] = [cS]$ $[a\mathfrak{r}] + [b\mathfrak{r}] + [c\mathfrak{r}] = [\mathfrak{r}S]$.

Die Normalgleichungen zur Bestimmung von α, β, γ sind dann

$$[aa]\cdot\alpha + [ab]\cdot\beta + [ac]\cdot\gamma = [a\mathfrak{r}]$$
$$[ab]\cdot\alpha + [bb]\cdot\beta + [bc]\cdot\gamma = [b\mathfrak{r}]$$
$$[ac]\cdot\alpha + [bc]\cdot\beta + [cc]\cdot\gamma = [c\mathfrak{r}].$$

Die Auflösung geschieht folgendermaßen:

Man bilde und bezeichne	Man berechne
$[bb] - \frac{[ab]}{[aa]}[ab] = [bb]_{\mathrm{I}}$	$[bS] - \frac{[ab]}{[aa]}[aS] = [bS]_{\mathrm{I}}$
$[bc] - \frac{[ab]}{[aa]}[ac] = [bc]_{\mathrm{I}}$	$[cS] - \frac{[ac]}{[aa]}[aS] = [cS]_{\mathrm{I}}$
$[b\mathfrak{r}] - \frac{[ab]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}$	$[\mathfrak{r}S] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[aS] = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}}$;
$[cc] - \frac{[ac]}{[aa]}[ac] = [cc]_{\mathrm{I}}$	dann muß sein $[bb]_{\mathrm{I}} + [bc]_{\mathrm{I}} = [bS]_{\mathrm{I}}$ $[bc]_{\mathrm{I}} + [cc]_{\mathrm{I}} = [cS]_{\mathrm{I}}$
$[c\mathfrak{r}] - \frac{[ac]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] = [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}}$.	$[b\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} + [c\mathfrak{r}]_{\mathrm{I}} = [\mathfrak{r}S]_{\mathrm{I}}$.

Endlich

$$[cc]_I - \frac{[bc]_I}{[bb]_I}[bc]_I = [cc]_{II}$$

$$[c\mathfrak{r}]_I - \frac{[bc]_I}{[bb]_I}[b\mathfrak{r}]_I = [c\mathfrak{r}]_{II}.$$

Man berechne

$$[cS]_I - \frac{[bc]_I}{[bb]_I}[bS]_I = [cS]_{II}$$

$$[\mathfrak{r}S]_I = \frac{[b\mathfrak{r}]_I}{[bb]_I}[bS]_I = [\mathfrak{r}S]_{II};$$

dann muß sein

$$[cc]_{II} = [cS]_{II} \quad \text{und} \quad [c\mathfrak{r}]_{II} = [\mathfrak{r}S]_{II}.$$

Hieraus erhält man die Unbekannten α, β und γ:

$$\gamma = \frac{[c\mathfrak{r}]_{II}}{[cc]_{II}} \qquad \beta = \frac{[b\mathfrak{r}]_I}{[bb]_I} - \gamma\frac{[bc]_I}{[bb]_I} \qquad \alpha = \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]} - \frac{[ab]}{[aa]}\beta - \frac{[ac]}{[aa]}\gamma.$$

Kontrolle der ganzen Rechnung. Die Einsetzung der gefundenen α, β, γ in die ursprünglichen Gleichungen lasse die Fehler übrig

$$\mathfrak{f}_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1 - \mathfrak{r}_1 \qquad \mathfrak{f}_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2 - \mathfrak{r}_2 \text{ etc.}$$

Dann muß sein

$$\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots + \mathfrak{f}_n^2 = [\mathfrak{r}\mathfrak{r}] - \frac{[a\mathfrak{r}]}{[aa]}[a\mathfrak{r}] - \frac{[b\mathfrak{r}]_I}{[bb]_I}[b\mathfrak{r}]_I - \frac{[c\mathfrak{r}]_{II}}{[cc]_{II}}[c\mathfrak{r}]_{II}.$$

Die Gewichte der so bestimmten α, β, γ werden erhalten

$$p_\gamma = [cc]_{II} \qquad p_\beta = p_\gamma\frac{[bb]_I}{[cc]_I} \qquad p_\alpha = p_\gamma\frac{[ca]\cdot[bb]_I}{[cc]\cdot[bb] - [bc]\cdot[bc]}.$$

Die Quadrate der mittleren Fehler von α, β, γ erhält man, indem man den Ausdruck $(\mathfrak{f}_1^2 + \mathfrak{f}_2^2 + \cdots + \mathfrak{f}_n^2)/(n-3)$ durch p_α, p_β, p_γ dividiert; 3 ist hier die Anzahl der bestimmten Konstanten.

Es kann vorkommen, daß die mit kleinsten Quadraten erhaltenen Korrektionen α, β, γ nicht genügen. Dann hat man die jetzt entstandenen Werte $[A] + \alpha$, $[B] + \beta$, $[C] + \gamma$ wieder als Näherungswerte von A, B, C zu betrachten und die Rechnung zu wiederholen.

Rechenschema. Es empfiehlt sich, bei solchen Rechnungen die Zahlen immer in derselben Ordnung zu schreiben, z. B. (die Klammern der Produktsummen sind weggelassen):

$$\begin{array}{lll|lllll}
\lg aa & & & aa & ab & ac & aS & a\mathfrak{r} \\
\lg ab & \lg bb_I & & & bb & bc & bS & b\mathfrak{r} \\
\lg ac & \lg bc_I & \lg cc_{II} & & \frac{ab}{aa}ab & \frac{ab}{aa}ac & \frac{ab}{aa}aS & \frac{ab}{aa}a\mathfrak{r} \\
\lg aS & \lg bS_I & & & & & & \\
\hline
\lg a\mathfrak{r} & \lg b\mathfrak{r}_I & \lg c\mathfrak{r}_{II} & \text{Diff.} = & bb_I & bc_I & bS_I & b\mathfrak{r}_I
\end{array}$$

$$
\begin{array}{lll}
\lg\dfrac{ab}{aa} & \lg\dfrac{bc_{\rm I}}{bb_{\rm I}} & \lg\dfrac{c\mathfrak{r}_{\rm II}}{cc_{\rm II}} \\[2ex]
\lg\dfrac{ac}{aa} & \lg\dfrac{b\mathfrak{r}_{\rm I}}{bb_{\rm I}} & \\[2ex]
\lg\dfrac{a\mathfrak{r}}{aa} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rccccc}
 & cc & cS & c\mathfrak{r} & \mathfrak{r}S & \mathfrak{r}\mathfrak{r} \\
 & \dfrac{ac}{aa}ac & \dfrac{ac}{aa}aS & \dfrac{ac}{aa}a\mathfrak{r} & \dfrac{a\mathfrak{r}}{aa}aS & \dfrac{a\mathfrak{r}}{aa}a\mathfrak{r} \\
\hline
\text{Diff.} = & cc_{\rm I} & cS_{\rm I} & c\mathfrak{r}_{\rm I} & \mathfrak{r}S_{\rm I} & \\
 & \dfrac{bc_{\rm I}}{bb_{\rm I}}bc_{\rm I} & \dfrac{bc_{\rm I}}{bb_{\rm I}}bS_{\rm I} & \dfrac{bc_{\rm I}}{bb_{\rm I}}b\mathfrak{r}_{\rm I} & \dfrac{b\mathfrak{r}_{\rm I}}{bb_{\rm I}}bS_{\rm I} & \dfrac{b\mathfrak{r}_{\rm I}}{bb_{\rm I}}b\mathfrak{r}_{\rm I} \\
\hline
\text{Diff.} = & cc_{\rm II} & cS_{\rm II} & c\mathfrak{r}_{\rm II} & \mathfrak{r}S_{\rm II} & \\
 & & & & & \dfrac{c\mathfrak{r}_{\rm II}}{cc_{\rm II}}c\mathfrak{r}_{\rm II} \\
\hline
 & & & & \text{Diff.} = & \Sigma\mathfrak{f}^2
\end{array}
$$

V. Fehlerverteilung auf alle beobachteten Größen.

Das bisher behandelte gebräuchliche Verfahren, die Fehler auf eine der beobachteten Größen u zu schieben, ist gerechtfertigt, wenn die Beobachtungsfehler einer Größe, die dann für u zu wählen ist, die Fehler der übrigen bedeutend überwiegen. Dieser Fall liegt, so wie in unserem Zahlenbeispiel, nicht selten vor. Beobachtet man eine Größe, z. B. eine Körpereigenschaft (Länge, Volumen, Dichte, Elastizität, Kapillarität, Leitvermögen von Metallen, Magnetismus) als Funktion der Temperatur oder einer Belastung, etwa des Druckes, oder bestimmt man einen räumlich verteilten Zustand (Schwere, magnetisches oder elektrisches Feld, Temperatur, Luftdruck) als Funktion der Koordinaten, so sind häufig die jedesmal zuzweit genannten Größen nur mit geringen Beobachtungsfehlern behaftet, welche das Resultat kaum beeinflussen, und die Fehler liegen ganz überwiegend auf der ersteren Seite.

Derartiges trifft aber nicht immer zu; die Fehler verschiedener Beobachtungsgrößen können vielmehr in ihrem Einfluß auf das Resultat von derselben Ordnung sein. (Beispiele: Volumen, Druck und Temperatur bei Gasen; Längen- usw. Messungen unter Verhältnissen, wo die Temperaturbestimmung erschwert ist, z. B. in der Hitze; Leitvermögen von Elektrolyten, bei denen die Temperaturfehler im allgemeinen von relativ großem Einfluß sind; bei Dichtebestimmungen von Lösungen als Funktion der Konzentration treten die Fehler der chemischen Analyse mit denen der Wägungen in Konkurrenz.) Das gebräuchliche Verfahren entspricht dann nicht den wirklichen Verhältnissen.

Unter der Voraussetzung, daß die **mittleren Beobachtungsfehler** der Größen $u, r, s \ldots$ bekannt sind, kann man dann folgendermaßen vorgehen (Helmert).[1])

Die Gleichung, die den naturgesetzlichen Zusammenhang zwischen $u, r, s \ldots$ darstellt, sei auf die Form gebracht

$$f(A, B, C \ldots u, r, s \ldots) = 0, \qquad 1.$$

und es mögen wieder mehr Beobachtungssätze $u_1 r_1 s_1, u_2 r_2 s_2 \ldots$ vorliegen, als Konstanten $A, B, C \ldots$ zu bestimmen sind. Die Gleichung kann also nicht mit allen Beobachtungssätzen zugleich in Übereinstimmung gebracht werden.

Machen wir nun die Annahme, daß, wenn man die beobachteten Werte $u_1 r_1 s_1, u_2 r_2 s_2 \ldots$ um die kleinen Größen $\mathfrak{u}_1 \mathfrak{r}_1 \mathfrak{s}_1, \mathfrak{u}_2 \mathfrak{r}_2 \mathfrak{s}_2 \ldots$ (die Fehler) verbessert, alsdann alle Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} f(A, B, C \cdots u_1 + \mathfrak{u}_1, r_1 + \mathfrak{r}_1, s_1 + \mathfrak{s}_1 \cdots) = 0 \\ f(A, B, C \cdots u_2 + \mathfrak{u}_2, r_2 + \mathfrak{r}_2, s_2 + \mathfrak{s}_2 \cdots) = 0 \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \qquad 2.$$

streng erfüllt seien, so verlangt die Theorie der kleinsten Quadrate, daß die Konstanten $A, B, C \ldots$ so bestimmt werden, daß, über alle Beobachtungen erstreckt, die Summe der auf gleiches Gewicht gebrachten Quadrate der Beobachtungsfehler möglichst klein wird, also

$$\sum \left(\frac{\mathfrak{u}^2}{\mathfrak{U}^2} + \frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{S}^2} + \cdots \right) = \text{Minimum}, \qquad 3$$

wobei $\mathfrak{U}, \mathfrak{R}, \mathfrak{S} \ldots$ die als bekannt vorausgesetzten **mittleren** Beobachtungsfehler von $u, r, s \ldots$ bedeuten; vgl. S. 3 u. 20.

Statt dieser Minimumgleichung wird man der Einfachheit halber die folgende substituieren, in welcher die Einzelfehler in eine einzige Fehlergröße zusammengezogen auftreten. $[A], [B], [C] \ldots$ seien bekannte Näherungswerte der Konstanten, so daß (vgl. hierüber 3 III)

$$A = [A] + \alpha \quad B = [B] + \beta \quad C = [C] + \gamma \quad \text{etc.},$$

wo α, β, γ also die schließlich zu bestimmenden Größen sind. Dann läßt sich jede der Gleichungen 2, insofern $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ sowie

1) Nach freundlicher Mitteilung von Herrn Helmert.

$\mathfrak{u}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ hinreichend klein sind, unter Weglassung der Indices umformen in:

$$f([A],[B],[C]\ldots u,r,s\ldots)+\alpha\frac{\partial f}{\partial A}+\beta\frac{\partial f}{\partial B}+\gamma\frac{\partial f}{\partial C}+\cdots$$
$$+\mathfrak{u}\frac{\partial f}{\partial u}+\mathfrak{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\mathfrak{s}\frac{\partial f}{\partial s}+\cdots=0; \qquad 2a.$$

die Koeffizienten von $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ und von $\mathfrak{u}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ werden mit den Näherungs- bez. den beobachteten Werten in Zahlen ausgedrückt.

$f([A],[B],[C]\ldots u,r,s\ldots)$ ist eine für jeden Beobachtungssatz zahlenmäßig auszurechnende Größe, die mit $[f]$ bezeichnet werde. Der in Gleichung 2a ferner vorkommende Ausdruck $\mathfrak{u}\frac{\partial f}{\partial u}+\mathfrak{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\mathfrak{s}\frac{\partial f}{\partial s}\cdots$ bedeutet nun offenbar, auf einen einzelnen Beobachtungssatz angewandt, den Fehler des Resultates f, der durch das Zusammenwirken der Einzelfehler $\mathfrak{u}, \mathfrak{r}, \mathfrak{s} \ldots$ entsteht. Bezeichnen wir diesen Fehler mit $\mathfrak{f}$, also $\mathfrak{u}\frac{\partial f}{\partial u}+\mathfrak{r}\frac{\partial f}{\partial r}+\mathfrak{s}\frac{\partial f}{\partial s}=\mathfrak{f}$, so läßt sich Gl. 2a jetzt in der Form schreiben

$$-\mathfrak{f}=[f]+\alpha\frac{\partial f}{\partial A}+\beta\frac{\partial f}{\partial B}+\gamma\frac{\partial f}{\partial C}+\cdots \qquad 2b.$$

Hierdurch ist der zusammengefaßte Gesamtfehler $\mathfrak{f}$ der Beobachtungen in einem Ausdruck dargestellt, der außer den zu bestimmenden Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ in jedem Beobachtungssatz nur Größen enthält, die sich in Zahlen ausdrücken lassen.

Nach dem Grundsatz der kleinsten Quadrate sind nun die Konstanten $\alpha, \beta, \gamma \ldots$ so zu ermitteln, daß der Bedingung genügt wird

$$\sum\frac{\mathfrak{f}^2}{\mathfrak{F}^2}=\text{Min.} \qquad 4.$$

Die Summe ist über alle Beobachtungssätze zu erstrecken. $\mathfrak{f}$ bedeutet, wie eben gesagt wurde, für jeden Satz die durch Gl. 2b gegebene Größe.

$\mathfrak{F}^2$ endlich bedeutet das mittlere Fehlerquadrat von f; dasselbe wird gefunden (vgl. S. 7, Gl. 3)

$$\mathfrak{F}^2=\mathfrak{U}^2\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2+\mathfrak{R}^2\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)^2+\mathfrak{S}^2\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)^2+\cdots \qquad 5.$$

und ist, indem man die Näherungswerte $[A]$, $[B]\ldots$ und die beobachteten $u_1 r_1 s_1 \ldots$ etc. in f einsetzt, für jeden Beobachtungssatz numerisch berechenbar. Hiermit ist die Konstantenbestimmung auf das frühere Schema, also etwa auf das Gauß'sche Verfahren (IV) zurückgeführt.

Die nach der Bestimmung von α, β, γ für jeden Beobachtungssatz aus Gl. 2b zu ermittelnde Fehlergröße $\mathfrak{f}$ kann schließlich auch auf die Einzelbeobachtungen gemäß der Bedingung 3 verteilt werden, nämlich dadurch, daß man setzt

$$\frac{\mathfrak{u}}{\mathfrak{U}^2} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\frac{\partial f}{\partial u}; \quad \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{R}^2} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\frac{\partial f}{\partial r}; \quad \frac{\mathfrak{s}}{\mathfrak{S}^2} = \frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\frac{\partial f}{\partial r}\ldots \qquad 6.$$

Denn multipliziert man die Gleichungen 6 beiderseits mit $\mathfrak{u}$, bezw. $\mathfrak{r}$, bezw. $\mathfrak{s}\ldots$ und addiert sie dann, so folgt, da $\mathfrak{f} = \mathfrak{u}\frac{\partial f}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \mathfrak{s}\frac{\partial f}{\partial s}$ definiert wurde (S. 25),

$$\sum\left(\frac{\mathfrak{u}^2}{\mathfrak{U}^2} + \frac{\mathfrak{r}^2}{\mathfrak{R}^2} + \frac{\mathfrak{s}^2}{\mathfrak{S}^2} + \cdots\right) = \sum\frac{\mathfrak{f}}{\mathfrak{F}^2}\left(\mathfrak{u}\frac{\partial f}{\partial u} + \mathfrak{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \mathfrak{s}\frac{\partial f}{\partial s} + \cdots\right) = \sum\frac{\mathfrak{f}^2}{\mathfrak{F}^2}.$$

Der Ausdruck rechts ist aber die Größe, welche laut Bedingung 4 bei der Bestimmung der Konstanten zum Minimum gemacht wurde.

Im vorigen wird angenommen, daß jeder Beobachtungssatz für sich in den Gleichungen auftritt. Über allgemeinere Fälle vgl. Helmert, Ausgleichsrechnung § 26 II S. 215, 216 (1872).

Neuere Literatur s. bei Keesom, Comm. Phys. Lab. Leiden, und Versl. Amsterd. Akad. (Natuurk.) 31 Mai 1902 p. 14—18.

4. Korrektionen und Korrektionsrechnungen.

Die gesuchten Resultate gehen selten glatt aus den Beobachtungen hervor; die Übung im Anbringen der Korrektionen ist eine der wesentlichsten Bedingungen des genauen und trotzdem bequemen physikalischen Arbeitens. Mit steigendem Anspruch auf Genauigkeit wächst sowohl die Anzahl der zu berücksichtigenden Nebeneinflüsse, wie die Schwierigkeit, sie zu eliminieren, so daß hierin oft der größere Teil der Arbeit besteht.

Zu den Ursachen der Korrektionen gehören erstens Instrumentalfehler, wie die Ungleicharmigkeit der Wage, Abweichungen von genauer Proportionalität zwischen Ursachen und Wirkungen, z. B. bei Ausschlagswinkeln, die Abweichungen von genähert geltenden Gesetzen, wie bei magnetischen Fernwirkungen

u. dgl. Ferner die Nebeneinflüsse, besonders die von der Atmosphäre herrührenden, wie der Auftrieb der Körper in der Luft, die Wirkungen der Luftfeuchtigkeit, die Barometerschwankungen, vor allem aber die Einflüsse der Temperatur, welche sich auf fast sämtliche Eigenschaften der Körper erstrecken.

Nimmt man auf diese Umstände keine Rücksicht, so wird das entsprechende Rohprodukt der Arbeit meistens viel fehlerhafter ausfallen, als der Beobachter denkt. Eine Einschränkung ist andrerseits auch unvermeidlich, denn sonst kann eine einzige Messung, z. B. von einer Pendellänge, einem elektrischen Leitvermögen, ja von einer Masse zu einer umfangreichen Arbeit werden.

Es ist nötig, sich von vornherein über den Betrag der Korrektionen zu orientieren, und sodann, sie auf möglichst einfache Weise in die Rechnung aufzunehmen. Wie weit man die Korrektionen berücksichtigen kann, hängt von äußeren Umständen und von der Grenze ab, welche auch hier durch die Fehler der Beobachtung sowie durch die unvollkommene Kenntnis der Naturgesetze und der in diesen vorkommenden Zahlenwerte gesteckt ist. Andrerseits aber ist es oft überflüssig, die Genauigkeit der Korrektion bis zu dieser Grenze zu führen; es genügt vielmehr offenbar immer, so weit zu gehen, daß der vernachlässigte Teil der Korrektionen erheblich kleiner wird als der mögliche Einfluß der Beobachtungsfehler auf das Resultat. Hieraus ergeben sich ähnliche Kürzungsregeln, wie früher für die Fehlerrechnung.

Eine der einfachsten physikalischen Messungen ist z. B. die Massenbestimmung durch Wägung. Hier bestehen zunächst die eigentlichen Beobachtungsfehler, welche aus der Unvollkommenheit unserer Gesichtswahrnehmung und des Urteils über dieselbe, sowie aus einigen nicht zu berechnenden Mängeln der Wage, wie Reibung, Veränderlichkeit der Hebelarme usw., zusammengesetzt sind. Auch die fehlerfreie Herstellung oder Prüfung eines Gewichtsatzes ist unmöglich. Indessen werden keineswegs besonders ausgezeichnete Instrumente oder feine Beobachtungen vorausgesetzt, damit andere ebenfalls unvermeidliche, aber ihrer Größe nach bestimmbare und daher zu eliminierende Fehler merklich werden, welche, wo Genauigkeit beansprucht wird, be-

rücksichtigt werden müssen. Hierher gehört erstens die Ungleicharmigkeit der Wage, welche bei größeren Gewichten in der Regel einen merklichen Einfluß hat. Sie wird nach 13 eliminiert.

Zweitens erleiden die Körper einen Gewichtsverlust durch die verdrängte Luft, welcher schon bei einer Krämerwage, die bei 1 kg Belastung noch 1 gr anzeigt, größer werden kann als der Wägungsfehler. Um die Wägung auf den leeren Raum zu reduzieren, muß man die Dichtigkeit der Luft kennen, eine innerhalb gewisser Grenzen veränderliche Größe. Aber obwohl die vollständige Vernachlässigung der Korrektion nur bei einer sehr rohen Wägung gestattet ist, so läßt sich leicht überschlagen, daß für gewöhnliche Ansprüche auch bei wissenschaftlichen Untersuchungen die Veränderungen der Dichtigkeit der Luft nicht berücksichtigt zu werden brauchen; man darf der Korrektion einen mittleren Wert zugrunde legen. Indem man sich entsprechend auch auf eine genäherte Ausrechnung der Korrektion beschränkt oder eine Tabelle benutzt, wird die erhebliche Verbesserung des Resultates sehr einfach.

Etwas mühsamer wird die Arbeit, wenn die mittlere Luftdichtigkeit nicht genügt; dann muß noch die Temperatur und der Druck der Luft beobachtet werden. Dieser wird aber nicht aus der bloßen Ablesung am Barometer erhalten, sondern, da Quecksilber und Maßstab sich mit ihrer Temperatur ausdehnen, so ist auch diese zu berücksichtigen. Auch die Veränderlichkeit der Schwere an der Erdoberfläche hat einen Einfluß. Endlich hängt die Dichtigkeit der Luft von ihrer Feuchtigkeit ab, die also bei feinen Wägungen auch bestimmt und in Rechnung gesetzt werden muß.

Wollte man alle diese Beobachtungen und Rechnungen mit vollkommener Schärfe durchführen, so würden sie eine große Mühe verursachen. Allein nachdem man sich über das verlangte oder erreichbare Maß der Genauigkeit und über den Einfluß der Korrektionen orientiert hat, findet man, inwieweit eine Annäherung erlaubt ist, und wird dann auch eine genaue Messung bei einiger Übung mit geringer Mühe durchführen.

In ähnlicher Weise treten Korrektionen in die meisten Aufgaben ein, insbesondere durch die wechselnde Temperatur.

Eine gleichmäßige Änderung der Temperatur läßt sich übrigens häufig dadurch eliminieren, daß man die Beobachtungen in umgekehrter Reihenfolge wiederholt und die Mittel nimmt.

Zur Rechnung wird man oft die Näherungsformeln auf S. 9 gebrauchen.

Beispiele. 1. Eine der gebräuchlichsten Kürzungen ist das Darstellen des kubischen Ausdehnungskoeffizienten durch den linearen β als 3β. Streng entspricht einer Änderung der Lineardimensionen im Verhältnis $1+\beta t$ das Volumenverhältnis $(1+\beta t)^3 = 1 + 3\beta t + 3\beta^2 t^2 + \beta^3 t^3$. Aber für fast alle festen Körper ist $\beta < 0{,}00003$, so daß für $t = 100^0$ der vernachlässigte Teil $3\beta^2 t^2$ nur $< 0{,}000027$ oder $1/_{37000}$ des Ganzen ist. Nur wenn so kleine Größen in Betracht kommen, dürfte man die abgekürzte Rechnung nicht anwenden. Dann aber kommt zugleich in Betracht, daß der Ausdehnungskoeffizient selbst sich mit der Temperatur ändert. Ganz ohne merklichen Einfluß wird $\beta^3 t^3$.

2. In 37 wird bei der Reduktion des Barometers auf 0° die Ausdehnung des Quecksilbers als Korrektionsgröße behandelt, indem $l/(1+0{,}00018\,t) = l - 0{,}00018\,lt$ (Formel 4, S. 9) gesetzt wird. Dabei vernachlässigt man höhere Potenzen von $0{,}00018\,t$. Man sieht aber, daß selbst für $t = 30^0$ schon die nächste Potenz nur 0,00003 beträgt, also mit $l = 760$ mm multipliziert nur etwa $1/_{44}$ mm, eine hier fast immer zu vernachlässigende Größe liefert.

Unerlaubt dagegen ist es meistens, die 20mal größere Ausdehnung der Gase ebenso zu behandeln.

3. Wird das Gewicht eines Körpers durch Doppelwägung (12) bestimmt, und hat man auf der einen Seite das Gewicht p_1, auf der anderen p_2 gefunden, so ist streng genommen $p = \sqrt{(p_1 p_2)}$ das wirkliche Gewicht. Anstatt dieses geometrischen Mittels kann aber das arithmetische $\frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ gesetzt werden (Formel 9, S. 9). Denn setzt man $p_1 = p + \delta$, $p_2 = p - \delta$, wo eben $p = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)$ ist, so wird (Formel 3)

$$\sqrt{p_1 p_2} = \sqrt{p^2 - \delta^2} = p\sqrt{1 - \frac{\delta^2}{p^2}} = p\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{p^2}\right).$$

Nun müßte eine Wage sehr schlecht justiert sein, wenn δ/p den Wert 1/1000 erreichte. In diesem Falle wäre $\frac{1}{2}\delta^2/p^2 = \frac{1}{2}$ Milliontel, eine Größe, welche im Verhältnis zu 1 jedenfalls nicht in Betracht kommt, wenn man mit einer solchen Wage wägt.

Über die Anwendung graphischer Methoden auf Korrektionen s. z. B. Mehmke, Wied. Ann. 41, 892. 1890; Maurer, Archiv d. Deut. Seewarte 1894 Nr. 6.

5. Interpolation.

Oft soll eine Größe y, die von einer anderen x abhängt, für einen ganz bestimmten Wert von x ermittelt werden,

während nur zusammengehörige Werte in der Nachbarschaft bekannt sind.

Ähnlich besteht die Aufgabe einer Beobachtung häufig darin, daß man festzustellen hat, durch welche Verhältnisse eine bestimmte Einstellung des Beobachtungsobjektes bedingt wird. Es ist jedoch oft mühsam oder sogar unmöglich, die Verhältnisse ganz genau bis zur Erfüllung dieser Forderung einzurichten. So ist es meistens mit Schwierigkeiten verknüpft, die Temperatur eines Körpers auf einem vorbestimmten Grade, bei welchem etwa sein Volumen, seine Elastizität, sein elektrisches Leitungsvermögen bekannt sein sollen, genau zu erhalten; bei einer Wägung die Gewichtstücke gerade so abzupassen, daß der Zeiger auf Null steht, kostet, wenn es überhaupt möglich ist, Zeit. Ähnliches gilt, wenn galvanische Leitungen so abgeglichen werden sollen, daß eine Galvanometernadel einen bestimmten Teilstrich anzeigt. In solchen sehr häufigen Fällen kann man oft aus Beobachtungen in der Nachbarschaft die genauen gesuchten Verhältnisse interpolieren und dadurch Vorteile in der Einfachheit der Hilfsmittel, in dem Zeitaufwand und dazu noch in der Genauigkeit erzielen.

Es sei x_0 der Punkt, für den die Größe y_0 gesucht wird, und man kenne die Nachbarwerte y_1 für x_1 und y_2 für x_2, wobei x_1 und x_2 womöglich auf verschiedenen Seiten von x_0 genommen werden.

Liegen die Einstellungen so nahe beieinander und bei x_0, daß innerhalb dieser Grenzen die Änderung von y derjenigen von x proportional ist, so gilt

$$(y_0 - y_1) : (x_0 - x_1) = (y_2 - y_1) : (x_2 - x_1),$$

woraus

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Beispiele siehe unter anderem in 10 und 90.

Ändern y und x sich nicht einander proportional, so werden zur Interpolation, wenn nicht etwa das Gesetz des Wachstums bekannt ist, mindestens drei benachbarte Beobachtungen verlangt. Für die Rechnung sind Formeln z. B. von Lagrange und Gauß gegeben.

Vgl. Weinstein, Physik. Maßbest. § 291.

Meist wird im letzteren Falle die graphische Interpolation (6) angewandt.

6. Graphische Darstellung von Beobachtungen.

Eine Größe y sei zu mehreren Werten einer anderen Größe x, von der sie abhängt, beobachtet worden, etwa die Empfindlichkeit einer Wage zu verschiedenen Belastungen, die Skalenteile eines Spektralapparats zu bekannten Lichtwellenlängen, das spezifische Gewicht oder eine andere Eigenschaft einer Lösung zu mehreren Konzentrationen derselben, oder Volumina, elektromotorische Kräfte, Löslichkeiten, Leitvermögen u. dgl. zu verschiedenen Temperaturen. In jedem Falle erlangt man dann am raschesten eine Übersicht über den gegenseitigen Zusammenhang der Größen, auch über ihren regelmäßigen Verlauf, wenn man sie geometrisch darstellt, indem man in Koordinatenpapier x als Abszisse und y als Ordinate einträgt. Wenn, wie es häufig vorkommt, ein einfaches mathematisches Gesetz für die Abhängigkeit der einen Größe von der anderen nicht bekannt ist, so gewährt diese graphische Darstellung, indem die eingetragenen Punkte durch eine Kurve verbunden werden, die einzige Übersicht über ihren Zusammenhang.

Graphische Ausgleichung von Fehlern. Diese geometrische Darstellung gemessener Werte kann, wie leicht zu sehen, zur Kontrolle bez. zur Verbesserung von Beobachtungen dienen. Denn Beobachtungsfehler machen sich in Unregelmäßigkeiten der Zeichnung geltend, man kann aber häufig den richtigen Verlauf trotz den Unregelmäßigkeiten erkennen und eine ausgleichende Kurve durchziehen. Vorsichtig aber muß dies Verfahren gehandhabt werden; es verleitet leicht zu Irrtümern, besonders an den Enden der Kurven.

7. Über die Genauigkeit von Messungen. Zahlenrechnen.

Die vornehmste Regel bei einer Messung ist, daß die Genauigkeit des Resultates den Grundlagen und dem Zweck nach richtig beurteilt wird. Eine Überschätzung liegt einerseits vor, wenn man sich oder andere durch eine übertriebene Anzahl von Ziffern über die Genauigkeit täuscht. Derselbe Fehler liegt aber öfter noch in der Form vor, daß man sich durch eine von vornherein begangene Überschätzung des Endergebnisses dazu verführen läßt, einzelne Teile der Arbeit mit

zweckloser Sorgfalt auszuführen oder Korrektionen mit unnötiger Genauigkeit zu behandeln. Eine Dichtigkeitsbestimmung mit direkter Volumausmessung von $\frac{1}{10}$ cm³ Unsicherheit oder die Herstellung einer Lösung von einem Salze, dessen Masse wegen Hygroskopie auf 1% unbekannt bleibt, läßt sich nicht wesentlich dadurch verbessern, daß man auf 1 mg genau wägt. Wird das Leitvermögen eines Elektrolytes gemessen, dessen Temperatur auf $\pm\frac{1}{2}°$ bekannt ist, so folgt aus letzterem Umstande allein etwa 1% Unsicherheit, die sich auch nicht dadurch vermindern läßt, daß man das Leitvermögen selbst besonders genau bestimmt.

Überhaupt wird bei Messungen nicht selten eine unnötige Genauigkeit angestrebt und Mühe dadurch verschwendet. Dies ist u. a. bei solchen Objekten zu beachten, die an sich nicht scharf definiert sind. Dazu gehören z. B. die Eigenschaften vieler fester Substanzen, ganz besonders organischer Von diesen lassen sich ihre Dichte, Elastizität, Festigkeit, elektrische und thermische Eigenschaften, z. B. die verschiedenen Leitvermögen, als Eigenschaften der Substanz durchaus nicht genau bestimmen, weil sie eben nicht in bestimmter Größe vorhanden sind, sondern von nicht genau definierbaren Eigenschaften, etwa vom hygroskopischen Zustande, abhängen, und weil sie meistens sogar innerhalb des untersuchten Stückes schwanken. Das spezifische Gewicht einer Holzart auf $\frac{1}{10000}$ anzugeben hat überhaupt keinen Sinn

Zu den gewöhnlichsten Formen der Unterschätzung einer Genauigkeit des Resultates andrerseits gehört das Übersehen oder ungenügende Behandeln von Nebenumständen während der Messung. Vor allem gilt dies von der Temperatur; diese, man darf beinahe sagen unter allen Umständen, zu beachten, ist eine Vorsicht, die der Beobachter sich nicht früh genug angewöhnen kann und die besonders dann am Platze ist, wenn man den Temperatureinfluß auf einen Vorgang noch nicht kennt.

Kritik nach beiden Seiten bildet die Vorbedingung zweckentsprechenden Arbeitens.

Zahlenrechnen.

Das nämliche gilt von einer kritischen Behandlung der Zahl. Die numerische Berechnung der Resultate läßt sich nur mit einer beschränkten Anzahl von Ziffern ausführen, was bei den meisten Rechenoperationen die vollständige Genauigkeit unmöglich macht. Meistens würde die letztere auch zwecklos sein.

Im allgemeinen halte man die Regel fest, das Resultat in so vielen Ziffern mitzuteilen, daß die letzte wegen der Beobachtungsfehler keinen Anspruch auf Genauigkeit machen, daß die vorletzte aber noch für ziemlich richtig gelten kann. Im zweifelhaften Falle soll eher eine Stelle zu viel als eine zu wenig genommen werden.

Der Rechnung nach sollen alle mitgeteilten Ziffern richtig sein. Hieraus folgt, daß wenigstens eine längere, beispielsweise logarithmische Rechnung, welche durch das Vernachlässigen der späteren Ziffern die letzte Stelle nach und nach um einige Einheiten fälschen kann, mit einer Stelle mehr geführt

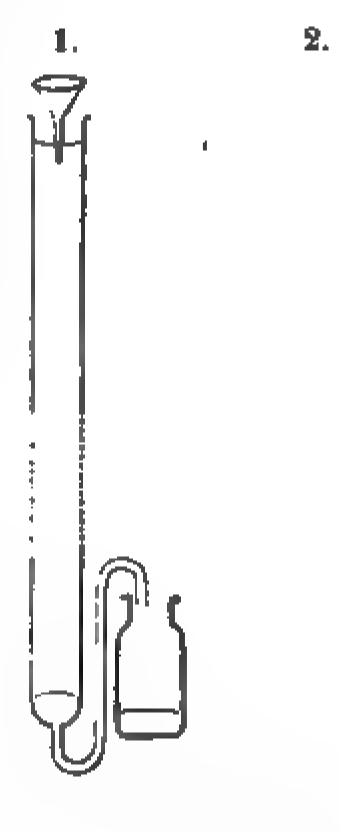
werden muß, als man im Resultat mitteilen will. Angehängte oder einen Dezimalbruch beginnende Nullen bleiben bei der Ziffernzahl außer Betracht. Bei dem Abstoßen der letzten Rechnungsziffer wird, wenn sie mehr als 5 beträgt, die vorletzte Ziffer bekanntlich um eins erhöht.

Ein übertrieben genaues Rechnen gehört zu den gewöhnlichsten Fehlern. Es wird z. B. das Volumen v eines rechteckigen Körpers durch Ausmessen der drei Dimensionen bestimmt. Die letzteren seien etwa gleich 10,5 15,7 30,9 mm gefunden. Das genaue rechnerische Resultat $v = 5093,865$ cmm mitzuteilen würde kritiklos sein. Denn ein Fehler bei dem Ausmessen um je $1/_{20}$ mm kann das Resultat bis zu 50 cmm zu groß oder zu klein gemacht haben. Es genügt also $v = 5090$ oder äußerstenfalls 5094 zu berechnen, also abgekürzt zu multiplizieren oder mit 4stelligen Logarithmen zu rechnen. Auf etwa 1 Promille genau kann auch ein gewöhnlicher Rechenschieber arbeiten. Umgekehrt findet man oft Divisionen auf zu wenige Stellen ausgeführt, vielleicht ein spezifisches Gewicht mittels Wägungen auf Zehntel mg mit einer feinen Wage bestimmt und schließlich $= 2,5$ berechnet, während vielleicht die 4te Dezimale noch richtig sein könnte.

Für genauere nicht logarithmische Rechnungen sind außer der Rechenmaschine u. a. die Crelle'schen Rechentafeln geeignet.

8. Technisches.

1. Reines Quecksilber. Das in eisernen Flaschen aus Idria bezogene Quecksilber genügt nach Filtrieren für die meisten Zwecke.



Getrocknet wird Quecksilber oberflächlich mit Fließpapier, vollkommener durch Erwärmen in einer reinen eisernen oder Porzellan-Schale auf etwa 150° unter Umrühren Staub entfernt man mittels Filtrierens, am einfachsten durch ein gewöhnliches, bei größerem Druck mehrfach genommenes Filter mit einem oder einigen feinen Löchern an der Spitze Fett wird durch Ausschütteln mit etwas Kali- oder Natronlauge oder Benzol und Alkohol und wiederholtes Nachschütteln mit Wasser beseitigt. Fremde unedle Metalle und Oxyd zieht man durch Schütteln des Quecksilbers mit verdünnter Salpetersäure oder Lösungen von Eisenchlorid oder doppeltchromsaurem Kali aus, natürlich unter wiederholtem gründlichen Nachschütteln mit Wasser. Oder man läßt das Quecksilber aus einem mit mehreren ganz feinen Öffnungen versehenen, z. B. durch ein Stückchen Bambusrohr geschlossenen Trichter durch 1 bis $1\frac{1}{2}$ m hohe Säulen der genannten Flüssigkeiten und schließlich durch Wasser laufen.

Ein aufgebogener unterer Fortsatz des Rohres (Fig. 1) fängt das Quecksilber auf, welches durch seinen Druck die Flüssigkeitssäule hält und im Überschuß abfließt.

Schwer flüchtige Metalle entfernt man durch Abdestillieren des Quecksilbers, am besten im Vakuum, d. h. in barometerähnlichen Vorrichtungen (Fig. 2). Durch den fettfreien (s. Nr. 25) Hahn *h* hindurch wird das Quecksilber aus dem Vorrat in *g* mit der Luftpumpe gehoben; die Öffnung von *r* läßt man dabei in Quecksilber tauchen. Ist das Kühlrohr *r* hinreichend eng, so gelingt es, durch Heben des Gefäßes *g* Gase, welche über dem Quecksilber geblieben oder während der Destillation ausgeschieden sind, mit dem überfließenden Quecksilber auszutreiben, falls sie nicht von selbst mit dem Quecksilber in *r* abwärts wandern. Die Wärme des kleinen Rundbrenners *b* wird durch den Mantel *m* zusammengehalten. S. z. B. Weinhold, Carl's Rep. 9, 69 1873; 23, 791. 1887; Leonh. Weber ib. 15, 1. 1879; besonders auch Dunstan u. Dymond, bei denen die Luftpumpe wegfällt, Phil. Mag. 29, 367. 1890.

Flüchtigere Metalle werden am sichersten durch Elektrolyse beseitigt. Das Quecksilber kommt auf den Boden eines breiten Gefäßes als Anode in eine Lösung von Merkuronitrat; in derselben Lösung steht ein kleineres Gefäß mit einer Platinkathode. Durch einen elektrischen Strom (etwa 0,01 A/cm²) wird die Anode gelöst und das Quecksilber unter Zurücklassung der oxydierbareren Metalle an der Kathode niedergeschlagen. Jaeger, ZS f. Instr. 1892, 354.

2. **Reines Wasser.** Zu Kühlröhren beim Destillieren pflegt man Silber, Zinn oder Glas zu verwenden. Glas gibt anfangs Bestandteile an das Wasser ab, was aber bei guten Gläsern mit der Zeit aufhört. Sehr hartnäckig kann ein stattgefundenes Überspritzen durch die eingetrockneten festen Verunreinigungen stören. Das Stoßen beim Sieden in Glasgefäßen wird durch eingeworfene Metallstückchen (Platin) vermindert.

Das zuerst übergegangene Wasser ist häufig wegen der mitgerissenen flüchtigen Verunreinigungen schlechter als der Vorrat.

Unvermeidlich ist die Verunreinigung des Destillates durch die atmosphärische Kohlensäure, besonders wenn dieselbe durch Flammen oder Atmung vermehrt ist. In diesem Falle kann das Wasser schon durch Schütteln oder besser durch einen Luftstrom verbessert werden, der mittels der Wasserluftpumpe in einer Waschflasche aus einer engen Rohröffnung in kleinen Blasen durchgesaugt wird. Gründlicher reinigt ein Luftstrom, dem durch Überleiten über Ätzkali oder Natronkalk oder in einer Waschflasche mit verdünnter Alkalilösung die Kohlensäure entzogen worden ist. Langsamer wirkt das Anstreichen des äußeren Flaschenhalses mit gutem gelöschten Kalk und Überstülpen eines Glases, welches die Kommunikation der Luft über dem Wasser mit dem Kalk gestattet.

Verunreinigungen des Wassers lassen sich auch durch Ausfrieren beseitigen, indem man den nicht gefrorenen Teil weggießt (Nernst).

Geschmolzenes oberflächlich vorher gereinigtes Natureis kann schon ein gutes Wasser liefern.

Bei der Aufbewahrung in Glas löst das Wasser je nach der Glassorte rascher oder langsamer, mehr oder weniger Bestandteile, besonders Alkali, aus den Wänden. Vorzüglich ist Jenaer Glas 59. Vgl Nr. 4.

Das feinste Prüfungsmittel auf die Anwesenheit unorganischer gelöster Stoffe im Wasser ist sein elektrisches Leitvermögen. Gutes Wasser hat nicht mehr als 10^{-6}; durch Entziehung der Kohlensäure (vgl. oben) kann das Leitvermögen auf etwa $5 \cdot 10^{-7}$ kommen Doch steigt es dann an der Luft wieder an (**96**).

8. Bereitung von Gasen. Man erhält: Wasserstoff aus reinem Zink mit verdünnter Schwefelsäure oder Salzsäure. — Sauerstoff durch Erhitzen von chlorsaurem Kali, ev. gemischt mit Braunstein, wobei man beigemischtes Chlor durch Ätzkali absorbieren läßt. Rein wird der Sauerstoff aus Kaliumpermanganat oder in kleineren Mengen aus Quecksilberoxyd dargestellt. Beide Gase können auch elektrolytisch bereitet werden. — Reinen Stickstoff gibt das Erhitzen einer Lösung von NH_4Cl und KNO_2 auf dem Wasserbade; Stickstoff mit den atmosphärischen Beimengungen wird erhalten, wenn Luft durch eine Waschflasche mit konzentrierter Ammoniaklösung, dann über glühende Kupferspäne geschickt und getrocknet wird. — Kohlensäure aus reinem Marmor mit Salzsäure. — Kohlenoxyd durch Erhitzen einer Mischung von 1 T. Natriumformiat, 6 T. Schwefelsäure und 3 T. Wasser — Ammoniak aus konzentrierter wässeriger Lösung, die, bei etwa 30° siedend, fast nur Ammoniak abgibt. — Schweflige Säure durch Erhitzen konzentrierter Schwefelsäure mit Kupferspänen. — Chlor aus Braunstein und Salzsäure.

Verunreinigungen werden durch vorgelegte Absorptionsmittel entfernt entweder in Waschflaschen, wobei das Gas in kleinen Blasen nicht zu rasch durchtreten soll, oder auch vorteilhaft in fester Gestalt. Dazu dienen u. a.: Wasser gegen mitgerissene Salze, Spuren von Säuren oder Alkalien; gegen Säuren sicherer alkalische Lösungen (doppeltkohlensaures Natron, wenn Kohlensäure gewaschen wird); gegen flüchtiges Alkali Schwefelsäure- oder Phosphorsäurelösung; gegen Sauerstoff alkalische Pyrogallollösung (Rezept von Hempel: 5 gr Pyr. in 15 gr Wasser, kurz vor dem Gebrauch gemischt mit 120 gr Ätzkali in 80 gr Wasser gelöst) oder glühende Kupferspäne; gegen organische Verunreinigungen, z B. Kohlenwasserstoffe, übermangansaures Kali. Auch Überleiten durch Glasröhren z. B. mit zerkleinertem Ätzkali oder Bimstein mit Schwefelsäure wird gebraucht. Wasserstoff kann auch so gereinigt werden, daß man ihn, nach dem Waschen mit einer alkalisch gemachten Lösung von $KMnO_4$, welche Säuren, auch Arsen zurückhält und Kohlenwasserstoffe zerstört, getrocknet über ausgeglühten Palladiumschwamm leitet, ev ihn von diesem absorbieren läßt und durch Erhitzen unter Luftabschluß später wieder frei macht.

Zum Austrocknen führt man Gase über Stücke von geschmolzenem Chlorcalcium, oder Bimstein mit konzentrierter Schwefelsäure, oder durch eine Waschflasche mit letzterer, am sichersten über wasserfreie Phosphorsäure in einem langen Rohr.

Käuflich sind Bomben mit Gasen zu beziehen z. B. von den Firmen: Akt.-G. f. Kohlensäureindustrie, Berlin (CO_2); Kunheim & Co., Berlin (CO_2, NH_3); Gesellsch. f. flüssige Gase, Pictet & Co., Berlin (O, H, N, CO_2, NH_3, SO_2, Cl); Sauerstofffabrik, Berlin (O, H, N, N_2O, Cl); Romenhöller, Berlin (O, H, CO_2); Verein chemischer Fabriken, Mannheim (NH_3); Sauerstofffabrik Luzern (O, H).

4. **Glassorten.** Die Löslichkeit der Glassorten im Wasser und ihre damit zusammenhängenden hygroskopischen Eigenschaften sind von sehr ungleicher Größe. 1 qdm gibt bei den besten Gläsern in gewöhnlicher Temperatur täglich etwa 0,002, bei schlechten bis zu 0,2 mg Substanz in Lösung. Temperatursteigerung beschleunigt den Angriff ungeheuer stark. Haltbar ist gutes Jenaer Geräteglas und besonders Nr 59. Eine Schätzung der Güte eines Gefäßes ergibt sich am einfachsten aus der Haltbarkeit der Wasserfüllung selbst mittels des elektrischen Leitvermögens (96). Rascher gewinnt man ein Urteil, wenn man das Glas im Stahlmörser und der Achat-Reibschale unter Vermeidung von Verunreinigungen fein pulverisiert und einen Wasseraufguß auf sein Leitvermögen oder durch Eindampfen auf blankem Platin auf seinen Gehalt an fester Substanz prüft. Auch die hygroskopische Wasseranziehung liefert, bei Pulvern aus der Gewichtszunahme, bei größeren Flächen nach der elektrischen Isolierung in feuchter Luft beurteilt, eine Prüfung der Güte. Oder man bringt die Glasfläche in mit Wasser gesättigten Äther, der mit etwa $^1/_{10}$ % Eosin gefärbt ist. Je löslicher das Glas, desto intensiver färbt es sich im allgemeinen (Mylius). In einer Salzsäure-Atmosphäre bekommen schlechte Gläser eine stärkere Trübung als gute (R. Weber).

Gute und mittlere Gläser werden durch den Gebrauch, insbesondere auch durch Behandeln mit warmem Wasser, mit der Zeit besser.

S. u. a. die Abhandlungen von Warburg u. Ihmori, Mylius u. Förster, R. Weber, E. Pfeiffer, Schott, F. Kohlrausch in Wied. Ann., Ber. d. Deutsch. Chem. Ges., ZS f. Instr., ZS f. Analyt. Chem., ZS d. Vereins z. Beförd. d. Gewerbefleißes. Eine Literaturzusammenstellung z. B. bei Kohlrausch, Wied. Ann 44, 577. 1891.

5. **Physikalische Eigenschaften verschiedener Gläser.** Von einheitlicher Beschaffenheit moderner Glassorten kann bei deren sehr verschiedener Zusammensetzung nicht mehr die Rede sein, selbst wenn man von den spezifisch optischen Gläsern absieht. Die folgenden Zahlen bedeuten die Grenzen der Eigenschaften von Gläsern für gewöhnliche Zwecke; in Klammern sind extreme Werte angegeben.

Dichtigkeit	$s =$	2,4	(2,3)	bis	2,6	(5,9)
Kub Temp.-Ausd.-Koeff.	$\alpha =$ 0,0000	18	(11)	„	31	(34)
Spezif. Wärme	$c =$ 0,	18	(08)	„	21	(23)

Wärmeleitvermögen	$k = 0{,}00$	18 (11)	bis 20 (22)		
Elast.-Modul	$E = 100 \times$	59 (47)	„ 75 (79) kg/mm²		
Lichtbrechungsverhältnis	$n =$	1,51 (1,50)	„ 1,58 (1,75)		
Jenaer Thermometerglas XVI	$s = 2{,}58$	$\alpha = 0{,}0_4 284$	$c = 0{,}19$	$n = 1{,}527$	
„ „ 59	$s = 2{,}37$	$\alpha = 0{,}0_4 174$	$c = 0{,}19$	$n = 1{,}497$	

Aus der bekannten Zusammensetzung des Glases kann man die Eigenschaften genähert nach dem Ausdruck

$$C_1 m_1 + C_2 m_2 + C_3 m_3 \ldots$$

berechnen, wenn 1 Gew.-Teil Glas $m_1, m_2 \ldots$ Teile der einzelnen Stoffe enthält und wenn jede Substanz die Konstante C der folgenden Tabelle bekommt:

		SiO_2	B_2O_3	K_2O	Na_2O	CaO	BaO	ZnO	PbO	Al_2O_3
für α	0,000	008	001	085	100	050	030	018	030	050
für c	$0,_1$	191	237	186	267	190	067	125	051	207
für E	$100 \times$	65	20	71	100	100	100	15	47	160

für das spezif. Volumen oder die reziproke Dichtigkeit:

$1/s$	$0,_1$	435	526	357	385	303	143	169	104	244.

Winkelmann u. Schott, Wied. Ann. 49, 401. 1893; 51, 697, 730. 1894; Winkelmann, 61, 105. 1897; s. auch Hovestadt, Jenaer Glas etc., Jena 1900.

Ein gutes Thüringer Glas wird durchschnittlich etwa 0,70 SiO_2, 0,06 K_2O, 0,12 Na_2O, 0,10 CaO, 0,02 Al_2O_3 haben

6. **Glas versilbern.** Dies geschieht durch Mischen zweier Lösungen A und B. Nach **Böttger**: A) Man löst 5 gr Silbernitrat in destilliertem Wasser, versetzt mit Ammoniak, bis der Niederschlag beim Umrühren fast vollständig verschwindet, filtriert und verdünnt auf 500 ccm. B) 1 gr Silbernitrat, in etwas Wasser gelöst, wird in $\frac{1}{2}$ l siedendes Wasser eingegossen. Dazu setzt man 0,83 gr Seignettesalz, läßt kurze Zeit sieden, bis der entstandene Niederschlag grau aussieht, und filtriert heiß. Die Lösungen halten sich im Dunkeln einige Monate. – Statt dessen wird als schneller wirkende Lösung B mehr empfohlen (Lumière) eine 1prozentige Lösung von Formaldehyd; 40 % Lösung ist käuflich.

Andere Rezepte, mit Anwendung von Zucker- und (kohlensäurefreier!) Alkalilösung z. B.: Martin, Pogg. Ann. 120, 335. 1863; Lohse, Jahrbuch für Photographie, 1887; Jzarn, C. R. 135, 240. 1902.

Die gut (mit Salpetersäure, Ätzkali, Alkohol) gereinigte Glasfläche wird einige mm hoch mit einer soeben hergestellten Mischung aus gleichen Raumteilen der Lösungen A und B (von der Formaldehydlösung nur die Hälfte) bedeckt oder noch besser nach unten gerichtet in dieses Gemisch eingesenkt. Nach einer Stunde (5 bis 10 Min. bei der Formaldehydlösung) ist die Reduktion beendigt, die Platte wird abgespült, die Operation erneuert usf., bis die genügende Dicke der Silberschicht erreicht ist. Nach dem Trocknen kann man mit dem Ballen der Hand vorsichtig polieren, falls das Silber als Außenspiegel dienen soll. Andernfalls kann man das Ausfallen des Silbers auch dadurch beschleunigen, daß man die

Böttger'sche Lösung B vor der Mischung auf etwa 70° erwärmt. Zum Schutz kann dann das Silber mit einem Lack überzogen werden; dünne Spiegel verziehen sich allerdings hierdurch leicht.

7. **Glas platinieren.** Nach Kundt: 3 gr Platinchlorid, in 10 ccm abs. Alkohol gelöst, werden mit 30 ccm konzentrierter alkoholischer Lösung von Borsäure versetzt. Hierzu kommt die doppelte Menge einer Mischung von venezianischem Terpentin und Lavendelöl, je nach der beabsichtigten Dickflüssigkeit in verschiedenem Verhältnis. Für optisch brauchbare Spiegel wird ein Tropfen von mäßig dünnflüssiger Lösung aufgebracht und eine zweite Glasplatte aufgelegt, so daß sich zwischen beiden eine dünne Flüssigkeitsschicht bildet. Man zieht die Platten voneinander ab und erwärmt langsam in einem vorn offenen Muffelofen zu ganz schwacher Rotglut.

Um Glas zu löten, bestreicht man es mit dickflüssiger Lösung und erwärmt über der Flamme langsam zur Rotglut Das eingebrannte Platin wird galvanisch verkupfert und kann dann mit Zinn gelötet werden.

Auch versilbertes Glas läßt sich nach Einbrennen des Silbers und Verkupfern löten; der Zusammenhalt ist nicht so fest (Röntgen).

8. **Glas blasen.** Eingehende Anweisung z. B in Ebert, Anleitung zum Glasblasen, Leipzig 1895; auch in Ostwald-Luther, Phys.-ch. Messungen 2. Aufl. S. 102. Im allgemeinen ist folgendes zu beachten. Das Aufblasen oder Ausziehen wird in der Regel nach dem Entfernen aus der Flamme ausgeführt. Das Anwärmen ist auf eine beträchtliche Strecke auszudehnen; die Gefahr des Zerspringens pflegt vorüber zu sein, sobald das Glas die Flamme färbt. — Dünnere Röhren biegt man in der rußenden Flamme (Fischschwanzbrenner); dickere müssen während des Biegens durch Blasen geformt werden. — Zusammengeschmolzene verschiedene Glasstücke sind einige Zeit in der Flamme gut zu „verblasen", so daß keine scharfe Berührungsfläche bleibt, und nachher in der leuchtenden Flamme zu kühlen, bis sie schwarz werden. — Für Arbeiten an dünnen Stücken ist der Bunsenbrenner oft bequemer als die Gebläselampe. — Platin wird durch Vermittlung von „Einschmelzglas" (Bleiglas) eingeschmolzen; Jenaer Thermometerglas XVI verträgt direktes Einschmelzen. Das Kühlen von Stücken mit eingeschmolzenem Platin, für welches die rußende Flamme zu vermeiden ist, kann über dem Cylinder eines Argandbrenners geschehen. — Feine Löcher lassen sich in dünnwandiges Glas mit einer zugespitzten glühend gemachten Lichtkohle drücken.

9. **Glas und Metall zeichnen.** Vorübergehend zeichnet man mit Glastinte, die vor dem Gebrauch aufgeschüttelt wird, oder mit den blauen Fettstiften von Joh. Faber, dauernd mit „Diamanttinte" oder mit dem Schreibdiamant, wobei aber bei Glas ein Schneiden, welches leicht mit der Zeit oder bei Erschütterungen zu Sprüngen führt, vermieden werden muß. Über Glas teilen s. **21**, 6.

10. **Glas schneiden.** Der Schneiddiamant ist auf seine richtige Stellung auszuprobieren und mit geringem Druck gut parallel zu führen.

Weite Glasröhren schneiden sich am besten mit dem Röhrendiamant von innen. Enge Röhren ritzt man mit dem Glasmesser und bricht sie nachher. Mit dem Brechen soll bei Platten wie bei Röhren tunlichst eine auseinanderziehende Kraft verbunden werden. — Sprengkohle soll nicht viel Asche geben. Sie wird stets etwas vor den Sprung, den man fortführen will, gehalten.

11. **Metalle amalgamieren.** Zink wird in Salzsäure, Kupfer und Messing in verdünnter Salpetersäure mit einer metallischen Oberfläche versehen und dann in Quecksilber getaucht oder mit solchem eingerieben. Nachher wäscht man mit Wasser und entfernt ev. überschüssiges Quecksilber. Statt einzureiben kann man in eine etwas saure Lösung von Quecksilber-Chlorid bez. Nitrat eintauchen.

Um Eisen zu amalgamieren, verzinnt man es zuerst in der Hitze.

Platin, ganz frisch gereinigt, amalgamiert sich häufig schon beim Eintauchen in Quecksilber, sonst bringt man es als Kathode in eine Lösung von Quecksilbernitrat oder wendet Natriumamalgam an.

12. **Löten.** Bei dem gewöhnlichen Löten ist besonders die vorgängige Entfernung des Oxyds durch Benetzen mit Lötwasser etc. und Erhitzen, sowie das Ruhighalten während des Erstarrens zu beachten. Dünne Körper verzinnt man durch Eintauchen in einen Fingerhut mit geschmolzenem Zinn. Das Lötwasser nachher abspülen! Salmiakpulver, Stearin oder Kolophonium können einigermaßen das Lötwasser ersetzen. Die Schneide eines Lötkolbens wird heiß auf einem Stück Salmiak gerieben.

Mit Gold löten. Ein Stückchen Goldblatt oder Golddraht wird mit etwas Boraxpulver zwischen den zu verlötenden Flächen in der Stichflamme zum Schmelzen gebracht.

13. **Platin schweißen.** Die zu verbindenden Stückchen werden in Berührung miteinander (zwei Drahtenden etwa einmal umeinander gewickelt, oder ein Draht durch ein oder zwei Löcher in einem Blech durchgesteckt) in der Spitze der Gebläseflamme weißglühend gemacht und auf einer dicht darunterstehenden blanken Eisenfläche durch einen oder zwei kurze Schläge mit einem kleinen Hammer vereinigt.

Zusammenschmelzen kann man Platinstückchen in der Stichflamme des Sauerstoffgebläses. Platin läßt sich in der gewöhnlichen Gebläseflamme leicht mit Kupfer oder Silber haltbar zusammenschmelzen.

14. **Stahl härten.** Der zur Kirschrotglut gleichmäßig und rasch erwärmte Stahl wird in Wasser oder Öl abgelöscht; Einreiben mit Seife vermindert das Oxydieren. Gestreckte Stücke sind, damit sie sich nicht verwerfen, longitudinal einzusenken. Um glasharten Stahl anzulassen, kann je nach dem gewünschten Grade siedendes Wasser, heißes Öl oder langsam die Flamme gebraucht werden, in welcher die Anlaßfarbe (gelb bis blau) den Grad des Anlassens gibt. (Vgl. Holborn, ZS f. Instr. 1891, 114.)

15. **Metalle ausglühen.** Dünne Drähte soll man ohne Spannung in oder über eine kleine Flamme halten, ev. auf eine Röhre gewickelt erhitzen. Ein bequemes Mittel ist unter Umständen der elektrische Strom. Oxydierbare Metalle glüht man im bedeckten Gefäß unter einem Strom von Kohlensäure oder Wasserstoff. Platin darf nicht in die rußende Flamme und im Bunsen-Brenner nicht dauernd in den unteren Kegel kommen, der unverbrannten Kohlenstoff enthält!

16. **Magnetisieren. Entmagnetisieren.** Kurze Stäbe hält man zum Magnetisieren zwischen die Pole eines Hufeisenmagnets und hebt sie parallel den Kraftlinien heraus. Längere magnetisiert man durch Streichen oder mittels Einlegens in oder Durchziehens durch eine Stromspule. Plötzliches Unterbrechen des Stromes, während der Stab in der Spule liegt, ist zu vermeiden. Entmagnetisieren kann man kleine Stücke durch Rotation zwischen den Polen eines Magnets oder ruhend zwischen den Polen eines rotierenden Magnets (Zentrifugalmaschine), indem man sie während der Bewegung langsam entfernt. Oder man behandelt die in einer Spule liegenden Stücke mit kräftigen Wechselströmen, welche man durch allmähliches Einschalten eines Flüssigkeitsrheostaten bis auf Null abschwächt.

17. **Schleifen und Polieren.** Das Schneiden des Körpers geschieht mit einem Schmirgeldrahte oder mit der Laubsäge, das Abschleifen auf einem Stein oder einer Glasplatte, bei harten Körpern mit Schmirgel, bei weicheren mit Bimstein, oder bloß auf mattem Glase. Poliert wird mit Englisch Rot, Tripel oder Zinnasche, oder bei ganz weichen Körpern ohne Poliermittel, auf einer mit Leinwand oder Papier stramm bezogenen Glasplatte tunlichst mit gerader Führung des Körpers, deren Richtung man oft wechselt. Als Schleif- oder Polierflüssigkeit dient, wenn Wasser den Körper angreift, Alkohol. Den Finger mag man im letzteren Falle mit Kautschuk bedecken. Englisch Rot oder Tripel wird trocken angewandt. — Kristallen für optische Untersuchung gibt man zuerst eine oberflächliche Politur, um unter dem Polarisationsapparat (70) zu erkennen, ob die Platte richtig orientiert ist. Andernfalls korrigiert man die Flächen, bis die gewünschte Richtung erzielt ist, und poliert nach vollständigem Eben- und Feinschleifen fertig.

Glasschliffe, z. B. Glasstöpsel lassen sich mit feinem Schmirgelpulver, welches mit etwas Wasser zwischen die Flächen gebracht wird, durch gleichmäßiges Drehen unter mäßigem Druck oft verbessern.

18. **Rezepte für Galvanoplastik,** auf 1 Liter Wasser berechnet. Die Stromstärken gelten als Stromdichten auf 1 dm².

Vergolden. $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ A; 10 gr Goldchlorid und 20 gr Cyankalium; oder 1,5 gr Goldchlorid, 1 gr Cyankalium, 15 gr krist. Natriumsulfit, 50 gr krist. Natriumphosphat.

Versilbern. 0,3 bis 0,6 A; 46 gr Kaliumsilbercyanid, 12 gr Cyankalium.

Verkupfern. 0,4 bis 0,5 A; 20 gr krist. Kupferacetat, 20 gr Cyankalium, 17 gr Soda, 25 gr krist. Natriumsulfit.

Vernickeln. ½ bis 1 A; 70 gr krist. Ammoniumnickelsulfat, 25 gr Ammoniumsulfat, 5 gr Zitronensäure.

Verplatinieren (blank) 510 gr Soda, 250 gr Zitronensäure in 1 Liter Wasser gelöst. In die heiße Lösung wird Platinsalmiak eingetragen, der aus 37 gr Platinchlorid gefällt ist. Die Elektrolyse geschieht bei etwa 80°.

Überziehen von Metallen mit Platinschwarz. Man bringt das Metall (Platin oder Silber) in eine verdünnte, mit etwas Salzsäure versetzte Lösung von Platinchlorid als negative Elektrode eines Stromes. Einfacher, aber mit zufälligerem Erfolge, berührt man das Blech unter der Flüssigkeitsoberfläche mit Zink.

Nach Lummer und Kurlbaum wird 1 Teil Platinchlorid in 30 Teilen Wasser (sp. Gew = 1,024) unter Zusatz von 0,008 Teilen Bleiacetat angewandt, wodurch ein guter schwarzer Überzug entsteht. Die Stromdichte soll etwa 0,03 A/cm², betragen; auch ohne Strommessung erkennt man die richtige Stromstärke an einer Gasentwicklung von mäßiger Stärke 5 bis 10 Min. Strom wird ausreichen. Zum Zwecke des Reinigens mag man den Strom vorher entgegengesetzt durchleiten. Vgl. K. u. Holborn, Elektrolyte S 9.

19. **Holz usw. paraffinieren.** Das Holz wird, in Paraffin untergetaucht, mit dem letzteren erheblich über den Siedepunkt des Wassers (etwa auf 140°) so lange erhitzt, bis das Entweichen von Gasblasen aufhört. Alsdann läßt man so langsam erkalten, daß der Luftdruck Zeit hat, die Holzporen mit Paraffin zu füllen. So behandeltes Holz isoliert auch statische Elektrizität. Papier zieht man langsam durch das heiße Paraffin (über 100°! so daß zugleich das Wasser verdampft) und läßt während des Erkaltens den Überschuß abtropfen. — Über Hygroskopie des Holzes s. auch **21.**

20. **Kokon abspulen.** Der Kokon wird etwa 10 Min. in heißes Wasser untergetaucht, damit der Klebstoff sich auflöst, dann entfernt man, den Kokon in der Hand drehend, die oberflächliche lose Seide, an welche der eigentliche Kokonfaden sich anschließt. Man spult den auf erneuertem heißen Wasser schwimmenden Kokon auf ein Röllchen ab, welches auf einen konischen Stab (Stahlfederhalter) gesteckt ist. Den Faden läßt man auf eine so große Strecke durch die Luft gehen, daß er trocken aufläuft, weil sonst die Fäden zusammenkleben. Der Kokonfaden wird nach innen feiner; um über verschiedene Stärken zu verfügen, spult man die Teile auf mehrere Rollen. Ein während des Abspulens verlorenes Ende sucht man durch leichtes Schlagen mit einem Stäbchen wiederzufinden.

Über das Aufhängen am Kokon s. **72b.**

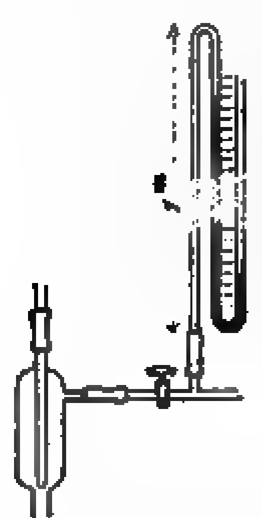
21 **Quarz schmelzen.** Ein Kristall wird durch Erhitzen und Ablöschen rissig gemacht; die Teile lassen sich im Knallgasgebläse zusammenschmelzen und formen. Aus Stäbchen können auch Röhren zusammengesetzt werden. Die verschwindende Wärmeausdehnung so behandelten Quarzes gestattet dabei auch schroffes Kühlen. — Vgl. Dufour, Gautier, Le Chatelier in C. R. 130. 1900. — Quarzgeräte verfertigen Heraeus in Hanau und Siebert & Kühn in Kassel. Siehe Der Mechaniker, 1903, 173.

Quarzfäden. Boys, Phil. Mag. (5) 45, 489. 1887. Man befestigt ein Quarzstäbchen mittels Kitt oder einer Klammer an einem Pfeil aus Holz oder aus einem Strohhalm mit einer Nadelspitze. Darauf wird die Mitte des Stäbchens im Knallgasbrenner geschmolzen und der Pfeil von einer am Blastisch im Schraubstock befestigten Armbrust aus größerer Entfernung in ein Brett abgeschossen, nachdem der Quarz weich geworden ist. Die hintere Hälfte des Stäbchens hält man fest. Auch kann man mit der Stichflamme Fäden direkt weg- und an ein hintergestelltes Stück Sammet anblasen (Nichols). Quarzfäden sind nicht hygroskopisch und besitzen bei großer Festigkeit eine sehr geringe elastische Nachwirkung. Versilberte (Nr. 6) oder hygroskopisch gemachte Fäden kann man als leitende Aufhängung für Elektrometernadeln benutzen (Himstedt, Dolezalek).

21a. **Kitte.** Genannt seien 1. warm: Schellack oder guter Siegellack, Wachskolophonium, Guttapercha, Marineleim (Kautschuk und Schellack mit Teer), auch wohl Paraffin; 2. kalt: Gips mit Gummi arabicum, 20 gr Bleiglätte mit 5 ccm Glyzerin, Hausenblase, Wasserglas, Kaseinkitt (Kasein in gesätt. Boraxlösung oder in Wasserglas), Bleiglätte oder Mennige mit Leinölfirnis angerührt, gebrannte Magnesia mit gesätt. $MgCl_2$-Lösung

22. **Luftpumpen- und Hahn-Fett.** Talg mit Schmalz oder Olivenöl, oder Wachs mit Knochenöl, zu passender Konsistenz gemischt. Ein Gemisch aus Wachs und Vaselin hat den Vorteil, wenig Dämpfe abzugeben, dichtet aber auf die Dauer nicht ganz so sicher.

23. **Wasserluftpumpe.** Hat die Wasserleitung großen Druck, so wendet man die Strahlpumpe an, muß aber auch dafür sorgen, daß der Druck nicht etwa durch eng gebohrte Hähne aufgehoben wird. Die Strahlpumpe kann bei Zimmertemperatur bis auf 20 mm Quecksilberdruck auspumpen. Ablagerungen aus kalkhaltigem Wasser an der Spitze können die Wirkung beeinträchtigen; man entfernt dieselben mit Salzsäure. — Bei geringem Druck, wenn aber Gefälle zur Verfügung steht, dient die Bunsensche Tropfenpumpe. Für ein langsam gleichförmiges Saugen, z. B. beim Austrocknen von Röhren, ist die letztere überhaupt sicherer und ökonomischer. Jede Strahlpumpe läßt sich durch ein Abfallrohr, welches durch einen Schlauch mit der Austrittsöffnung des Wassers verbunden wird, in eine Tropfenpumpe verwandeln.



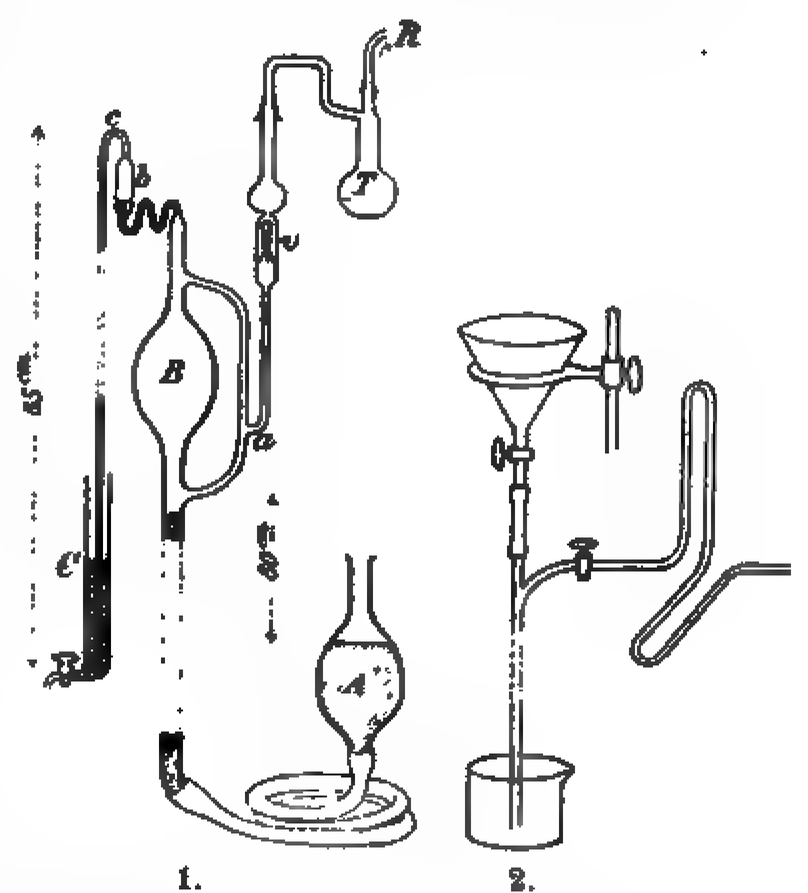
Um bei dem Abstellen des Zuflußhahnes das Eindringen von Wasser in den evakuierten Raum zu vermeiden, soll an dem Luftrohr ein Hahn sitzen, den man vor dem Abstellen schließt.

Zur Beurteilung des Vakuums kann ein Metallmanometer oder ein selbstzufertigendes Quecksilbermanometer (Fig.) angeschlossen sein

24. **Quecksilberluftpumpe** (Geißler 1868). Hahnlose Pumpe (Töpler). Während des Hebens tritt das Quecksilber aus *A*, den Kanal nach dem Rezipienten *R* bei *a* absperrend, aber durch das Schwimmventil *v* am

Eindringen in *R* verhindert, durch *B* und *b*, die Luft in das Barometer *c* schiebend. Man läßt in *C* überfließen, bis die Luft entwichen ist, und senkt, worauf schließlich das in *B* entstandene Vakuum sich mit dem Rezipienten verbindet. Der Austrockner *T* enthält konzentrierte Schwefelsäure oder besser Phosphorsäureanhydrid.

Zu Anfang und nachdem bereits ein hohes Vakuum entstanden ist, soll behutsam gehoben werden; im letzteren Fall wird besonders die Biegung bei *c* leicht durch den Stoß des Quecksilbers verletzt. Zum Schluß genügt es, die Luftbläschen nur in *b* zu treiben und von dort selten weiter zu befördern.



Solange noch viel Luft aus dem Rezipienten zurücktritt, muß auch vorsichtig gesenkt werden, um erstens heftige Stöße des über *a* nach *B* geschleuderten Quecksilbers und zweitens das Aufstäuben der trockenen Phosphorsäure in die Pumpe hinein zu vermeiden.

Wenn eine Pumpe keine innere Trockenvorrichtung hat, so liegt die Ursache einer schlechten Wirksamkeit meistens an Feuchtigkeit über dem Quecksilber, die man häufig eben nur daran erkennt, daß sie durch Auspumpen nicht zu beseitigen ist. Man muß dann wiederholt mit trockener Luft füllen oder auch die Pumpe entleeren und mit einem Luftstrom trocknen und das Quecksilber auf etwa 140° erwärmen. Die in die Pumpe eintretende Luft soll stets getrocknet sein.

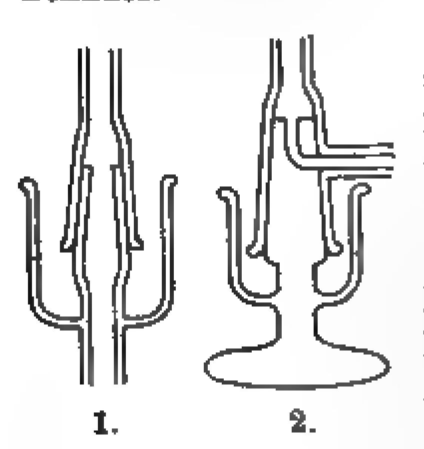
Phosphorsäure trocknet nachhaltig und selbst, wenn sie bereits feucht erscheint, oft noch merklich vollkommen. Das Trocknen geschieht aber durch Diffusion, also, besonders in dichterer Luft, langsam. Selbst nachdem stark evakuiert ist, bleibt über dem Trockenmittel Luft von der Spannkraft des anderswo vorhandenen Wasserdampfs, der hindurch diffundieren muß Man hat also, alles verbunden, diesem Vorgange Zeit zu lassen.

Kleine Volumina pumpt man bequem mit der kontinuierlich wirkenden Sprengel'schen Tropfenpumpe aus, welche aus einem Glastrichter mit Hahn und einem 1½ m langen Rohr von 3 mm lichter Weite mit Seitenansatz leicht zu improvisieren ist (Fig. 2).

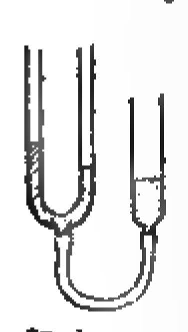
Biegsame Verbindungen bilden die Kundt'schen Federn aus dünnen Glasröhren mit nach zwei Seiten ausgebogenen Teilen von etwa $\frac{1}{3}$ m Länge (Fig. 2). Man achte auf etwaige Undichtheit durch feine Luftröhren in der Rohrwandung. Zum Ansetzen dient Siegellackkittung nicht zu kurzer Berührungsflächen, z. B. zweier ineinander geschobener Röhren; oder der gefettete Glasschliff, dessen Dichtheit verbürgt ist, wenn er klar durchsichtig erscheint.

Glasröhren, welche evakuiert abgeschmolzen werden sollen, sind, um nicht eingedrückt zu werden, vorher an der betr. Stelle auf 2 bis 3 mm Lumen zu verjüngen.

Selbsttätig wirkende Pumpen u. a. von Raps, Neesen, Kahlbaum, Zehnder.



25. Quecksilberdichtungen. Um einen Glasschliff ohne Fett zu dichten, wird hinter den Spitzkonus ein kleines Gefäß angeschmolzen, welches man nach dem Aufsetzen und Andrücken des Hohlkonus bis mindestens etwa 6 mm über den Rand des Hohlkonus mit Quecksilber füllt. Passen die Flächen einigermaßen aufeinander, so leistet der Kapillardruck des Quecksilbers dem Atmosphärendruck Widerstand (Lehmann). Ähnlich können verbindende Hähne hergestellt werden (Fig. 2, Kahlbaum, ZS f Instr. 1894, 21. S. daselbst auch die Doppelschliffe mit zwei auswechselbaren Ansätzen). Glatte Bewegung wird dadurch befördert, daß die ineinandergeschliffenen Teile aus verschiedenen Gläsern bestehen (Kahlbaum). Als Schmiermittel läßt sich hier Phosphorsäureanhydrid anwenden.



Eine Rohrverbindung, die durch Quecksilber abgesperrt werden kann, gibt z. B. ein gebogenes Rohr mit Ansatzsteigrohr, welches unten in ein Gefäß mit Quecksilber taucht oder durch einen biegsamen Schlauch mit einem Quecksilberbehälter verbunden ist (Fig.). Durch Heben oder Senken des Quecksilbers kann man absperren oder verbinden. An evakuierten Räumen muß eine Steighöhe von Barometerlänge verfügbar sein. Schlauchverbindungen sollen, um Einsickern der Luft zu vermeiden, unter innerem Überdruck stehen.

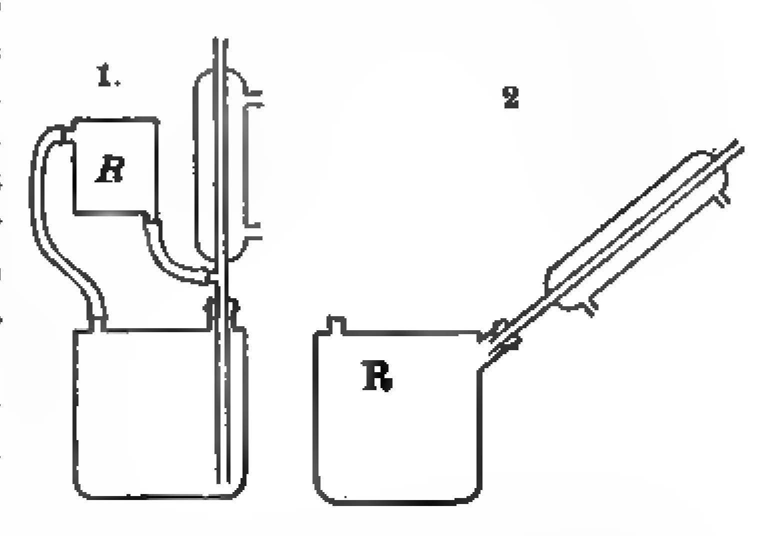
26. Motoren. Wassermotoren. Die Zuleitung und Hahnbohrung der Wasserleitung muß genügend weit sein, um bei dem Laufen keinen Druckverlust zu bewirken. Man hat Motoren mit Kolbendruck und mit Stoßkraft. Die letzteren, häufiger gebrauchten, arbeiten unökonomisch, wenn man das Wasser aus weiter Spitze ausströmen läßt und den Zufluß mit dem Hahn der Wasserleitung abschwächt. Enge Spitze und weiter Hahn nutzen den Druck aus. Hat die Wasserleitung geringen Druck, so kann für geringe Kräfte ein kleines oberschlächtiges Mühlrad brauchbar sein.

Elektromotoren. Bei der Bestellung ist die kleinste Spannung anzugeben, mit der der Motor laufen soll. Für die gebräuchlichen Lichtleitungsspannungen von 65, 110 und 220 V sind Wicklungen meist vorrätig. Zu kleine Normalspannung des Motors ist durch Vorschaltung von Widerstand korrigierbar, bedingt dann aber Energievergeudung Über Funken an den Bürsten vgl. 119.

Langsames Laufen eines kleinen, schwach belasteten Motors erzielt man auf die Dauer nur mit leichten Schleiffedern.

Heißluftmotoren. In Ermangelung elektrischen oder Wasserdruck-Antriebes wird vielfach der Heinrici'sche Heißluftmotor gebraucht, der freilich mehr Raum und einige Zeit zum Anheizen beansprucht

27. **Konstante Temperaturbäder.** Höhere Temperaturen liefert dauernd eine siedende Flüssigkeit (Tab. 12), oder besser ihr Dampf, entweder in dem Siedegefäß oder in einem anderen, von dem Dampf durchspülten oder umspülten Raum *R*. Ein Rückflußkühler mit hinreichend weitem Rohr führt ev. den überschüssigen Dampf zurück. Schemata siehe neben.



Für hochsiedende Flüssigkeiten genügt oft ein Rückflußkühler in Luft; vgl. die zweite Figur in 46.

Tiefere Temperaturen: 0° Gemisch von Eis und Wasser; — 21° Gemisch von Kochsalz mit etwa 4 Teilen zerstoßenem Eis oder besser Schnee; — 79° Äther mit fester Kohlensäure, die letztere im Überschuß; — 191° siedende flüssige Luft im Dewarschen Gefäß. Durch das Abdestillieren des leichter flüchtigen Stickstoffs steigt der Siedepunkt bis — 186° Die Mischungen müssen gerührt werden, besonders wenn wenig feste Substanz vorhanden ist.

Mittlere Temperaturen zwischen derjenigen des Zimmers und dem Siedepunkt der Badflüssigkeit hält man durch Regulierung des Heizgasverbrauchs durch einen Thermostaten konstant. Derselbe drosselt selbsttätig den Gaszufluß, sobald eine bestimmte Temperatur erreicht ist, durch eine sich ausdehnende und dadurch den Weg sperrende Flüssigkeit, deren Vorratsgefäß sich in dem zu regulierenden Raume befindet. Eine kleine seitliche Öffnung hindert das vollständige Verlöschen der Flamme.

Schema eines Quecksilber-Thermostaten s Fig.;

der Quecksilberstand muß für verschiedene Temperaturen regulierbar sein. Die hierzu dienende Vorrichtung stellt der Seitenansatz mit verstellbarer Schraube vor. Ausführliche Behandlung der Thermostaten bei Ostwald-Luther, Phys.-chem. Messungen S. 76.

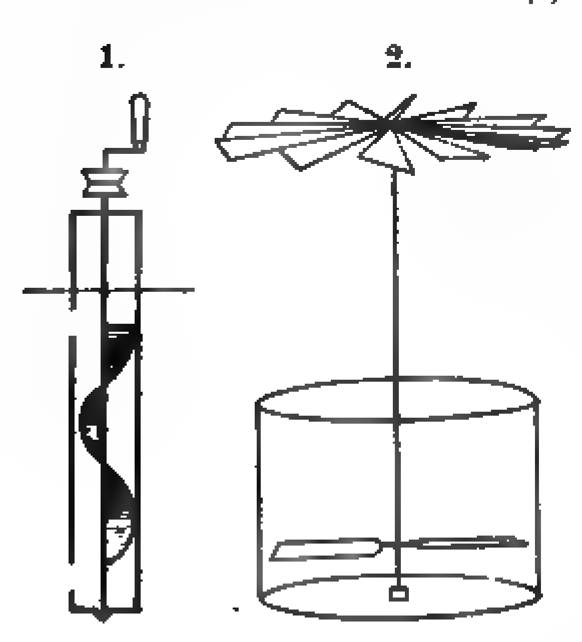
Temperaturen etwas über oder unter Zimmertemperatur lassen sich oft durch Nachwärmen mit der Hand oder Abkühlen mit einem an die Gefäßwand geklebten feuchten Fließpapier erhalten.

Zu beachten ist, daß das Verdunsten des Wassers aus einem nicht bedeckten Bad die Temperatur stark herabsetzen kann.

Flüssigkeiten für Bäder sind Wasser, Petroleum, Vaselinöl, konz. Lösungen von Chlorcalcium oder Chlorzink (bis etwa 180° brauchbar), geschmolzenes Palmin (bis 230°) oder Paraffin (bis 300°), geschmolzenes Kalium- oder Natriumnitrat oder ein Gemisch von beiden. Ein Gemisch aus gleichen Teilen schmilzt etwa bei 225° und ist bis 600° brauchbar.

28. **Rührer.** Der einfachste Rührer und viel öfter genügend, als man zu glauben pflegt, ist eine Feder usw. Einen Ringrührer (Fig. vor. S. u. 49) biegt man aus einem dicken Draht oder einem Glasstab, indem man den gebogenen Ring flach klopft oder bei dem Glase erweicht und flach kneift. Oder man setzt den geraden Stiel aus Draht, Holz, Hartkautschuk an einen flachen Ring aus Blech, Glimmer, Federn usw. Der Stiel erhält nötigenfalls eine Führung.

Der Schraubenrührer (1) ist am Platze, wenn zerbrechliche Gegenstände im Gefäß sind oder wenn ein Motor zum Rühren angewandt werden soll. Ein Rohr (Glas, Blech, im letzteren Falle vielleicht an eine Wand des Gefäßes angelötet) hat je eine untertauchende Öffnung unten und oben; eine Drehungsaxe trägt einen Schraubenflügel. Die Schraube saugt und stößt die umgebende Flüssigkeit durch das Rohr. — Oder man setzt (2) in das Gefäß selbst Flügel ein, die, wenn ihre Drehungsaxe gut vertikal steht, sich mit geringer Reibung drehen, so daß die Triebkraft eines Flügelrades mit untergestelltem Flämmchen genügt (Ostwald-Luther, Phys.-chem. Mess. S. 91). Um in einem hermetisch verschlossenen Gefäß zu rühren, kann ein Stückchen Eisen am Rührer dienen, welches durch ein von außen erzeugtes magnetisches Drehfeld, z. B. durch einen außen rotierenden Hufeisenmagnet gedreht wird.



29. **Elektrische Heizung.** Man führt den Stromleiter durch oder um den zu heizenden Raum. Die Drahtstärke usw. ist so zu wählen, daß die verfügbare Spannung nicht ganz ausgenutzt wird, um durch Widerstandsballast regulieren zu können. Nach den Enden einer Heizspule hin werden,

wenn gleichmäßige Heizung verlangt wird, die Windungen dichter gelegt werden müssen. Bis 600° ist Konstantandraht geeignet, der auf Tonrohre, z. B. auf Cylinder für galvanische Elemente gewickelt ist. Bis 1100 oder 1200° genügt Nickeldraht auf Porzellan oder Chamotte; höher hinauf Platin, bis 2000° Iridium. Platin wird ökonomisch als dünnes Blech angewandt, für höhere Spannung als schraubenförmig aufgewickeltes Band, für niedere als geschlossener Cylinder; letztere Form wird weniger leicht durchgeschmolzen. Gegen Überhitzen dient enges Andrücken an den Träger. — Drähte muß man, am besten durch Chamottepulver oder Porzellanmasse, naß zwischen die Windungen gepreßt, gegen Zusammengleiten schützen. Asbestpappe ist bis 1100° haltbar; sie entwickelt aber meist aus organischen Bestandteilen Gase, die den Thermoelementen schaden.

Vgl. u. a. Holborn u. Day, Wied. Ann. 68, 836. 1899.

30. **Zur Linde'schen Luftverflüssigungsmaschine.** Der Kompressor ist gleich nach jedem Gebrauch auseinanderzunehmen und zu reinigen; der Gegenstromapparat, besonders die Kühlschlange, vor und nach dem Gebrauch kräftig bis zur Trocknung auszublasen. Namentlich beim Beginn muß, um Verstopfung des Apparats zu vermeiden, das Nadelventil gut arbeiten.

In einer lose bedeckten doppelwandigen Flasche mit evakuiertem Zwischenraum zwischen den versilberten Wänden (Weinhold-Dewar'sches Gefäß), mit Wolle verpackt, hält flüssige Luft sich längere Zeit. Die Gefäße sind vor Verletzungen zu behüten, da der auf ihnen lastende Luftdruck ohnehin heftige Zertrümmerung bewirken kann. Womöglich soll man auch nicht über den Rand ausgießen, sondern, ähnlich wie bei der Spritzflasche, mittels eines Siphons ausfüllen, dessen Kautschukstopfen man langsam einsetzt. — Die Markt- u. Kühlhallen-Ges. zu Berlin verkauft und versendet fl. Luft.

30a. **Wärmeschutz.** In Betracht kommen Filz, Watte, in höherer Temperatur Asbest, Kieselgur usw. Eine Luftschicht schützt unten gegen Abkühlen, oben gegen Erwärmen. Durch ein sehr hohes Vakuum geht die Wärme merklich nur als Strahlung, die zwischen glänzenden Oberflächen, von denen und zu denen gestrahlt wird, klein ist; s. oben Dewar'sches Gefäß. Glänzendes Metall — am besten Aluminiumfolie oder auch wohl Nickelpapier — läßt sich oft verwenden. Bei Flüssigkeiten soll das Verdampfen verhindert werden.

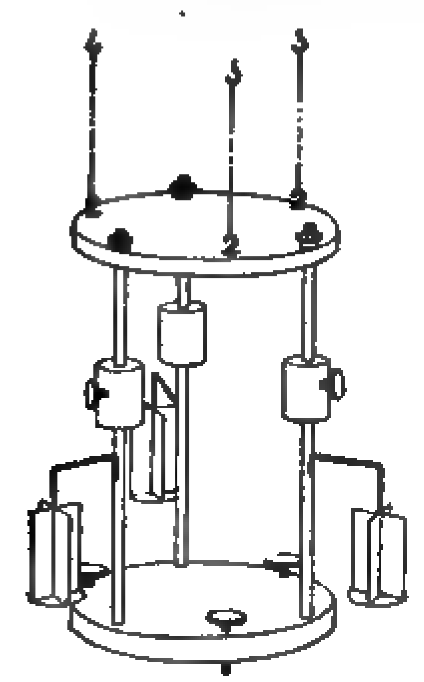
31. **Kautschuk.** Die Haltbarkeit leidet besonders durch Ozon. Licht und harziges Holz sind nachteilig. Man bewahrt unter Wasser auf, oder im Keller, oder im verschlossenen Metall- oder Tongefäß zusammen mit einer offenen Wasserfläche Die Ausschwitzungen an neuem Hartkautschuk lassen sich durch Wasser oder Salzsäure beseitigen.

32. **Dämpfer.** Schwingungen um eine vertikale Axe dämpft man durch einen Flügel, bestehend aus dünnem Blech oder aus einem Rähmchen mit Seidenpapier bespannt oder dgl., in einem Gefäß mit Flüssigkeit oder Luft. Die Wirksamkeit wird vermehrt, wenn man (Fig.) das Gefäß, für

Luftdämpfung mit Deckel versehen, durch feste Flügel, die von den Wänden bis in die Nähe der Achse gehen, in Kammern abteilt (Toepler). Genügen kleine Ausschläge, so nähert man einer mit der Axe verbundenen vertikalen Scheibe eine feste Fläche (W. Thomson).

Elektromagnetische Dämpfung liefert ein Stück Kupfer an der Axe, dem man einen Magnet unterlegt oder noch besser die Pole eines Hufeisenmagnets von zwei Seiten nähert.

Vertikale Schwingungen werden z. B. durch einen mit dem Körper verbundenen Kolben gedämpft, der sich in einem unten geschlossenen, nur wenig weiteren, mit Luft oder einer Flüssigkeit (Wasser, Glyzerin) gefüllten Cylinder bewegt.



33. Aufstellung in unruhigen Gebäuden (Julius; Beispiel einer Ausführung in der Fig.). Man hängt die Bodenplatte mittels dreier Stäbe, die zur Regulierung des Schwerpunkts mit Laufgewichten versehen sind, an Stahldrähten trifilar auf. Die Horizontierung usw. geschieht durch Schraubenverstellung der Aufhängepunkte. In drei Becher mit zäher Flüssigkeit (Öl, Glyzerin) tauchen Dämpferkreuze mit Horizontalscheiben gegen vertikale Erschütterungen. Besser ist ein einziges kräftiges, mitten unten angebrachtes Dämpferkreuz. — Stellschrauben in der Bodenplatte gestatten ein zeitweiliges Feststellen auf einen nahe darunter befindlichen Tisch. Das Ganze muß unter Umständen gegen die Luftströmungen eingebaut werden. — Die Anwendung beschränkt sich auf Instrumente, an denen man selten Manipulationen vorzunehmen hat. Vgl. Julius, Wied. Ann 56, 151. 1895; ZS f. Instr. 1896, 267.

Cailletet'sche Pumpe s. **36**; Thermometer in **59**; Lichtquellen in **59a**.

Über Destillation im Vakuum s. Anschütz, Bonn 1895. Über Werkzeuge, Konstruktionsteile, Verbindungen, Gießen, Kitten, Metallbearbeitung usw s. Lehmann, Physikalische Technik.

9. Herstellung von Lösungen.

Nach Gewichtsverhältnis.

1. Man wägt die Menge K des Körpers ab und löst sie zum Gesamtgewicht L, dann ist K/L der Gehalt, $100\,K/L$ der Prozentgehalt.

Aus einer Lösung vom Gehalte p erhält man eine verdünntere vom Gehalte p', indem man das Gewicht K' der Lösung zum Gesamtgewicht $L' = K' \cdot p/p'$ verdünnt, oder wenn man zu K' das Gewicht $K'(p - p')/p'$ Lösungsmittel zusetzt (Schütteln nicht vergessen!).

Von Korrektionen kommt nur diejenige der Wägungen auf den leeren Raum herein, die man aus einer (genäherten) Kenntnis der spezifischen Gewichte nach Tab. 1 ermittelt.

Zu beachten ist, daß zur Wägung der größeren Menge der Lösung meistens eine weniger feine Wage genügt, als für den Körper. Ungleicharmigkeiten sind dann aber ev. durch Doppelwägung (18 I) zu eliminieren.

2. Das zu K gr des Körpers zugesetzte Lösungsmittel kann, wenn sein spezif. Gewicht Q bekannt ist, nach Volumen v cm³ abgemessen werden. Dann ist $p = K/(K + v \cdot Q)$. Über Q bei Wasser s. Tab. 4.

3. Im Prinzip identisch mit 1. ist die Ermittelung der in einem Gewicht L einer Lösung enthaltenen Menge K durch Eindampfen oder chemische Analyse.

4. Das bekannte spezifische Gewicht einer wässerigen Lösung liefert den Gehalt aus Tabellen. Die Angaben der sp. Gewichte beziehen sich auf Wasser teilweise von gleicher Temperatur ($s_{t/t}$), teilweise von 4° ($s_{t/4}$). Man reduziert nach der Beziehung $s_{t/4} = Q_t \cdot s_{t/t}$; Q ist die Dichtigkeit des Wassers (Tab. 4).

Um eine Lösung von einer Temperatur t auf t_0 zu reduzieren, hat man $s_0 = s_t(1 + \alpha(t - t_0))$; vgl. 44 u. Tab. 12.

Das Gewichtsverhältnis hängt natürlich nicht von der Temperatur ab.

Gelegentlich wird anstatt des Gehaltes p in 1 (bez. 100) Teilen der Lösung der Gehalt $[p]$ in 1 (bez. 100) Teilen des Lösungsmittels angegeben. Es ist

$$[p] = p/(1 - p), \quad \text{bez.} \quad [p] = 100\, p/(100 - p).$$

Über spezifische Gewichte s. Tab. 3 u. 3b. Ausführlicher s. besonders Gerlach, Salzlösungen, Freiberg 1859; ZS f Analyt. Chemie 8, 279. 1869; Landolt und Börnstein, Tabellen (unter Beachtung des Druckfehlerverzeichnisses für die Temperaturen); Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte Tab. 1a bis 1c. — Zucker und Schwefelsäure (die Haupttabelle hier auf Wasser von 15° bezogen!) Wiss. Abh. d. Norm.-Eich.-Comm. 1900 u. 1904. — Ferner die Chemikerkalender. — Den mittleren Ausdehnungskoeffizienten α zwischen t u. t_0 s. z. B. bei Gerlach, Salzlösungen (l. c.); Kremers, Pogg. Ann. 105, 367. 1858; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt u. Börnstein, Tabellen; auch Tab. 3b.

Über Löslichkeit s. Tab. 17; ausführl. Landolt u. Börnstein.

Nach Gehalt in der Volumeinheit.

Der „Volumgehalt" wird als Gewicht q des gelösten Körpers, oder aber als Anzahl m der gelösten Moleküle (bez. Äquivalente) in der Volumeinheit angegeben. $1/m$ heißt molekulare Verdünnung der Lösung. Zu der Konzentration p nach Gewichtsverhältnissen besteht die Beziehung (s = spezif. Gewicht der Lösung, A = Molekular- bez. Äquivalentgewicht des Körpers)

$$q = ps \qquad m = q/A = ps/A.$$

Wird p nach Prozenten, q nach Gramm in 100 ccm gerechnet, m aber wie gewöhnlich nach gr-Molek./Liter, so kommt natürlich $m = 10 \cdot ps/A = 10q/A$.

5. Der Körper K wird zum Volumen V gelöst, dann ist $q = K/V$. Wegen der Volumänderung beim Lösen wartet man vor dem Ablesen oder dem endgültigen Abgleichen des Volumens, bis alles gelöst ist, schüttelt auch vorher (überhaupt Schütteln nicht vergessen!).

Eine Normallösung von 1 gr-Mol/Liter wird durch Auflösen von A gr zu 1 Liter erhalten. Einen bekannten Kristallwassergehalt des Körpers rechnet man bei wässeriger Lösung gleich mit in A. Beim Abwägen wird von A der Auftrieb in der Luft, d. h. A mal die betr. Zahl aus Tab. 1 abgezogen. Über die Dichte von Normallösungen s. Tab. 3b.

Von einer konzentrierten Lösung geht man zu einer verdünnteren, hier am bequemsten mit Pipetten (23) u. dgl. über. Das Volumen v einer Lösung von der Konzentration q zum Volumen V verdünnt, gibt die neue Konzentration $q' = q \cdot v/V$.

Verdünnt man in der Weise, daß zu einem Volumen v der Lösung das Volumen v_0 des Lösungsmittels gesetzt wird, so ist natürlich $q' = q \cdot v/(v_0 + v)$. Es sind also, um von q auf q' zu verdünnen, die Volumina Lösungsmittel : Lösung $= (q - q') : q'$ zu nehmen.

Diese Verdünnung durch ein abgemessenes Volumen Lösungsmittel bringt aber eine Korrektion mit sich, wenn Kontraktion bei der Verdünnung eintritt. Es sei s die Dichtigkeit der Originallösung q; q' sei die ohne Kontraktion berechnete neue Konzentration. Dann würde $s'' = 1 + (s-1)q'/q$ die neue Dichtigkeit ohne Kontraktion sein. Ist die Dichtigkeit wirklich $= s'$, so hat man die richtige Konzentration $= q' \cdot s'/s''$.

Bei genauen Angaben hat man auch darauf zu achten, daß der auf die Volumeinheit bezogene Gehalt durch die Ausdehnung mit der Temperatur etwas veränderlich ist, auch ist bei dem Auflösen oder Verdünnen die Temperatur zu beachten.

Eingehendere Bemerkungen auch über sehr verdünnte Lösungen z. B. bei Kohlrausch u. Holborn, Elektrolyte § 16 u. 17; K. u. Maltby, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III. 182 ff 1900.

Wägung und Dichtigkeitsbestimmung.

10. Wage und Wägung.

Die Wägung ermittelt die Masse eines Körpers. Als Einheit gilt das Gramm, die Masse eines Kubikcentimeters[1]) Wasser von + 4°.

Genau wie die Massen verhalten sich die durch die Erde auf sie ausgeübten Anziehungskräfte, die „Gewichte im leeren Raum". In der Luft verliert der Körper durch den hydrostatischen Auftrieb ein Gewicht gleich dem Gewicht der verdrängten Luftmenge. Da feste und tropfbare Körper mindestens 600 mal schwerer sind als Luft, so bleiben hier die relativen Fehler durch den Luftauftrieb kleiner als 1/600. Über die Reduktion der Wägung auf den leeren Raum vgl. **13**.

Bei dem fast immer gebrauchten Wägungsverfahren wird die gleiche Länge der beiden Wagearme, an denen Körper und Gewichtstücke wirken, vorausgesetzt. Vgl. **12**.

Die folgenden Vorschriften zur Behandlung einer Wage schließen sich an die zur chemischen Analyse gebräuchliche Form an.

I. Aufstellung und Prüfung der Wage.

Schneiden und Pfannen müssen ganz rein sein. Sie werden mit einem Pinsel von Staub gereinigt oder mit einem Leder geputzt. Ein kleines Stäubchen oder Fäserchen kann die Einstellungen verderben.

Man stellt mit den Fußschrauben das Senkel oder die Libelle ein; besitzt die Wage keine solche Vorrichtung, so setzt man eine Dosenlibelle auf den Fuß der Wage oder nivelliert nach einem Senkel, welchem man den arretierten Zeiger parallel stellt.

Nun löst man die Arretierung aus, korrigiert ein etwaiges gröberes einseitiges Übergewicht und überzeugt sich, daß alsdann die Wage eine stabile Gleichgewichtslage hat. Sollte das Gleichgewicht labil sein (die Wage „umschlagen"), so wird zunächst das in der Mitte befindliche Laufgewicht herabgeschraubt, bis dies beseitigt ist.

---

1) Das gesetzlich festgelegte Gramm ist nach späteren Ermittelungen die Masse von 1,00003 cm^3 Wasser von 4°.

Die Empfindlichkeit der Wage (vgl. auch **11**) wird durch das Hinauf- oder Herabschrauben des genannten Laufgewichtes reguliert; sie läßt sich aus der Schwingungsdauer beurteilen, deren zweiter Potenz sie für eine bestimmte Wage proportional ist. Als Dauer einer Schwingung ist bei der langarmigen Wage 10 bis 15 sek, bei der kurzarmigen 6 bis 10 sek gebräuchlich. Eine größere Dauer verursacht Zeitverlust, stärkere Dämpfung und meistens Unregelmäßigkeiten der Einstellung.

Nun wird mittels der für diesen Zweck vorhandenen Einrichtung (Laufgewicht am Ende des Balkens; Durchbohrung des vertikalen Laufgewichtes; drehbarer Arm usw.) bewirkt, daß die unbelastete Wage um den mittelsten Teilstrich nach beiden Seiten gleichweit schwingt. Eine Unsymmetrie von einigen Zehnteln eines Skalenteils, die mit der Zeit auch immer wieder entstehen kann, mag man mit den Fußschrauben korrigieren, deren eine man um gleichviel verkürzt, wie man die andere verlängert.

Prüfung der Wage. In erster Linie ist zu fordern, daß die Wage, wiederholt arretiert und ausgelöst, dieselbe Einstellung zeigt und daß die Schwingungen nur langsam abnehmen. Fehlerquellen können von dem Lockern einer Verschraubung am Wagebalken herrühren, oder von einer Unsauberkeit, ungeeigneter Gestalt oder Verletzung der Schneiden oder Pfannen.

Arretiert soll der Zeiger gerade über dem mittleren Teilstrich stehen; die Arretierung soll den Balken beiderseitig gleich loslassen. Der Reiter soll, auf Null gesetzt, die Einstellung nicht beeinflussen.

Die Gleicharmigkeit prüft man durch beiderseitiges Aufsetzen von hinreichend großen Gewichtstücken, welche sich das Gleichgewicht halten: ihre Vertauschung darf die Einstellung nicht ändern. Über die Messung und Eliminierung der Ungleicharmigkeit s. **12**.

Es ist endlich nicht überflüssig, zu prüfen, ob ein Gewicht auf jeder Stelle der Wagschale gleich wirkt. An Brücken und Tafelwagen können grobe Verstöße hiergegen vorkommen; kleinere auch bei der gewöhnlichen Wage, wenn die Schale ohne Zwischengehänge an der Schneide hängt, was fehlerhaft ist.

Einem rauhen Gange der Reiterverschiebung oder der Arretierung hilft man durch Abwischen mit einem Läppchen eventuell mit einer Spur Petroleum nach. Die Reiterverschiebung soll durch Anschläge vor dem Anstoßen an den Balken geschützt sein.

Als Größe des Skalenteils am Zeiger empfiehlt sich etwa das Millimeter. Zur Vermeidung der Parallaxe spiele die Zeigerspitze dicht vor oder besser über der Teilung. Eine vor der Teilung fest angebrachte Lupe, etwa eine auf die Glaswand geklebte Linse von geeigneter Brennweite erleichtert das Ablesen.

Daß die beiden gewöhnlichen Schalen einander genau gleich sind, ist nebensächlich; eine etwa vorhandene kürzere Wagschale aber soll einer der anderen an Gewicht genau gleich sein.

Gebrauch der Wage. Der Tisch der Wage soll vor Erschütterungen vom Fußboden geschützt stehen, auch vor Verbiegungen durch Auflegen des Arms gehütet werden; die Wage ist ferner vor Ungleichheiten der Erwärmung zu bewahren. Gegen Rost oder Luftfeuchtigkeit kann unter Umständen ein Gefäß mit Ätzkalk oder Chlorcalcium im Wagekasten angebracht sein. Das Auflegen von Gewichten geschieht nur bei arretierter Wage. Pendelschwingungen der Schalen während der Wägung können zu Fehlern Veranlassung geben.

Bei der endgültigen Wägung sind Luftströmungen, die auch z. B. durch geringe Erwärmung des zu wägenden Körpers entstehen können, zu vermeiden. Ein Wagekasten wird selbstverständlich geschlossen. Durch elektrische Ladungen können, wenn Glasteile des Kastens frisch geputzt sind, grobe Fehler entstehen, kleinere Fehler auch sonst, z. B. durch eine gläserne Bodenplatte, sowie bei Glas- oder Bergkristall-Wägungen. Die Anwesenheit eines in ein dünnes Glasröhrchen eingeschmolzenen Radiumpräparates sichert hiergegen (Dorn).

Einen gegebenen abzuwägenden Körper legt man gewöhnlich links; soll dagegen eine bestimmte Menge, etwa Flüssigkeit oder Salz, hergestellt werden, so pflegt die rechte Schale bequemer zu sein.

Spiegelablesung. Für die feinsten Wägungen benutzt man wohl an Stelle des Zeigers einen an dem Wagebalken angebrachten Spiegel, dessen Einstellung mit einem Fernrohr an einer Skala abgelesen wird. Vgl. **25** u. **26**.

Empfindliche Wagen für kleine Belastung spielen auf spitzwinkligeren Prismen oder auf zwei Spitzen. — Über äußerst empfindliche Formen vgl. z. B. Warburg und Ihmori, Wied. Ann. 27, 488. 1886.

II. Wägungsverfahren.

Es ist genauer, die Wage im schwingenden Zustande zu beobachten, als in der Ruhe. Die den Körper äquilibrierenden Gewichtstücke findet man durch allmähliches Einschließen in engere Grenzen und kann, wenn man über ausreichend kleine Gewichtstücke oder über eine Reiterverschiebung verfügt, hierbei so weit gehen, daß die Schwingungen nach beiden Seiten von dem Nullpunkte gleich groß sind.

Interpolationsverfahren. Der häufigen Regulierung des mit der Zeit veränderlichen Nullpunktes und dem Ausprobieren der vollkommenen Gleichheit ist oft das Beobachten des zeitigen Nullpunkts und das Interpolieren des abgleichenden Gewichtes aus zwei Einstellungen bei verschiedener Belastung vorzuziehen.

Bestimmung des Nullpunktes, d. h. des Punktes der Skale, auf welchen der Zeiger der unbelasteten Wage in der Ruhe zeigen würde. Ein Reiter ist dabei auf den Nullstrich der Balkenteilung zu setzen oder auch, wenn man sich überzeugt hat, daß er hier keinen Einfluß ausübt, abzuheben. Man findet den Nullpunkt aus einigen Umkehrpunkten des schwingenden Zeigers. Die Schwingungsweite mag etwa 2 bis 5 mm betragen. Für mäßige Genauigkeit nimmt man das Mittel aus zwei Umkehrpunkten oder bei stärkerer Dämpfung aus dreien, wobei zunächst aus Nr. 1 und 3 das Mittel genommen und dieses mit Nr. 2 zum Hauptmittel vereinigt wird.

Für genauere Zwecke wird man nach folgendem Schema etwa fünf Umkehrpunkte nehmen, das arithmetische Mittel aus den Beobachtungen auf der einen Seite, d. h. aus Nr. 1, 3, 5, und aus denen auf der anderen Seite, d. h. aus Nr. 2, 4, bilden und aus diesen beiden Zahlen wiederum das Mittel. Damit man nicht rechts und links unterscheiden muß, bezeichnet man den mittelsten Teilstrich der Wage nicht mit Null, sondern mit 10.

Beispiel.	Umkehrpunkte					Mittel	Nullpunkt
links	10,9		10,7		10,6	10,73	9,74
rechts		8,7		8,8		8,75	

Um aus zwei oder drei wenig verschiedenen Zahlen das Mittel zu nehmen, braucht man nicht etwa erst alles zu addieren und die Summe dann durch 2 oder 3 zu dividieren. Daß das Mittel aus 10,9 10,7 10,6 mit 10 anfängt, ist ja selbstverständlich. Und daß ,9 ,7 ,6 das Mittel ,73 geben, sieht man auch sofort. Mittelnehmen ist bei einiger Übung ebenso einfach wie Addieren und Subtrahieren und ist keinen gröberen Rechenfehlern ausgesetzt; ein nicht zu unterschätzender Vorteil. — Vgl. auch **26**, 1.

Man kann statt dessen auch den Mittelpunkt Null nennen und die Ausschläge nach der einen Seite positiv, nach der anderen negativ zählen, also in dem obigen Beispiel schreiben $+0,9$ $-1,3$ $+0,7$ usw. Der Anfänger aber wird in der vorhin angegebenen Weise weniger leicht Fehler begehen.

Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontrollieren, nach stärkerer Belastung der Wage neu zu bestimmen. Findet man Unterschiede, so nimmt man das Mittel aus den beiden Bestimmungen, welche der Wägung vorangehen und ihr folgen.

W ä g u n g. Nachdem eine solche Zahl von Gewichtstücken aufgelegt, bez. schließlich der Reiter so auf einen vollen Teilstrich aufgesetzt worden ist, daß die Einstellung dem Nullpunkt nahe kommt, macht man wieder nach dem obigen Schema einen Satz von Umkehrbeobachtungen. Das Mittel wird von dem Nullpunkt um eine Differenz von n Skalenteilen abweichen. K e n n t m a n d i e E m p f i n d l i c h k e i t C der Wage (**11**), d. h. den Ausschlag durch 1 mg Mehrbelastung, so ist $n\,C$ die Größe welche man den Gewichtstücken noch zulegen bez. von ihnen wegnehmen müßte, um völlige Gleichheit zu erzielen.

Kennt man die Empfindlichkeit nicht, so nimmt man ein oder einige Milligramm fort oder legt zu, je nachdem die Gewichte zu schwer oder zu leicht waren, so daß die E i n s t e l l u n g a u f d i e a n d e r e S e i t e v o m N u l l p u n k t f ä l l t, und beobachtet abermals wie vorhin. War die erste Einstellung e_1, die jetzige e_2, die Veränderung des Gewichts zwischen beiden Beobachtungen gleich π, so hat man die Empfindlichkeit $C = (e_1 - e_2)/\pi$ und kann jetzt rechnen wie vorhin.

Mit anderen Worten, wenn gefunden wurde

	der Nullpunkt	e_0
bei der Belastung p_1	die Einstellung	e_1
„ „ „ p_2	„ „	e_2,

so hat der Körper das Gewicht

$$p_0 = p_1 + (p_2 - p_1)\frac{e_0 - e_1}{e_2 - e_1}.$$

Selbstverständlich sind diese Differenzen sämtlich mit Rücksicht auf das Vorzeichen zu nehmen, wobei eine Erleichterung darin besteht, die Skalenteile nach derjenigen Richtung wachsend zu zählen, welche einer Vermehrung der Gewichtstücke entspricht.

Beispiel. Nullpunkt sei der obige Wert 9,74. Nach Auflegung des Körpers wurde beobachtet

Belastung:	Umkehrpunkte:	Mittel:	Einstellung:
3,036 gr	7,8 7,8 7,9 10,3 10,2	7,83 10,25	9,04
3,038 gr	9,6 9,4 9,3 12,3 12,3	9,43 12,30	10,86

Ausschlag auf 1 mg gleich $\frac{1}{2}$ 1,82 = 0,91 Skalent.

3,036 gr waren folglich zu leicht um (9,74 — 9,04)/0,91 = 0,77 mg. Das gleiche erhält man nach obiger Formel:

$$p_0 = 3{,}036 \text{ gr} + 2 \times 0{,}70/1{,}82 \text{ mg} = 3{,}03677 \text{ gr}.$$

Das Protokoll der Beobachtungen soll nach einem bestimmten Schema, z. B. dem obigen, geführt werden. — Man beachte noch, daß falsches Abzählen der Gewichtstücke ein sehr gewöhnlicher Fehler ist, zähle also mindestens zweimal.

Die Zuverlässigkeit des Verfahrens mit dem cg-Reiter reicht oft nicht weiter als auf 0,1 mg. Ganz feine Wägungen werden mit kleinen, berichtigten Gewichtstücken ausgeführt.

11. Empfindlichkeit einer Wage.

Empfindlichkeit C der Wage heißt die Änderung der Einstellung für die Mehrbelastung Eins (z. B. 1 mg) einer Schale. Ihre Bestimmung für verschiedene Belastungen ist als Kennzeichen für die Güte der Wage und ferner zur Vereinfachung der Wägungsmethode von Wichtigkeit. Besitzt man nämlich eine Tabelle oder eine Kurve, in welcher der Ausschlag auf 1 mg als Funktion der Belastung angegeben ist, so genügt für jede Wägung, außer der Bestimmung des Nullpunktes, eine einzige Beobachtung der Einstellung mit nahe richtigem Gewicht (vgl. vor. S.).

Ist M die Masse des Balkens, a der Abstand seines Schwerpunkts von der Drehaxe (Mittelschneide), M' die Gesamtmasse der Schalen ev. inkl. Belastungen, a' der Abstand der Verbindungsgeraden der Aufhängepunkte (Endschneiden) von der Drehaxe, a und a' nach unten positiv gerechnet, $2L$ die Länge des Balkens, z die Länge des Zeigers und s die des Skalenteils,

so ist $C = \frac{L}{Ma + M'a'} \cdot \frac{\varepsilon}{s}$. Bei positivem a' sinkt, bei negativem a' steigt die Empfindlichkeit mit wachsender Belastung und kann im letzteren Falle $= \infty$ werden, worauf die Wage umschlägt. Für $a' = 0$, d. h. wenn die Aufhängepunkte der Schalen mit der Drehachse in derselben Ebene liegen, haben die Schalen und ihre Belastungen keinen Einfluß auf C.

Zur Bequemlichkeit wird in der Regel für feinere Wagen diese Beschaffenheit gewünscht. Da aber ihre Bedingung wegen der Durchbiegung des Balkens streng nur für eine bestimmte Belastung erfüllt sein kann, so stellt der Mechaniker sie wohl für eine mittlere Belastung her. Dann findet man anfangs eine kleine Steigerung der Empfindlichkeit mit der Belastung, für größere Gewichte wieder eine Abnahme.

Da wegen der Festigkeit die Massen stärker vergrößert werden müssen als die Längen, so lassen sich kurzarmige Wagen empfindlicher bauen als langarmige.

Über Regulierung der Empfindlichkeit und Schwingungsdauer s. S. 52.

Die Bestimmung ergibt sich von selbst. Man setzt auf beide Schalen die Belastung, für welche man die Empfindlichkeit C bestimmen will, und auf eine der Schalen ein kleines Übergewicht, so daß die Einstellung um einige (2 bis 3) Skalenteile vom mittelsten Teilstrich abweicht. Diese Einstellung e wird nach **10** II genau beobachtet. Hierauf bewirkt man durch Mehrbelastung der anderen Schale um π mg eine ungefähr ebensoweit nach der anderen Seite abweichende Einstellung e'; dann ist die Empfindlichkeit $C = (e - e')/\pi$.

Hat man C etwa für 0, 10, 20 ... gr bestimmt, so trägt man in Koordinatenpapier die Belastung als Abszisse, die Empfindlichkeit als Ordinate ein und kann dann aus der Kurve C für irgendeine Belastung entnehmen oder eine Tabelle dafür herstellen. Von Zeit zu Zeit wird man die Empfindlichkeit neu bestimmen müssen.

12. Verhältnis der Wagearme.

Nach dem Hebelgesetz wird ein Körpergewicht in demselben Verhältnis falsch gefunden, wie der Wagearm auf der Seite des Körpers größer ist als auf der Seite der Gewichtstücke. Der Fehler spielt aus

zwei Gründen keine große Rolle. Denn erstens wird er bei einer guten Wage selten 1/10000 erreichen. Zweitens aber kommen zumeist nur die Verhältnisse von Gewichten zur Geltung, z. B. bei allen Gewichtsanalysen, bei Bestimmungen von Dichtigkeiten, spezifischen Wärmen usw., so daß der Fehler hier ganz herausfällt, sobald man stets denselben Wagearm benutzt. Bei feinen absoluten Wägungen aber darf man sich nicht auf die Gleicharmigkeit verlassen.

Die beiden Wagearme verhalten sich umgekehrt wie die Gewichte, welche als gleichzeitige Belastung der Schalen die Wage auf den Nullpunkt (**10**) einstellen. Ist der Gewichtsatz richtig, so ergibt sich das Balkenverhältnis R/L, falls ein Gewicht p_r an dem rechten Arme R dem Gewicht p_l an dem linken Arme L die Wage hält, $R:L=p_l:p_r$.

Ohne die vollkommene Richtigkeit des Gewichtsatzes vorauszusetzen, bestimmt man das Verhältnis folgendermaßen.

Man beobachtet den Nullpunkt, setzt dann auf beide Schalen Gewichtstücke von gleichem Nennwert, etwa gleich der Hälfte der größten für die Wage zulässigen Belastung, und bestimmt die Zulage, welche links oder rechts notwendig ist, um die Einstellung wieder auf den Nullpunkt zu bringen. Dabei empfiehlt sich für genaue Messungen das Interpolationsverfahren (**10** II). Der Nullpunkt ist hinreichend oft zu kontrollieren und ev. mit seinem Mittelwert vor und nach der Wägung einzusetzen. Alsdann vertauscht man die Gewichte und verfährt geradeso. Bezeichnen wir die beiden Gewichte vom Nominalbetrage p mit p_1 und p_2, und haben wir gefunden, daß die Wage einsteht, wenn

bei der einen Wägung links p_1+l rechts p_2
„ „ anderen „ „ p_2 „ p_1+r,

so ist, die Länge des linken Wagearmes mit L, die des rechten mit R bezeichnet,

$$\frac{R}{L}=1+\frac{l-r}{2p}.$$

Eine kleine Zulage einerseits kann dabei als negative Zulage andrerseits betrachtet werden; siehe das Beispiel.

Beweis. Nach dem Hebelgesetze ist $L(p_1+l)=Rp_2$ und $Lp_2=R(p_1+r)$, woraus (nach S. 9, Gl. 8 u. 3), wenn man schließlich p statt p_1 schreibt,

$$\frac{R}{L}=\sqrt{\frac{p_1+l}{p_1+r}}=\sqrt{\frac{1+l/p_1}{1+r/p_1}}=1+\frac{l-r}{2p}.$$

Auch die Doppelwägung eines Körpers mit Nullpunktsbestimmung ergibt das Verhältnis der Arme; siehe 13 I.

Mit der Belastung kann das Verhältnis sich etwas ändern.

Beispiel.

Links	Rechts		
(50)	(20 + 10 + ···)	+ 0,83 mg also	$l = -0{,}83$
(20 + 10 + ···)	(50)	+ 2,56 „ „	$r = +2{,}56$

$$\text{und } \frac{R}{L} = 1 + \frac{-0{,}83 - 2{,}56}{100\,000} = 1 - 0{,}0000339$$

$$\text{oder auch } L/R = 1{,}0000339.$$

Die eingeklammerten Zahlen stellen die mit diesen Ziffern bezeichneten Grammgewichtstücke vor. Zugleich folgt (13)

$$(50) = (20 + 10 + \cdots) - 0{,}86 \text{ mg}.$$

13. Absolute Wägung eines Körpers.

I. Elimination der Ungleicharmigkeit der Wage.

Solange nur Massen miteinander zu vergleichen sind, braucht man, wie schon gesagt, nur immer an demselben Arme der gleichen Wage zu wägen. Absolut aber muß ein Gewicht bestimmt werden, sobald, z. B. bei der Kalibrierung von Gefäßen, bei chemischen Titrierungen, bei der Herstellung von Lösungen, die Massen auf Volumina oder bei voltametrischer Messung auf elektrische Stromstärken usw. bezogen werden sollen.

Um das absolute Gewicht aus dem scheinbaren, bei der Wägung gefundenen abzuleiten, multipliziert man das letztere mit dem Verhältnis der Wagearme, als Zähler die Länge des Armes, an welchem die Gewichtstücke wirkten. Unabhängig von diesem Verhältnis, welches für feine Wägungen nicht einmal als unveränderlich betrachtet werden darf, machen die folgenden Verfahren.

1. Doppelwägung. Man wägt den Körper einmal auf der linken Schale, das andere Mal auf der rechten Schale. Wenn p_1 und p_2 in beiden Fällen die Gewichtstücke bezeichnen, welche die gleiche Einstellung des Zeigers bewirken, z. B. auf den mittelsten Teilstrich, so ist das gesuchte Gewicht p des Körpers das Mittel

$$p = \tfrac{1}{2}(p_1 + p_2).$$

Beweis s. 4 Beisp. 3. Zugleich findet man, wenn p_1 und p_2 auf den richtigen Nullpunkt der Wage bezogen sind, das Balkenverhältnis

$$\frac{R}{L} = \sqrt{\frac{p_2}{p_1}} = \sqrt{1 + \frac{p_2 - p_1}{p_1}} = 1 + \frac{p_2 - p_1}{2p_1}.$$

2. **Tariermethode.** Der Körper auf einer Schale wird durch irgendeine Belastung der anderen äquilibriert, am bequemsten mit einem zweiten Gewichtsatz, der nicht genau zu sein braucht; er wird alsdann weggenommen und durch Gewichtstücke bis zur gleichen Einstellung der Wage ersetzt. Letztere geben sein Gewicht.

II. Reduktion der Wägung auf den leeren Raum.

Zweck der Wägung ist meistens die Bestimmung der Masse eines Körpers durch Vergleichung mit bekannten Massen aus einem sogenannten Gewichtsatze. In der Luft erleiden sowohl Körper als Gewichtstücke einen Auftrieb gleich dem Gewicht der verdrängten Luft.

Wir nehmen an, daß der Gewichtsatz „im leeren Raum richtig" ist, d. h. daß er richtige Massen darstellt; ferner daß alle Gewichtstücke die gleiche Dichte haben. Letzteres trifft freilich bei den Bruchgewichten im allgemeinen nicht zu, indessen sind diese gegen die großen Stücke in Luft abgeglichen, und insofern Luftschwankungen bei ihnen für die gewöhnlichen Zwecke keinen merklichen Einfluß haben, so sind die Bruchgewichte bei der Wägung einfach so zu rechnen, wie wenn sie aus demselben Material beständen wie die großen.

Nennt man

m das scheinbare Gewicht des Körpers in der Luft, d. h. die Gewichtstücke, welche ihn in der Luft äquilibrieren,

λ die Dichtigkeit der Luft ($\lambda = 0{,}00120$ im Mittel. Siehe auch 18 und Tab. 6),

s die Dichtigkeit (das spezifische Gewicht) des Körpers,

σ die Dichtigkeit der Gewichtstücke (Messing $= 8{,}4$),

so ist das Gewicht M im leeren Raume

$$M = m\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right).$$

Beweis. Der Körper hat das Volumen $V = M/s$, die Gewichtstücke $v = m/\sigma$. Der Auftrieb ist gleich dem Gewicht der verdrängten Luft; also verliert der gewogene Körper $\lambda V = \lambda M/s$, die Gewichtstücke $\lambda v = \lambda m/\sigma$. Da die Gewichte nach Abzug dieser Verluste gleich sind, so ist also $M(1 - \lambda/s) = m(1 - \lambda/\sigma)$, woraus der obige Wert M sich nach S. 9, Formel 8 ergibt.

Es ist also zu dem gefundenen scheinbaren Gewicht m hinzuzufügen $m\lambda(1/s - 1/\sigma)$, eine Korrektion, welche mit der

Ungleichheit von s und σ wächst. Für λ genügt gewöhnlich der mittlere Wert 0,0012. Für einen Messinggewichtsatz können dann die bei verschiedenen sp. Gewichten s aus der Formel sich berechnenden Korrektionen aus Tab. 1 entnommen werden.

Beispiel. Die Korrektion des scheinbaren Gewichtes w einer Wassermenge, wenn man mit Messinggewichten ($\sigma = 8,4$) gewogen hat, beträgt $w \cdot 0,0012(1/1 - 1/8,4) = w \cdot 0,00106$ d. h. 1,06 mg auf jedes Gramm.

Auch wo es nicht auf das absolute Gewicht, sondern nur auf Gewichtsverhältnisse ankommt, wie bei chemischen Analysen, bedingt der Auftrieb unter Umständen beträchtliche Korrektionen, ohne deren Berücksichtigung Fehler von mehr als 1 Promille entstehen können. Analysiert man z. B. eine verdünnte Silberlösung durch die Wägung eines Quantums Lösung und des daraus erhaltenen Chlorsilbers (Dichtigkeit $= 5,5$), und sind P und p die von der Wage angegebenen Gewichte, so sind die auf den leeren Raum reduzierten $P(1 + 0,0012)$ und $p(1 + 0,0012/5,5)$. Der Chlorsilbergehalt beträgt also

$$\frac{p \cdot (1 + 0,0012/5,5)}{P \cdot (1 + 0,0012)} = \frac{p}{P}\left[1 - 0,0012\left(1 - \frac{1}{5,5}\right)\right] = \frac{p}{P} \cdot 0,9990.$$

Der unkorrigierte Wert p/P ist demnach um 0,1 % zu groß. Die Vernachlässigung solcher einfacher Korrektionen widerspricht der auf die Wägungen verwandten Sorgfalt und oft dem durch die Zahl der mitgeteilten Dezimalen erhobenen Anspruch auf Genauigkeit.

Schwankungen der Luftdichte an einem Orte übersteigen selten 0,00015. Sie werden gewöhnlich außer Betracht bleiben. Zu den Fällen, wo dies nicht zutrifft, gehört häufig das Wägen kleiner Mengen in größeren Gefäßen: das scheinbare Gewicht einer 100 gr schweren Platinschale kann wegen des Luftauftriebes um 1 mg schwanken.

Über die prinzipielle Frage, ob das Gramm eine Masse oder ein Gewicht vorstelle, vgl. die Bemerkung im Anhange über das absolute Maßsystem. In der gewöhnlichen Praxis der Messungen macht es selten einen Unterschied, ob man von Gewichten oder Massen spricht, insbesondere entstehen keine Irrtümer. Für die chemische Analyse oder irgend eine andere auf Prozente hinausführende Operation ist es gleichgültig, ob man Massen oder Gewichte (im leeren Raum) meint. Ebenso wird man zu den nämlichen Zahlen geführt, wenn man von dem spezifischen Gewicht eines Körpers oder unter dem Namen Dichtigkeit von der spezifischen Masse eines Körpers redet; vorausgesetzt, daß man, wie immer, diese Eigenschaften des Körpers mit denjenigen des Wassers als Einheit vergleicht. Wenn aber entweder die Körper mit ihrer Trägheit in Betracht kommen oder wenn andrerseits Gewichte zur Kraftmessung dienen, wie bei der Messung von Arbeit, Druck, Elastizität, muß man zwischen den Begriffen Masse und Gewicht streng unterscheiden.

14. Korrektionstabelle eines Gewichtsatzes.

Auf die Richtigkeit eines Gewichtsatzes darf man sich schon aus dem Grunde nicht verlassen, weil die Stücke sich durch den Gebrauch ändern.

Allgemein kommt die Aufgabe, die Fehler eines Gewichtsatzes zu bestimmen, darauf hinaus, daß man sich durch Ausführung so vieler Wägungen, als Gewichte zu prüfen sind, ebensoviele Gleichungen bildet, aus denen das Verhältnis der Wagearme und dasjenige der Gewichte zueinander abgeleitet wird.

Bei der gebräuchlichen Anordnung eines Gewichtsatzes verfährt man nach folgendem Schema. Wir bezeichnen die größeren Stücke mit

$$50' \;\; 20' \;\; 10' \;\; 10'' \;\; 5' \;\; 2' \;\; 1' \;\; 1'' \;\; 1'''.$$

Man führe eine Doppelwägung mit 50′ einerseits und der Summe der übrigen Gewichte andrerseits aus. Man finde dabei, daß die Wage einsteht (der Zeiger in der Stellung ist, welche er bei unbelasteter Wage annimmt), wenn

links	rechts
$50'$	$20' + 10' + \cdots + r$ mg
$20' + 10' + \cdots + l$ mg	$50'$

dann ist das Verhältnis der Wagearme (12)

$$R/L = 1 + (l - r)/100000$$

und

$$50' = 20' + 10' + \cdots + \tfrac{1}{2}(r + l).$$

Weiter vergleicht man 20′ mit 10′ + 10″ und 10′ mit 10″ sowie mit 5′ + 2′ + ⋯ Die Doppelwägung gibt auch in diesen Fällen größere Sicherheit, auch ist das Balkenverhältnis im allgemeinen von der Belastung etwas abhängig. An einer guten Wage mag man aber den oben gefundenen Wert als allgemeingültig annehmen und nur einseitig vergleichen. Es bedeutet dann ein Stück p, rechts aufgelegt, auf die Balkenlänge der linken Seite reduziert, $p \cdot R/L$.

Beispiel. Es sei $r = -0{,}63$ $\quad l = +2{,}73$ mg, so ist

$$50' = 20' + 10' + \cdots + 1{,}05 \text{ mg} \quad \text{und} \quad R/L = 1{,}000034.$$

Ferner sei bei der Vergleichung des 5 gr-Stückes mit der Summe der kleinen Gewichte gefunden, daß die Wage einsteht, wenn

links $5' + 0{,}06$ mg $\qquad$ rechts $2' + 1' + 1'' + 1'''$,

so würden an einer gleicharmigen Wage sich das Gleichgewicht halten $5' + 0{,}06$ mg und $(2' + 1' + \cdots) \times 1{,}000034$ oder $2' + 1' + \cdots + 0{,}17$ mg.

Folglich ist

$$5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + 0{,}11 \text{ mg}.$$

Diese Wägungen mögen ergeben haben, wobei den durch A, B etc. bezeichneten gefundenen Unterschieden gleich Zahlen als Beispiel beigeschrieben werden sollen:

$$50' = 20' + 10' + \cdots + A \qquad + 0{,}48 \text{ mg}$$
$$20' = 10' + 10'' \qquad + B \qquad + \ ,06 \ „$$
$$10'' = 10' \qquad + C \qquad + \ ,17 \ „$$
$$5' + 2' + 1' + 1'' + 1''' = 10' \qquad + D, \qquad - \ ,29 \ „$$

wo A, B, C, D natürlich positiv oder negativ sein können. Aus den Gleichungen muß der Wert der fünf Stücke, die Summe der einzelnen Gramme vorläufig als ein Stück betrachtet, in irgend einer Einheit ausgedrückt werden. Man wird, wenn man nicht etwa außerdem eine Vergleichung mit einem Normalgewicht vornimmt, diese Einheit so wählen, daß die Korrektionen der einzelnen Stücke möglichst klein werden, und das ist der Fall, wenn man die ganze Summe als richtig annimmt, d. h. wenn man setzt

$$50' + 20' + 10' + \cdots = 100 \text{ gr}.$$

Man bezeichne nun zur Abkürzung

$$S = \tfrac{1}{10}(A + 2B + 4C + 2D) \qquad + 0{,}070 \text{ mg}$$

so ist, wie man leicht nachweisen kann,

$$10' = 10 \text{ gr} - S \qquad - 0{,}07 \text{ mg}$$
$$10'' = 10 \ „ - S + C \qquad + \ ,10 \ „$$
$$5' + \cdots = 10 \ „ - S + D \qquad - \ ,36 \ „$$
$$20' = 20 \ „ - 2S + B + C \qquad + \ ,09 \ „$$
$$50' = 50 \ „ - 5S + A + B + 2C + D = 50 \text{ gr} + \tfrac{1}{2}A. \qquad + \ ,24 \ „$$

Die Probe für die Richtigkeit der Rechnung ist dadurch gegeben, daß, wenn man die Korrektionen in Zahlen bestimmt hat, ihre Summe $= 0$ sein muß und daß die vier Beobachtungs-Gleichungen erfüllt sein müssen.

Ferner habe man durch Vergleichung der Stücke $5'$ $2'$ $1'$ $1''$ $1'''$ untereinander gefunden

$$5' = 2' + 1' + 1'' + 1''' + a \qquad + 0{,}54 \text{ mg}$$
$$2' = 1' + 1'' \qquad + b \qquad + \ ,02 \ „$$
$$1'' = 1' \qquad + c \qquad - \ ,10 \ „$$
$$1''' = 1' \qquad + d. \qquad - \ ,13 \ „$$

Setzen wir jetzt zur Abkürzung

$$s = \tfrac{1}{10}(a + 2b + 4c + 2d + S - D), \qquad + 0{,}028 \text{ mg}$$

so ist ähnlich wie oben

$1' = 1$ gr $- s$	$-0{,}03$ mg
$1'' = 1$ „ $- s + c$	$-$,13 „
$1''' = 1$ „ $- s + d$	$-$,16 „
$2' = 2$ „ $- 2s + b + c$	$-$,14 „
$5' = 5$ „ $- 5s + a + b + 2c + d.$	$+$,09 „

Ebenso wird mit den kleinen Gewichtstücken verfahren.

Befolgt man bei dem Wägen die Regel, stets zu bilden:
die Gewichte

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10 etc. gr

aus den Stücken

1′	2′	2′+1′	2′+1′+1″	5′	5′+1′	5′+2′	5′+2′+1′	5′+2′+1′+1″	10′ etc.,

so kann man gleich für jede Ziffer aus jeder Dekade die Korrektion aufstellen, also für das obige Beispiel die Korrektionen in Hunderteln mg:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Zehner	— 7	+ 9	+ 2	+12	+24	+17	+33	+26	+36
Einer	— 3	—14	—17	—30	+ 9	+ 6	— 5	— 8	—21

etc. für Zehntel, Hundertel.

Wir haben bisher die Summe der größeren Gewichtstücke als richtig angenommen; für die meisten Arbeiten (chemische Analyse, spezifisches Gewicht), welche nur relative Wägungen verlangen, genügt dies. Soll die Fehlertabelle auf richtiges Grammgewicht bezogen werden, so ist es notwendig, die Gewichtstücke oder eins derselben mit einem Normalgewicht zu vergleichen (**13**). Die Rechnung ist ähnlich wie oben.

Zur Unterscheidung der Gewichtstücke von gleichem Nennwerte sollen die Ziffern in verschiedener Weise eingeschlagen oder mit einem Index versehen sein; andernfalls muß man zufällige Merkzeichen aufsuchen. Bei den Blechgewichten hilft man sich durch das Umbiegen verschiedener Ecken. — Auf den Gewichtsverlust in der Luft braucht für gewöhnliche Zwecke, wenn die größeren Stücke von gleichem Material sind, keine Rücksicht genommen zu werden, weil bei den kleineren der durch Schwankungen der Luftdichte entstehende Unterschied verschwindet; vgl. **12** II. — Zur Prüfung der kleinen Stücke wendet man womöglich eine leichtere, d. h. bei gleicher Schwingungsdauer empfindlichere Wage an. — Die Wägungen sind durch Schwingungsbeobachtung nach **10** auszuführen, wobei die Nullpunktsbeobachtung häufig wiederholt wird.

Häufig gebrauchte Gewichtstücke pflegen durch den Gebrauch leichter zu werden, so daß es kein Nachteil ist, wenn in einem neuen Satz die kleinen Stücke relativ etwas zu schwer sind.

Für andere Anordnungen von Gewichtsätzen findet man leicht ein ähnliches Schema. Die Stückelung 1 2 3 4 in jeder Dekade hat die Vor-

teile, daß keine Stücke von gleichem Nennwert vorkommen und daß jede Dekade in sich vergleichbar ist. Für feine Wägungen empfiehlt sich 1 2 3 4 5, wobei in jeder Dekade 12 Wägungen vorgenommen werden können, die mit kleinsten Quadraten ausgeglichen werden. — Die sparsamste Anordnung eines Satzes ist 1 3 9 27 81 .. ; durch Auflegen rechts und links kann man hiermit jede Zahl darstellen. In sich vergleichbar sind diese Stücke natürlich nicht.

15. Dichtigkeit oder spezifisches Gewicht. Bestimmungsmethoden.

Dichtigkeit oder spezifisches Gewicht s eines Körpers (vgl. Tab. 2 u. 3) heißt das Verhältnis seiner Masse zu der Masse eines gleichen Volumens Wasser von 4°. Anstatt des Massenverhältnisses kann auch das Verhältnis der Gewichte im leeren Raum gesetzt werden.

Im Centimeter-Gramm-System kann man spezifisches Gewicht auch das Verhältnis des Gewichtes zum Volumen nennen oder, einen homogenen Körper vorausgesetzt, das Gewicht der Volumeinheit[1]. Diese Beziehungen bleiben aber nicht gültig, wenn für das die Einheit der Dichtigkeit darstellende Wasser eine andere Temperatur als 4° gewählt wird.

Die beiden Begriffe Dichtigkeit (spezifische Masse) und spezifisches Gewicht sind im Prinzip zu unterscheiden, wie gr und gr-Gewicht. Dem Zahlenwert nach sind sie gleichbedeutend.

Spezifisches Volumen nennt man den reziproken Wert der Dichtigkeit, d. h. das Volumen der Masse 1 einer Substanz. Molekularvolumen heißt das Molekulargewicht eines Körpers multipliziert mit seinem spezifischen Volumen oder dividiert durch seine Dichtigkeit; das ist also das in ccm ausgedrückte Volumen eines Gramm-Moleküls (eines „Mols"), d. h. einer Masse des Körpers von einer Anzahl Gramme gleich seinem Molekulargewicht. Entsprechende Bedeutung haben Äquivalent- und Atom-Volumen.

Über Gase und Dämpfe vgl 18 bis 20.

Die anzubringenden Korrektionen siehe unter 16.

A. Für Flüssigkeiten.

1. Kalibriertes Gefäß (Meßflasche, Pipette, Meßcylinder, Bürette).

Beträgt die Masse m gr, das Volumen v ccm, so ist nach der Definition die Dichtigkeit $s = m/v$.

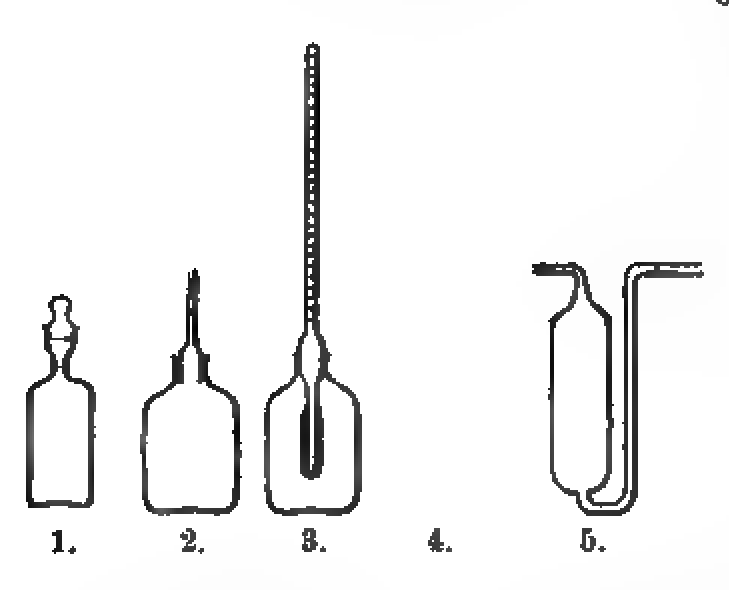
1) Streng genommen ist zu berücksichtigen, daß das geometrisch ausgemessene Kubikcentimeter nicht genau 1 gr, sondern 0,99997 gr Wasser von 4° faßt (Anm. zu S. 61) Bei den Dichteangaben gilt also eigentlich das Volumen 1,00003 ccm („Milliliter") als Einheit. Wir berücksichtigen diesen Unterschied nicht.

Man wägt z. B. ein in einer Meßflasche abgemessenes Volumen als die Differenz der Gewichte der leeren und der gefüllten Flasche. Für genäherte Bestimmungen ist oft auch eine Pipette brauchbar. Wenn die Auslaufmenge nicht sicher genug ist, so kann man eine auf Trockenfüllung geeichte Pipette zunächst trocken mit einem Fläschchen zusammen wägen, alsdann die Pipette füllen und ihren in das Fläschchen ausgelaufenen Inhalt wieder mit Pipette und Fläschchen zusammen wägen.

Bei dem Gebrauch eines geteilten Cylinders, z. B. auch einer Bürette, wird man meistens das Gewicht einer ausgegossenen oder ausgeflossenen Menge bestimmen und hat dann die für den Auslauf geltenden Volumina in Rechnung zu setzen.

2. Pyknometer.

Man wägt durch Differenzbestimmung gegen das leere Gefäß die Flüssigkeitsmenge m und die Wassermenge w, welche von einem und demselben Gefäß aufgenommen wird. Dann ist $s = m/w$. Ein gewöhnliches Fläschchen, bis zum Rande oder zu einem Strich am Halse gefüllt, liefert leicht die 3te Dezimale richtig. Genauer arbeiten die mit dem Namen Pyknometer, Tarierfläschchen, bezeichneten konstanten Gefäße (Fig.), welche ganz oder bis zu einer Marke gefüllt werden, am genauesten die vierte und fünfte Form, bei denen die eine Öffnung zum Einlassen der Flüssigkeit, die andere zum Auslassen bez. Absaugen der Luft dient. Nr. 1 wird mit einem langen dünnen Trichter gefüllt, mittels einer dgl. Pipette entleert oder unter Einführung eines Glasrohrs zum Lufteintritt ausgegossen. Verfügt man nur über einige Tropfen, so lassen sich ganz kleine Fläschchen anwenden, wie sie zu Dampfdichtebestimmungen (19 B) gebraucht werden. — Nr. 5 (Sprengel-Ostwald), durch Saugen von der Spitze bis zu einer Marke gefüllt, hängt man mit einem Drahte an die Wage. Genau stellt



man die Füllung ein, indem man an der Spitze mit Fließpapier etwas absaugt oder mittels eines vorgehaltenen Tröpfchens etwas einsaugen läßt. Die Kenntnis der Temperatur wird hier und bei Nr. 1 durch ein Bad von konstanter Temperatur erzielt, in welchem das Pyknometer sich aber hinreichend lange befunden haben muß. Über Füllung und Temperaturbestimmung von Nr. 2 vgl. B 2. Über die Korrektion wegen Temperaturschwankungen vgl. **16**.

Bequemer als Austrocknen des Gefäßes vor einer Neufüllung wird Vorspülen mit der neuen Flüssigkeit sein.

3. Auftriebsmethode.

Man wägt einen mit Faden oder Draht an die Wage gehängten Körper (Glaskörper) in der Luft (p_l), in der Flüssigkeit (p_f) und im Wasser (p_w). Beträgt der Gewichtsverlust in der Flüssigkeit $m = p_l - p_f$, im Wasser $w = p_l - p_w$, so ist wieder $s = m/w$. Denn wenn v das Volumen des Glaskörpers bedeutet, so ist nach dem Archimedischen Gesetz der Auftrieb (Gewichtsverlust) je gleich dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeit, also $m = v \cdot s$ und $w = v \cdot 1$. Korrektionen in **16.**

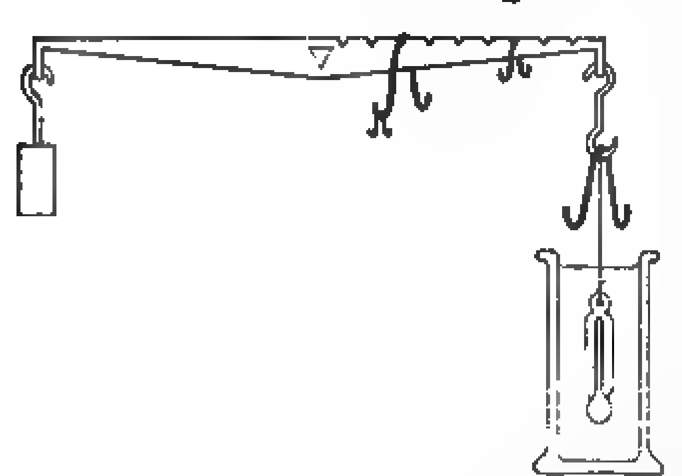
Zum Aufhängen dient eine kürzere Wagschale mit Häkchen oder, mangels eines solchen, ein Haken im Bügel der Wagschale, wobei die Flüssigkeit auf einem Tischchen über der Wagschale steht (Fig.).

Die Aufhängeschlinge des Glaskörpers soll ganz untertauchen. Hauptfehlerquelle ist die Reibung in der Oberfläche bez. die Unregelmäßigkeit in der Benetzung des Aufhängefadens, welche bei Metalldrähten, besonders im Wasser, erheblich sein kann. Platindraht, den man platiniert (8, 18) und dann geglüht hat, vermindert den Fehler. — Bequem wird als Senkkörper ein kurzes, dickes Thermometer gebraucht. Die Rechnung wird erleichtert, wenn der Auftrieb w des Körpers in Wasser von 4° eine runde Zahl beträgt, z. B. 10 gr oder 30 gr.

Man soll darauf achten, daß nicht in der Aufhängeöse des Senkkörpers ein Luftbläschen sitzen bleibt!

Über die Beobachtungsweise bei Bestimmungen bis in die 6te Dezimale, besonders für verdünnte Lösungen, vgl. Kohlrausch u. Hallwachs, Wied. Ann. 50, 118. 1893; 53, 15. 1894; 56, 185. 1895.

Mohr'sche Wage. Ein Glaskörper ist mit einem feinen Draht an einem dezimal geteilten Wagebalken äquilibriert. Der Auftrieb des Körpers in Wasser ist gleich dem Gewichte des größten Reiters; die anderen Reiter sind 10, 100 bez. 1000 mal leichter. Die Teilstriche des Wagebalkens, auf welche die Reiter aufgesetzt werden müssen, um den Auftrieb der Flüssigkeit auf den untergetauchten Glaskörper zu kompensieren, geben ohne weiteres die einzelnen Dezimalen des spezifischen Gewichtes an, z. B. in der Figur 1,373.



Prüfung der Mohr'schen Wage. 1) die Reitergewichte sollen sich wie 1 : 10 : 100 verhalten; 2) die Balkenteilung soll den Horizontalabstand der Mittel- und Endschneide in 10 gleiche Strecken teilen. Um dies zu prüfen, hängt man an den anderen Wagebalken eine kleine äquilibrierte Wagschale, setzt den größten Reiter auf den Teilstrich 1, 2 etc. auf und untersucht, ob derselbe dabei Gewichten auf der Wagschale entspricht, welche sich wie 1 : 2 etc. verhalten; 3) die Wage soll im Wasser von der Temperatur t diejenige Dichtigkeit zeigen, welche in Tab. 4 zu t gehört. Zeigt die Wage Q' statt Q, so sind ihre Angaben sämtlich mit Q/Q' zu multiplizieren. Eine gute Mohr'sche Wage kann mit feinem Platindraht (vgl. oben) die 4te Dezimale noch einigermaßen richtig liefern.

4. Gewichtsaräometer. Schwebemethode.

Ein Schwimmkörper wiege P gr und bedürfe einer Auflage von p bez. p' gr, um bis zu einem bestimmten Volumen eintauchend in Wasser bez. einer anderen Flüssigkeit zu schwimmen. Dann ist das spez. Gewicht der letzteren offenbar $s = \frac{P+p'}{P+p}$. Die ursprüngliche Senkwage von Nicholson hat eine Marke am Halse, bis zu der sie jedesmal eintaucht, was aber zu Kapillaritäts-Unsicherheiten führt.

Über ein genaueres Aräometer vgl. Lohnstein, ZS. f. Instr. 1894, 164.

Unter diesem Fehler leiden Schwimmer nicht, die man ganz untersinkend durch Auflagegewichte zum Schweben bringt. Von den Gewichten (sp. G. $= \sigma$) ist in der Berechnung ihr Auftrieb p/σ im Wasser bez. $p's/\sigma$ in der anderen Flüssigkeit abzuziehen.

Über eine Anordnung zu diesem Zweck und über die Korrektionen wegen Temperatur usw. vgl. z. B. Warrington, Phil. Mag. (5) 48, 498. 1899; Nansen, Norweg. North Pol. Exp. X. 1900.

5. Skalenaräometer. Senkwage.

Ein schwimmender Körper sinkt so weit ein, daß die verdrängte Flüssigkeit gerade sein Gewicht hat. Die Senkwage hat einen so tief liegenden Schwerpunkt, daß der Stiel beim Schwimmen aufrecht steht.

Der Teilstrich, bis zu welchem der Stiel einsinkt, zeigt entweder die Dichtigkeit oder deren reziproken Wert, das spezifische Volumen oder den Gehalt einer bestimmten Lösung, oder endlich sogenannte „Dichtigkeitsgrade".

Bei Baumé z. B. bedeutet	0°	13°	24°	34°	42°	49° etc.
das spezifische Gewicht	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5

Die Ablesung des Aräometers geschieht an der Oberfläche durch die Flüssigkeit hindurch, indem man das Auge so hält, daß die Fläche als Linie verkürzt erscheint. Das Aräometer soll in Wasser von der Temperatur t die Zahl angeben, welche laut Tab. 4 zu t gehört. Man prüft andere Punkte der Skale in Flüssigkeiten von anderweitig ermitteltem spez. Gewicht. Eine große Genauigkeit wird durch die Ablesefehler und die Kapillarität verhindert.

6. Hydrometer.

Die Höhen zweier Flüssigkeitssäulen, welche sich in kommunizierenden Röhren das Gleichgewicht halten, stehen im umgekehrten Verhältnis der Dichtigkeiten. Über Kapillaritäts-Fehler oder Korrektionen s. **58** I.

Vgl. auch **44** IV 4.

Bestimmung des Gehaltes einer Lösung aus ihrem spezifischen Gewicht.

Man geht in die Tabelle (für wässerige Lösungen z. B. Tab. 8; ausführlicher bei Landolt-Börnstein oder in den Kalendern usw. für chemische und technische Zwecke) mit dem auf die Temperatur der Tabelle reduzierten spez. Gewicht ein. Vgl. 9.

B. Für feste Körper.

Die den Körpern anhaftenden Luftbläschen sind bei größeren Stücken durch wiederholtes Herausziehen oder mit dem Pinsel, bei kleinen durch Schütteln oder Auskochen oder mit der Luftpumpe zu beseitigen.

1. Wägung und Volummessung.

Haben m gr des Körpers das Volumen v ccm, so ist die Dichtigkeit $s = m/v$. Die Ausmessung kann bei regelmäßiger Gestalt des Körpers mit dem Maßstabe geschehen. Ein Cylinder (Draht) von der Länge l und dem Halbmesser r hat das Volumen $l \cdot r^2 \pi$, eine Kugel $\frac{4}{3} r^3 \pi$ etc.

Bei unregelmäßiger Gestalt kann man das Volumen messen, um welches eine in einer kalibrierten Röhre enthaltene Flüssigkeit bei dem Hineinwerfen des Körpers ansteigt. Besonders auf zerkleinerte Substanzen ist die Methode leicht anwendbar. Für in Wasser lösliche Substanzen dienen z. B. Alkohol, Petroleum, Toluol oder auch eine gesättigte Lösung der Substanz. Auch kann man das Volumen bestimmen, indem man den Körper in ein ganz gefülltes Gefäß mit genau definiertem Ausguß bringt und die hierbei ausfließende Menge wägt.

2. Pyknometer (s. Nr. 2 u. 3 in Fig. S. 66).

Dasselbe wiege mit Wasser gefüllt P, mit Wasser und dem Körper P', während der Körper selbst m wiege. Dann berechnet sich die verdrängte Wassermenge $w = P + m - P'$ und $s = m/w$. Besonders bei kleinen Körpern wird das Verfahren gebraucht, doch sind alsdann auch möglichst kleine Fläschchen anzuwenden, bei denen man sich überzeugt hat, daß sie, wiederholt mit Wasser gefüllt, nach Anbringung der Temperaturkorrektion hinreichend konstante Füllungen enthalten. Wenn die Temperatur beider Füllungen verschieden ist (vgl. **16**), so hat man die Füllung mit Wasser allein (Temp. $= t$) auf die andere Temperatur t' umzurechnen. Dies geschieht bezüglich der Ausdehnung des Wassers durch Addition von $W \cdot (Q' - Q)$, wenn Q und Q' die Dichtigkeiten des Wassers bei t und t' bedeuten (Tab. 4) und bezüglich des Glases durch Addition von $W \cdot 3\beta (t' - t)$, wenn 3β den Volumausdehnungskoeffizienten des

Glases und W' das Nettogewicht der ganzen Wasserfüllung bedeutet; das letztere braucht nur genähert bekannt zu sein.

Hat das Pyknometer kein Thermometer, so nimmt man entweder die Temperatur der Spritzflasche, oder man füllt zunächst nur so weit, daß man ein kleines Thermometer einführen kann. Demnächst füllt man den kleinen Rest auf und setzt den durch Aussaugen von Tropfen befreiten, mit einer unwägbaren Spur von Fett eingeriebenen Stöpsel rasch ein. Hat derselbe eine hinreichende Wandstärke, so füllt er sich; man trocknet ausgespritzte Flüssigkeit sofort ab und tupft nötigenfalls mit einem Fließpapierspitzchen bis zur Marke aus. Spätere Temperaturänderungen sind gleichgültig, wenn sie nicht etwa ein Überfließen bewirken. Die Flüssigkeit soll also nicht viel kälter als die Zimmerluft sein.

3. Auftriebsmethode.

Hat der Körper in der Luft das Gewicht m, unter Wasser das Gewicht p, ist also der Auftrieb $w = m - p$, so ist $s = m/w$.

Mit der Wage. Man wägt den Körper für sich in Luft (m); dann, an einem dünnen fettfreien Faden oder Draht an einer Wagschale aufgehängt (vgl. A 3) unter Wasser (p'). Das für sich bestimmte Drahtgewicht von p' abziehend erhält man p. Von dem hiermit berechneten Auftriebe ist nötigenfalls der Auftrieb des Drahtes abzuziehen, den man leicht schätzen kann, indem man aus dem Verhältnis der untergetauchten zur ganzen Länge das Gewicht des untergetauchten Drahtstückes berechnet; letzteres, dividiert durch die Dichtigkeit des Drahtes (Tab. 2), gibt seinen Gewichtsverlust im Wasser. — Ist der Draht oder ein Körbchen, welches den Körper bei der Wägung aufnimmt, von vornherein konstant untertauchend angehängt, so genügt es, ihn ein für allemal zu tarieren und nicht weiter zu berücksichtigen.

Bei der Wägung in Wasser nehmen die Schwingungen der Wage rasch ab; man wird meistens in der Ruhe beobachten müssen. — Der Aufhängefaden soll dünn sein und durch die Oberfläche nur einmal hindurchtreten, um die Kapillarkräfte möglichst zu vermindern; vgl. auch A 3. Das Wasser soll nahe

die Zimmertemperatur haben, oder man muß besonders geschützte Bäder anwenden. Bei Beobachtung im geschlossenen Wagekasten ist ein Thermometer von beistehender Form bequem.

In Wasser lösliche Körper wägt man in einer anderen Flüssigkeit von bekannter Dichtigkeit. Mit letzterer ist dann das wie oben berechnete Resultat zu multiplizieren.

Leichte Körper werden durch Verbindung mit einem anderen von hinreichendem Gewicht zum Untersinken gezwungen; z. B. mit einer Metallklemme oder einer Glocke von Drahtnetz, unter welcher man den Körper aufsteigen läßt. Der Belastungskörper kann bei allen Wägungen im Wasser bleiben.

Zerkleinerte Körper legt man in ein Schälchen, welches unter Wasser hängt und tariert ist.

Kann man einen Körper nicht an die Wagschale hängen, so läßt sich vielleicht ein Gefäß mit Wasser auf die Wage stellen und seine Gewichtszunahme bestimmen, wenn der mit einem Faden an einem festen Stativ aufgehängte Körper untergetaucht wird. Diese Zunahme ist gleich dem scheinbaren Gewichtsverlust des Körpers im Wasser.

Mit der Nicholson'schen Senkwage. Man belastet die obere Schale des Schwimmers, jedesmal bis zu dessen Einsinken bis an die Marke am Halse: 1) bloß durch Gewichte (P); 2) durch Körper und Gewichte (P'); 3) durch Gewichte, während zugleich der Körper unter Wasser auf der unteren Schale liegt (P''). Dann gibt $P - P' = m$ das Gewicht des Körpers, $P'' - P' = w$ das Gewicht des von ihm verdrängten Wassers und m/w wieder die Dichtigkeit des Körpers. Temperaturschwankungen beeinträchtigen die Genauigkeit; um so mehr, je kleiner der Körper gegen die Senkwage ist. Die Sicherheit der Einstellung wird durch Reinigen ihres Halses mit Weingeist erhöht.

Mit der Jolly'schen Federwage. Ein spiraliger Draht trägt zwei übereinandergehängte Wagschalen, von denen die untere konstant in ein Gefäß mit Wasser taucht. Abgelesen wird die Einstellung einer unten am Spiraldrahte angebrachten Marke vor einem Maßstabe, der, um die Parallaxe zu vermeiden, auf einem spiegelnden Glase angebracht ist. 0,1 mm läßt sich

noch schätzen. Mit einem Gewichtsatz kann man nach der Tariermethode (**13**, I 2) wägen, indem man die Einstellung mit dem zu bestimmenden Gewichte abliest und die Gewichtstücke ausprobiert, welche die gleiche Senkung bewirken, oder indem man immer bis zu einem bestimmten Teilstrich belastet.

Ein einfacheres Wägungsprinzip mit der Federwage ist auch ohne Gewichtsatz dadurch gegeben, daß die Senkung h dem angehängten Gewichte p nahe proportional ist, wonach $p = A \cdot h$. Durch eine einmalige Belastung mit einem bekannten Gewicht kann der Faktor A bestimmt werden. Da bei Dichtebestimmungen die Gewichtseinheit sich heraushebt, so kann man hier einfach den Skalenteil der Federwage als Einheit nehmen. Senkt sich die Wage durch Auflegung des Körpers auf die obere Schale um h, dagegen um h', wenn der Körper unter Wasser auf die untere Schale gelegt wird, so ist also $s = h/(h - h')$.

Genauer setzt man $p = Ah + Bh^2$. Man bestimmt A und B aus zwei Belastungen, deren eine etwa die größte anzuwendende Senkung bewirke, während die andere halb so groß sein mag. Man kann hiernach leicht eine Tabelle aufstellen, welche zu den Senkungen die zugehörigen Belastungen angibt.

Federwagen werden bekanntlich in mannigfacher Form gebraucht; die einfachste sehr empfindliche Wage für kleine Gewichte ist z. B ein am einen Ende befestigter horizontaler elastischer dünner Faden (Quarz, Stahl), dessen freies Ende mikroskopisch abgelesen wird. Salvioni, Beibl. **1902**, 281. Auch die Torsion gespannter, mit einem Querdraht versehener Fäden ist brauchbar.

4. Schwebemethode.

Sehr kleine, selbst pulverförmige Körper kann man bestimmen, indem man eine Flüssigkeit mischt, in welcher die Körper weder sinken noch steigen. Geeignet können Mischungen von Chloroform (1,52) oder Bromoform (2,9) oder Methylenjodid (3,3) mit Benzol (0,89), Toluol (0,89), Xylol (0,87), Acetylentetrabromid (3,0) oder wässerige Lösungen von Kaliumquecksilberjodid (Thoulet'sche Lösung; bis 3,20) sein.

Zur genauen Abgleichung korrigiert man zweckmäßig etwa eine noch ein wenig zu leichte mit einer etwas zu schweren

Mischung. Auch kann man Temperaturänderungen zur Abgleichung benutzen, da die Flüssigkeiten sich stark, die festen Körper sich schwach ausdehnen.

Die Dichtigkeit der Flüssigkeit ermittelt man am einfachsten mit der Mohr'schen Wage, während die Körper schweben. — Durch partielles Abdestillieren zerlegt man die Flüssigkeiten nach dem Gebrauch wieder.

Vgl. auch Retgers, ZS f. phys. Ch. 3, 289 u. 497. 1889; 4, 189. 1889; 11, 328. 1893.

16. Korrektion einer Dichtigkeitsbestimmung wegen des Luftauftriebs und wegen der Temperatur.

I. Reduktion auf den leeren Raum und auf Wasser von 4°.

a) Für flüssige wie für feste Körper sind in **15** A und B bei Nr. 1 die gefundenen Gewichte, wenn die Genauigkeit es erfordert, auf den leeren Raum zu reduzieren (**13** II; Tab. 1). Wie man leicht sieht, kommt dies darauf hinaus, daß jedes spez. Gewicht, welches aus der Abwägung eines bekannten Volumens in Luft mit Messinggewichten ohne Korrektionen berechnet worden ist, um den Auftrieb der Volumeinheit in der Luft, d. h. um 0,00106 vergrößert werden muß. Vgl. **23** oder **13** II und Tab. 1.

b) Die unter Nr. 2 und 3 aufgezählten Methoden der Dichtigkeitsbestimmung mit dem Pyknometer und nach dem Archimedischen Gesetz verlangen eine Korrektion auf Wasser von 4° und den leeren Raum, welche nach der folgenden gemeinschaftlichen Regel ausgeführt wird. Es bedeute

Q die Dichtigkeit des Wassers, welches zur Beobachtung gedient hat (Tab. 4);

λ die Dichtigkeit der Luft bezogen auf Wasser (der Mittelwert $\lambda = 0{,}00120$ genügt fast immer; andernfalls vgl. **18** u. Tab. 6);

m das scheinbare, d. h. von der Wage angegebene Gewicht des in der Luft gewogenen festen oder flüssigen Körpers; oder bei Bestimmung einer Flüssigkeit mit dem Glaskörper den scheinbaren Gewichtsverlust des in die Flüssigkeit getauchten Körpers;

w das scheinbare Gewicht des dem Volumen des Körpers gleichen Volumens Wasser von der Dichtigkeit Q.

Die Größe w kann also sein:

1. für Flüssigkeiten: das beobachtete Gewicht des Wassers in dem Pyknometer, oder des von dem Glaskörper verdrängten Wassers;

2. für feste Körper: der beobachtete Gewichtsverlust des Körpers im Wasser bei einer Bestimmung nach dem Archimedischen Gesetz mit Wage oder Senkwage; oder das Gewicht des durch Einbringen des Körpers ausgeflossenen Wassers bei Anwendung des Pyknometers.

m/w ist das rohe unkorrigierte spezifische Gewicht. Das richtige ist

$$s = \frac{m}{w}(Q - \lambda) + \lambda \text{ oder auch } = \frac{m}{w}Q + \left(1 - \frac{m}{w}\right)\lambda. \qquad 1.$$

Strenge Vorschriften für feine Messungen, bei denen die Schwankungen der Luftdichte zu berücksichtigen sind, s. z. B. bei R. Kohlrausch, prakt. Regeln zur genauen Best. d. spez. Gewichtes. Marburg 1856.

Vgl. über die Rechnung auch die folgende Seite und über ihre Vereinfachung, falls man denselben Glaskörper oder dasselbe Pyknometer wiederholt benutzt, III.

Diese Formel korrigiert also die sämtlichen nach 2 und 3 in **15** A oder B bestimmten Werte auf den leeren Raum und Wasser von 4°.

B e w e i s. Wenn der Körper, fest oder flüssig, in der Luft das Gewicht m hat, während er die Luftmenge l verdrängt, so wiegt er im leeren Raume $m + l$. Bezüglich der Bestimmung von w können drei Fälle unterschieden werden. Hat man das Gewicht w des gleichen Volumens Wasser durch Abwägen bestimmt, so ist das Gewicht des Wassers im leeren Raume $= w + l$. — Oder wenn der scheinbare Gewichtsverlust w eines festen Körpers durch Eintauchen in Wasser gemessen wurde, so ist dieser Verlust ebenfalls um l zu vermehren, da das Gewicht im leeren Raume um l größer gewesen wäre als in der Luft. — Ebenso ist drittens, wenn die Dichtigkeit einer Flüssigkeit dadurch bestimmt wird, daß man den scheinbaren Gewichtsverlust eines und desselben Körpers in der Flüssigkeit und im Wasser ermittelt, jeder Verlust um l zu vergrößern.

Das Wasser aber habe nicht die Dichtigkeit 1, sondern Q gehabt, so würde dasselbe Volumen Wasser bei 4° nicht $w + l$, sondern $(w + l)/Q$ wiegen. Man erhält also in allen Fällen die wahre Dichtigkeit s des Körpers $s = (m + l)Q/(w + l)$. Da nun $(w + l)/Q$ auch das Volumen der verdrängten Luftmasse bedeutet, welche das spezifische Gewicht λ hat, so

ist $l = \lambda(w + l)/Q$, woraus $l = w\lambda/(Q - \lambda)$. Den letzteren Wert für l in s eingesetzt, erhält man obigen Ausdruck.

Beispiel. Ein Stück Silber wiege in der Luft . . $m = 24{,}312$ gr
in Wasser von 19,4° . . . . 21,916 gr
so ist der scheinbare Gewichtsverlust im Wasser $w = 2{,}396$ gr

Das unkorrigierte spezifische Gewicht würde also sein

$$m/w = 24{,}312/2{,}396 = 10{,}147.$$

Das korrigierte erhält man, da nach Tab. 4 für 19,4° $Q = 0{,}99835$,

$$s = 10{,}147\,(0{,}99835 - 0{,}00120) + 0{,}0012 = 10{,}119.$$

Man rechnet im Kopf, wenn man 0,99835 0,00120 = 1 — 0,00285 setzt.

Der Einfluß des Gewichtsverlustes in der Luft verschwindet nur, wenn die Dichtigkeit gleich 1 ist. Er erreicht für $s = 20$ den Wert 0,023. Würde man noch die Ausdehnung des Wassers vernachlässigen, so könnte hier ein um 0,08 zu großes Resultat entstehen.

II. Korrektion wegen Temperaturschwankungen bei Beobachtungen mit dem Pyknometer oder dem Glaskörper.

Neben der vorigen Korrektion ist noch, falls die Temperatur zwischen den verschiedenen Wägungen sich geändert hat, folgendes zu berücksichtigen.

Die Wägung mit bez. im Wasser, bei der Temperatur t_0 ausgeführt, habe das scheinbare Nettogewicht bez. den Auftrieb w_0 ergeben. Man sucht aber im allgemeinen die entsprechende Größe (w) für eine andere Temperatur t, bei der die Wägung mit bez. in der zu bestimmenden Flüssigkeit (oder etwa nach Einbringen eines festen Körpers ins Pyknometer) angestellt wurde. Die Dichtigkeit des Wassers bei t_0 und t sei Q_0 und Q; der kubische Ausdehnungskoeffizient des Gefäßes oder des Senkkörpers (1/40000 für mittleres Glas) heiße 3β. Dann ist $w = w_0[1 + 3\beta(t - t_0)]\,Q/Q_0$, oder auch genau genug

$$w = w_0 + w_0[(Q - Q_0) + 3\beta(t - t_0)]. \qquad 2.$$

Dieses w ist in Formel 1 S. 75 einzusetzen.

Denn nach Formel 8 S. 9 kann man schreiben

$$\frac{Q}{Q_0} = \frac{1 - (1 - Q)}{1 - (1 - Q_0)} = 1 + (Q - Q_0).$$

$(Q - Q_0) \cdot 3\beta(t - t_0)$ verschwindet gegen 1.

Oberhalb 4° ist natürlich $Q - Q_0$ negativ, wenn $t > t_0$ ist. Der ganze in steile Klammern gesetzte Ausdruck läßt sich für

gewöhnliches Glas aus Tab. 4 als die Differenz der im zweiten Teil für t_0 und t gegebenen Zahlen entnehmen, wobei die für t geltende von der für t_0 geltenden abzuziehen ist.

Besonders bei der Dichtebestimmung fester Körper mit einem relativ großen Pyknometer dürfen diese Korrektionen nicht übersehen werden.

III. Zusammenfassung aller Korrektionen bei wiederholtem Gebrauch desselben Pyknometers oder Glaskörpers.

Es sei das scheinbare Gewicht der Pyknometerfüllung mit Wasser oder der scheinbare Auftrieb des Glaskörpers im Wasser bei t_0 gleich w_0 bestimmt worden. Man stellt den Ausdruck

$$W = w_0 \frac{1 + 3\beta(t - t_0)}{Q_0 - 0{,}00120}$$

über das bei den Wägungen mit oder in den anderen Flüssigkeiten vorkommende Temperaturintervall in einer Tabelle oder Kurve dar. Für eine Bestimmung bei t entnimmt man hieraus den Wert W und berechnet nun das (natürlich für t geltende) spez. Gewicht s, wenn m das scheinbare Gewicht der Flüssigkeitsfüllung oder den scheinbaren Auftrieb in der Flüssigkeit bedeutet,

$$s = \frac{m}{W} + 0{,}00120.$$

Beweis durch Vereinigung der Formeln 1 u. 2 S. 75 u. 76.

IV. Reduktion auf eine Normaltemperatur.

s gilt für die Wägungstemperatur t. Für einen festen Körper ist t seine Temperatur im Wasser.

Hieraus wird die Dichtigkeit S bei einer anderen Temperatur T mit Hilfe des kubischen Ausdehnungskoeffizienten α (oder 3β; Tab. 11) gefunden $S = s[1 + \alpha(t - T)]$.

Die meisten Flüssigkeiten haben eine ungleichförmige Ausdehnung, welche aus Formeln oder aus Tabellen entnommen werden muß. Die Volumina derselben Flüssigkeitsmenge seien für die Temperaturen T und t gleich V und v angegeben. Dann ist $S = s \cdot v / V$.

Vgl. Tab. 3a, 3b u. 12; Gerlach, Salzlösungen; Bender, Wied. Ann. 22, 179. 1884; 31, 872. 1887; Forch, Wied. Ann. 55, 100. 1895; Landolt u. Börnstein Tab. 48 ff.

17. Volumenometer (Say, Kopp).

Das Instrument bezweckt die Dichtebestimmung eines Körpers, der nicht in Berührung mit einer Flüssigkeit kommen soll. Zur Anwendung kommt das Boyle-Mariotte'sche Gesetz, wonach bei ungeänderter Temperatur das Produkt aus Druck und Volumen einer Luftmasse konstant ist.

Eine konstante Luftmenge ist über Quecksilber zunächst unter dem Druck H mm Quecksilber (meist dem atmosphärischen Barometerstand) abgesperrt. Man vergrößere bez. vermindere das ursprüngliche, zu bestimmende Volumen V um die gemessene Größe v und beobachte die dabei stattfindende Druckänderung h mm Quecksilber, so ist $VH = (V \pm v) \cdot (H \mp h)$, also

$$V = v \cdot \frac{H-h}{h} \text{ bez. } = v \frac{H+h}{h}.$$

Nachdem so das Volumen des leeren Gefäßes gemessen worden ist, bringt man den Körper hinein und verfährt ebenso. Ergibt die Messung jetzt bei der Druckhöhe H als Ausgangsvolumen V', so ist $V - V'$ das Volumen des Körpers, die Dichtigkeit ist also sein Gewicht, dividiert durch diese Differenz.

v und h dürfen nicht zu klein sein, wenn ein brauchbares Resultat entstehen soll. — Man vermeide Temperaturänderungen der abgeschlossenen Luftmenge durch die Nähe des Körpers usw. während des Versuches.

Von besonderen Formen s. u. a.: an die Form von Say angeschlossen Guglielmo, Atti d. Lincei 12 [2], 617. 1903; dem Jolly'schen Luftthermometer ähnlich angeordnet Paalzow, Wied. Ann. 13, 332. 1881; in einfacherer Anordnung Oberbeck, ib 67, 209. 1899. — Ein Instrument, welches den Körper mit einer gewissen Luftmenge in eine Barometerleere aufnimmt, schon für kleine Mengen brauchbar, bei Zehnder, Ann. d. Phys. 10, 40. 1903.

18. Umrechnung der Zustände von Gasen. Berechnung der Dichtigkeit der Luft oder eines anderen Gases.

Bei konstanter Temperatur ist die Dichtigkeit s eines vollkommenen Gases seinem Drucke H proportional oder das Volumen v dem Drucke umgekehrt. Es gilt also (Gesetz von Boyle u. Mariotte; 1662 u. 1679)

$$s : s' = H : H' \quad \text{und} \quad v : v' = H' : H \quad \text{oder} \quad v \cdot H = \text{Const.}$$

Bei konstantem Druck dehnt sich ein Gas für jeden Grad Temperaturerhöhung um gleich viel aus, nämlich um 1/273 oder 0,00367 des Volumens v_0, welches ihm bei 0° zukommt[1]). Also gilt (Gesetz von Gay-Lussac; 1802)

1) Wasserstoff etwas weniger, die andern Gase etwas mehr als 0,00367. — Genauer ist 1/0,00367 = 272,5. Vgl. auch 42 u. Tab. 12a.

$$v = v_0(1 + 0{,}00367\,t) = v_0(1 + \tfrac{1}{273}t) \quad \text{oder} \quad = \tfrac{1}{273}v_0(273 + t).$$

$273 + t$, d. h. die Temperatur auf der Centesimalskale gezählt, aber von $-273°$C als Nullpunkt, mit anderen Worten, wenn man an den Eispunkt statt 0 die Zahl $+273$ schreibt, heißt die **absolute Temperatur** T.

Zusammengehörige Volumina v, Dichtigkeiten s, Drucke H und Temperaturen t einer bestimmten Gasmasse sind hiernach verbunden, außer durch $v \cdot s = \text{Const.}$, durch die Beziehungen

$$\frac{Hv}{1 + 0{,}00367\,t} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{Hv}{T} = \text{Const.} \quad \text{oder} \quad \frac{H}{sT} = \text{Const.}$$

Durch die Kombination der Gesetze von Boyle (Mariotte) und von Gay-Lussac wird nach obigem also aus einem durch die zusammengehörenden bekannten Werte s_0, v_0, H_0, t_0 definierten Zustande eines vollkommenen Gases für einen anderen Zustand s, v, H, t abgeleitet, wenn $\alpha = 0{,}00367$ oder $\frac{1}{273}$ ist:

$$s = s_0 \frac{1 + \alpha t_0}{1 + \alpha t} \frac{H}{H_0} \qquad v = v_0 \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \frac{H_0}{H} \qquad H = H_0 \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} \frac{v_0}{v}$$

oder endlich

$$273 + t = (273 + t_0) \frac{v}{v_0} \frac{H}{H_0}.$$

Von dem idealen Zustand weichen die wirklichen Gase mehr oder weniger ab, besonders die leichter kondensierbaren, die im allgemeinen eine etwas größere Ausdehnung zeigen. Der wirkliche Druck (Spannung) wird mit sinkender Temperatur und meist ebenso mit steigender Dichtigkeit kleiner als der berechnete. Man unterscheidet wohl den Temperaturkoeffizienten der Ausdehnung bei konstantem Druck und den der Spannung bei konstantem Volumen. Vgl. Tab. 12a.

Der wirkliche Zustand läßt sich, wenn V für die Masseneinheit gilt, nach v. d. Waals (andere Formeln z. B. von Clausius) darstellen durch

$$\frac{1}{T}\left(H + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = \text{Const.}$$

a und b sind Konstanten des einzelnen Gases; für CO_2 z. B. $a = 0{,}00874$, $b = 0{,}0023$, Const. $= 0{,}00369$, wenn für den Druck die Atmosphäre und für V das Volumen bei 1 Atm. und 273° als Einheit angenommen wird.

Gilt bei einem vollkommenen Gase s_0 für 0° und 760 mm Quecksilberdruck, so ist für t und H mm

$$s = s_0 \frac{1}{1 + \alpha t} \frac{H}{760}.$$

Die Dichtigkeit (das spez. Gewicht) der **trockenen atmosphärischen Luft** für 0° und 760 mm ist $\lambda_0 = 0{,}0012932$ (Regnault, Rayleigh). Der Temperatur t und dem auf 0° redu-

zierten Quecksilberdruck H (vgl. 37) entspricht also die Dichtigkeit

$$\lambda = \frac{0{,}0012932}{1+\alpha t} \cdot \frac{H}{760} \qquad 1.$$

Man findet diese Größe in Tab. 6. Das sp. Gewicht eines anderen Gases für H und t wird man oft am einfachsten aus der auf Luft bezogenen Gasdichte d (Tab. 12a) als $s = \lambda \cdot d$ berechnen.

Ist ein Gasvolumen v über einer Flüssigkeit (z. B. Wasser) gemessen, mit deren Dämpfen der Raum v gesättigt ist, so erhält man nach dem Dalton'schen Gesetz den Druck des trockenen Gases, indem man von dem Gesamtdruck die Sättigungs-Dampfspannung der Flüssigkeit abzieht. Für Wasser vgl. Tab. 13.

Dichtigkeit feuchter Luft. Die feuchte atmosphärische Luft kann bis zu 1% leichter sein, als cet. par. trockene Luft. Wasserdampf ist nahe $\frac{5}{8}$ so dicht wie Luft von gleichem Druck und gleicher Temperatur. Man findet also die Dichtigkeit feuchter Luft, wenn die Spannkraft (der Druck) des Wasserdampfes in derselben $= e$ ist (47), indem man $\frac{3}{8}e$ von dem gesamten Druck (Barometerstand) abzieht und mit dem so korrigierten Werte H in Tab. 6 oder die obige Formel eingeht.

Unter der Annahme, daß die Luft zur Hälfte mit Wasserdampf gesättigt sei, kann man für Zimmertemperatur nahe so rechnen, daß man für H den ganzen Druck nimmt, aber die Formel anwendet

$$\lambda = \frac{0{,}001295}{1+0{,}004\,t} \cdot \frac{H}{760}. \qquad 2.$$

Die größten relativen Abweichungen vom Werte Gl. 1 mögen im Freien etwa $\pm\frac{1}{3000}$ betragen. Im Zimmer treten Schwankungen durch den Kohlensäuregehalt (im Freien nahe 1 mg/Liter) hinzu, die $\frac{1}{1000}$ betragen können, also bei feinen Bestimmungen zu beachten sind.

Die Ausdrücke $1 + 0{,}00367\,t$ und $H/760$ s. in Tab. 7.

18a. Eudiometer (Volta).

Dasselbe dient zunächst zur Sauerstoffbestimmung der Luft. Ein einseitig geschlossenes starkes Glasrohr ist sowohl nach Volumen wie nach Länge geteilt. Zwei nahe dem geschlossenen Ende eingeschmolzene Platindrähte lassen ein brennbares Gasgemisch durch einen elektrischen Funken (Elektrisiermaschine, Elektrophor, Induktorium) entzünden.

Das Eudiometer wird, luftfrei mit Quecksilber gefüllt, über Quecksilber umgestürzt, dann die zu analysierende Luft trocken eingeleitet und ihr Volumen v_1, Druck H_1 (Barometerstand minus gehobene Quecksilberhöhe) und Temperatur t_1 gemessen. Man fügt trockenen Wasserstoff (8, 3) im Überschuß gegen den Sauerstoff hinzu und bestimmt die jetzigen Größen v_2, H_2 und t_2.

Man preßt das Rohr auf einen am Boden der Wanne befestigten Kork, läßt den Funken durchschlagen und mißt dann v_3, H_3 und t_3.

Das in der Volumeinheit enthaltene Sauerstoffvolumen berechnet sich, wenn die drei Temperaturen gleich sind, zu

$$\frac{1}{3}\,\frac{v_2 H_2 - v_3(H_3 - e)}{v_1 H_1},$$

wo e die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfs bei t_3 bedeutet (Tab. 13) Wechselte die Temperatur, so ist jedes vH, bez. $v_3(H_3 - e)$ durch sein $1 + \alpha t$ zu dividieren.

Beweise einfach aus 18.

Genaueres und eudiometrische Methoden für andere Gase s. Bunsen, gasometrische Methoden; Hempel, gasanalytische Methoden, 3. Aufl. 1900.

19. Bestimmung der Dampfdichte.

Ungesättigte Dämpfe folgen den Gasgesetzen; Gase sind ja ungesättigte Dämpfe. Über Abweichungen vgl. S. 79.

Dampfdichte d nennt man die Dichtigkeit eines Dampfes (oder Gases) bezogen auf trockene atmosphärische Luft von gleicher Temperatur und Spannung (Druck) als Einheit. — Bei gleichem Druck und gleicher Temperatur enthalten nach dem Avogadro'schen Gesetz gleiche Volumina der verschiedenen Gase und Dämpfe eine gleiche Anzahl Moleküle; mit anderen Worten, die Molekularvolumina aller Gase und Dämpfe sind dann einander gleich. Die Dampfdichte ist gleich dem Molekulargewicht geteilt durch 28,95; z. B. für Wasser H_2O gleich $18/28{,}95 = 0{,}622$.

Die Chemie pflegt statt der Luft ein Gas von dem 32ten Teil der Dichtigkeit des Sauerstoffs als Einheit zu nehmen, d. h. die auf Luft bezogene Dampfdichte mit $\frac{32}{1{,}1052} = 28{,}95$ zu multiplizieren. Hierdurch wird die Dampfdichte einfach gleich dem Molekulargewicht im Dampfzustande, weil gasförmiger Sauerstoff (O_2) das Molekulargewicht 32 hat.

Jedes Gramm-Molekül („Mol"), d. h. so viel Gramme, wie das chemische Molekulargewicht des Körpers angibt, hat bei 760 mm Quecksilberdruck und der Temperatur t in Dampfform das Volumen $22{,}4\,(1 + 0{,}00367\,t)$ Liter.

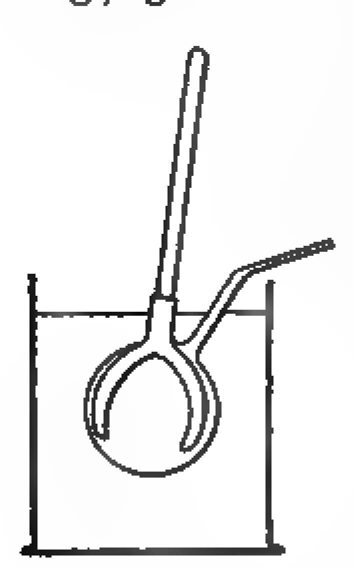
Bei manchen Dämpfen wird das Molekül mit wachsender Temperatur kleiner (Dissoziation); die wirkliche Dampfdichte d ist dann kleiner als

die berechnete d_0. Man nennt bei dem Zerfall in zwei Moleküle $\frac{d_0}{d} - 1$, allgemein bei dem Zerfall in n Moleküle $\left(\frac{d_0}{d} - 1\right) \cdot \frac{1}{n-1}$ den Dissoziationsgrad, d. h. das Verhältnis der Zahl der Moleküle, welche sich gespalten haben, zu der ursprünglichen Gesamtzahl.

A. Wägung eines bekannten Dampfvolumens (Dumas 1827).

Ein leichter, $\frac{1}{10}$ bis $\frac{1}{4}$ Liter fassender Glaskolben mit angeblasener Röhre, der eine Atmosphäre äußeren Überdrucks aushält (also keinen eingezogenen Boden haben soll), wird gut gereinigt und mittels Erwärmens und gleichzeitigen Aussaugens durch ein eingeführtes Röhrchen so getrocknet, daß nichts Dampfbildendes darin ist. Das Rohr wird dann in eine Spitze von etwa 1 qmm Öffnung ausgezogen und so gewogen Nun bringt man einige Gramm der zu bestimmenden Flüssigkeit in den Kolben, dadurch daß man ihn erwärmt und die Flüssigkeit während des Abkühlens einsaugen läßt

Der Kolben wird dann mit einem geeigneten Halter (z. B. Fig.) gefaßt und so in ein Bad gebracht, daß die offene Spitze herausragt; das Bad werde 10—20° über den Siedepunkt der zu verdampfenden Flüssigkeit erhitzt. Ist alle Flüssigkeit verdampft, so schmelzt man den Ballon mit der Stichflamme vollständig zu, am sichersten durch Abziehen der Spitze, und liest die Temperatur des Bades und den Barometerstand ab.



Nach dem Entfernen aus dem Bade läßt man durch Umkehren des Kolbens den durch Abkühlen verdichteten Tropfen in die Spitze fließen und überzeugt sich, daß hier keine Luft eintritt. Darauf wird der abgekühlte und gut gereinigte Ballon, ev. nebst der abgezogenen Spitze, wieder gewogen, unter Beobachtung der Temperatur im Wagekasten und des Hygrometers sowie, falls ein größerer Zeitraum zwischen dem Zuschmelzen und der Wägung liegt, auch des Barometers.

Endlich hält man die Ballonspitze in vorher ausgekochtes oder unter der Luftpumpe luftfrei gemachtes Wasser [oder in Quecksilber], feilt sie an und bricht sie ab, worauf die

Flüssigkeit in den Ballon steigt. Der gefüllte Ballon nebst der abgebrochenen Spitze wird wiederum gewogen, wozu eine gröbere Wage genügt.

Es sei m das Gewicht des mit Luft gefüllten Ballons;
- m' „ „ „ „ Dampf „ „
- M „ „ „ „ Wasser [od. Quecks.] „
- t und b bei dem Zuschmelzen Temperatur des Dampfes und Barometerstand;
- t' und b' bei der Wägung des Dampfes Temperatur im Wagekasten und Barometerstand. Von b' (aber nicht von b) sei $\frac{3}{8}$ der Spannkraft e des Wasserdampfes (47) im Wagezimmer abgezogen (vgl. 18);
- λ' die Dichtigkeit der Luft, wie sie zu t', b' aus 18 oder aus Tab. 6 gefunden wird.

I. Die Dampfdichte ist dann, falls mit Wasser gewogen wurde,

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda'} + 1\right)\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}00367\,t}{1+0{,}00367\,t'}.$$

[Für Quecksilber $13{,}56/\lambda'$ anstatt $1/\lambda'$.]

Beweis. Bezeichnen D und L den Dampf bez. die Luft im Ballon, so ist offenbar $D - L = m' - m$, also $D = m' - m + L$. Die Dampfdichte d würde, wenn der Dampf wie die Luft t' und b' gehabt hätte, einfach dargestellt werden durch $d = D/L = (m'-m)/L + 1$, oder, da $L = \lambda'(M-m)$ ist, durch $d = \frac{m'-m}{M-m}\frac{1}{\lambda'} + 1$. Der Faktor $\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}00367\,t}{1+0{,}00367\,t'}$ kommt hinzu, da der abgesperrte Dampf nicht t' und b', sondern t und b gehabt hat.

II. **Genauere Formel:** mit Rücksicht auf die Ausdehnung des Glases und des Wassers und auf den Gewichtsverlust des Wassers in der Luft. Es sei
- Q die Dichtigkeit des zur Wägung angewandten Wassers (Tab. 4) [oder Quecksilbers Tab. 2 u. 12)];
- 3β der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases $= 0{,}000025 = 1/40000$ (vgl. auch 8, 5); so ist

$$d = \left(\frac{m'-m}{M-m}\frac{Q-\lambda'}{\lambda'} + 1\right)[1 - 3\beta(t-t')]\frac{b'}{b}\frac{1+0{,}00367\,t}{1+0{,}00367\,t'}.$$

Beweis ähnlich wie in 16. — Der Dichtigkeitsunterschied des zurückgebliebenen Tropfens vom Wasser ist in der Formel vernachlässigt.

III. Wenn der Ballon sich nach Abbrechen der Spitze unter Wasser nicht ganz füllt, so hat der Dampf die Luft nicht vollständig verdrängt. Will man hierauf keine Rücksicht nehmen, so fülle man vor der Wägung vollständig mit der Spritzflasche und rechne nach den früheren Formeln Andernfalls tauche man den Ballon nach dem Abbrechen der Spitze so weit ein, daß die innere und äußere Oberfläche gleich hoch steht und wäge ihn so weit gefüllt. Erst dann füllt man den Rest mit Flüssigkeit und führt die Wägung M aus. Wir setzen

das Gewicht des partiell mit Wasser [oder Quecksilber] gefüllten Ballons $= M'$.

Dann ist die Dampfdichte

$$d = \frac{(m' - m)\, Q/\lambda' + M' - m'}{(M - m)\frac{b}{b'}\frac{1 + 0{,}00367\, t'}{1 + 0{,}00367\, t}\,[1 + 3\beta(t - t')] - (M - M')}.$$

R. Kohlrausch, Prakt. Regeln z. Best. d. spez. Gewichtes. Marburg 1856.

Beweis. Das Volumen der Luftblase bei der Temperatur der Füllung ist $= (M - M')/(Q - \lambda')$; es war also bei dem Zuschmelzen

$$v = \frac{M - M'}{Q - \lambda'}\,\frac{b'}{b}\,\frac{1 + 0{,}00367\, t}{1 + 0{,}00367\, t'}.$$

Der Ausdruck d unter II ist demnach die Dampfdichte eines Gemisches der Volumina v Luft und $V - v$ Dampf, und es ist, wenn wir die Dichte des reinen Dampfes durch d_0 bezeichnen, $Vd = v + (V - v)d_0$, woraus $d_0 = (Vd - v)/(V - v)$.

Hierein den Wert für d unter II, den obigen Wert für v, endlich $V = (M - m)/(Q - \lambda')\cdot[1 + 3\beta(t - t')]$ eingesetzt, findet sich nach einigen Umformungen, zum Teil mittels der Formeln S. 9 der Ausdruck unter III.

Beispiel. Es wurde gefunden:

	$m = 29{,}6861$ gr (Luft),	$M = 142{,}41$ gr (ganz mit Wasser);
	$m' = 29{,}8431$ gr (Dampf)	$M' = 141{,}32$ gr (teilweise mit Wasser);
ferner	$b = 745{,}6$ mm,	$t = 99{,}^0 5$ (beim Zuschmelzen);
	$b' = 742{,}2$ mm, $e = 9{,}4$ mm	$t' = 18{,}^0 7$ (beim Wägen mit Dampf).

Das Wasser zur Wägung hatte 17,°2, also (Tab. 4) $Q = 0{,}9988$.

Man findet (18) $\lambda' = 0{,}001182$ ohne Rücksicht auf e,
$\lambda' = 0{,}001176$ mit " " "

Nach der richtigen Formel III erhält man die Dampfdichte 2,777; II ergibt 2,755, I 2,765. Durch Vernachlässigung von e würden diese Zahlen um 0,005 wachsen.

Die auf Sauerstoff $= 32$ bezogene Dampfdichte oder das Molekulargewicht des Dampfes ist also (wenn O = 16; vgl. S. 81) $2{,}777 \cdot 28{,}95 = 80{,}4$.

Den Ausdruck $1 + 0{,}00367\,t$ siehe in Tab. 7. Sonst schriebe man bequemer

$$\frac{272{,}5 + t'}{272{,}5 + t} \text{ statt } \frac{1 + 0{,}00367\,t'}{1 + 0{,}00367\,t}.$$

B. Messung des Dampfvolumens einer gewogenen Flüssigkeitsmenge (Gay-Lussac 1812; Hofmann 1867).

Ein dünnwandiges Glaskügelchen, dessen Ansatzröhrchen man nach dem Füllen zuschmelzen oder, wenn es sehr fein ist, auch offen lassen kann, oder ein ganz kleines Fläschchen mit eingeriebenem Stöpsel, von etwa $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ ccm Inhalt, wird zuerst leer und dann mit der Substanz, deren Dampfdichte bestimmt werden soll, gewogen. Gläschen und Inhalt läßt man in einer mit trockenem und luftfreiem Quecksilber (8, 1) gefüllten und über Quecksilber umgestürzten Glasröhre aufsteigen, die von dem geschlossenen Ende an geteilt ist, entweder nach cm^3 oder einfach in mm, die nach **23** in Volumen verwandelt werden. Ist die Flüssigkeit leicht flüchtig, so kann das Gläschen schon während des Aufsteigens springen und durch das in das Vakuum geschleuderte Quecksilber das Rohr zertrümmern. Dies wird dadurch verhindert, daß man während des Aufsteigens die Glasröhre so weit neigt, daß das Quecksilber oben fest anliegt!

Nun umgibt man das Meßrohr mit dem Heizmantel (Fig.) und erwärmt durch einen geeigneten Dampfstrom zu einer Temperatur, die mindestens etwa 10° über derjenigen liegen soll, bei welcher die ganze Flüssigkeit gerade verdampft ist. Für nicht schwer flüchtige Körper genügt Wasserdampf. Es bedeute

m das Gewicht der verdampften Substanz in gr,

t, v Temperatur und Volumen des Dampfes in cm^3; ist v_0 das Volumen der dampfgefüllten Glasröhre bei 18°, so ist $v = v_0\,[1 + 0{,}000025\,(t - 18)]$ zu setzen,

b den äußeren Barometerstand,

h die Höhe der Quecksilbersäule, über welcher der Dampf sich befindet; b und h auf 0° reduziert (**37**),

e die Dampfspannung des Quecksilbers für die Temp. t (Tab. 15).

Dann ist m/v das auf Wasser bezogene sp. Gewicht des Dampfes. Um die auf Luft von gl. Temp. u. gl. Druck bezogene Dampfdichte d zu finden, hat man also m/v zu dividieren durch das zum Druck $b-h-e$ und zu t gehörige spez. Gewicht der Luft

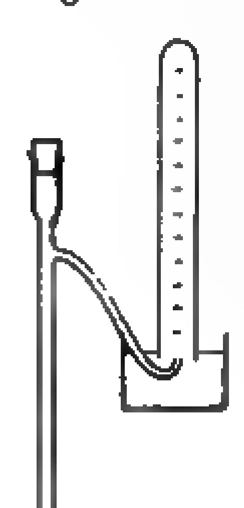
$$\frac{0{,}001293}{1+0{,}00367\,t}\,\frac{b-h-e}{760}.$$

Also ist

$$d=\frac{m}{v}\,\frac{1+0{,}00367\,t}{0{,}001293}\,\frac{760}{b-h-e}.$$

C. Durch Luftverdrängung (V. Meyer, 1878).

Das Dampfvolumen einer gewogenen kleinen Menge der Substanz wird aus der bei der Verdampfung verdrängten Luftmenge ermittelt.

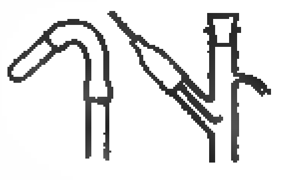


Ein Glas-, oder für hohe Temperatur Porzellan-Kölbchen mit Steigrohr und einem engen, etwa 1 mm weiten Gas-Entbindungsrohre (Fig.), gut ausgetrocknet, mit etwas Asbest am Boden, wird — im Luftbade oder im Dampfbade von Wasser, Anilin (184°), Schwefel (445°), oder auch in Paraffin (bis über 300°), Salpetergemisch (230 bis 600°), Blei (über 330°) etc. (Tab. 11 u. 12; auch 8, 27) — auf die erforderliche Temperatur oberhalb des Siedepunktes der untersuchten Substanz gebracht. Man wartet, bis die Temperatur konstant geworden ist, d. h. bis aus dem Entbindungsrohre unter Wasser keine Luftblasen mehr entweichen.

Die Substanz hat man, wenn nötig, in ein Körbchen oder Glasröhrchen, oder wenn sie flüssig ist, in ein Fläschchen oder ein ganz gefülltes, zugeschmolzenes Glaskügelchen (welches durch die Ausdehnung der Substanz springt) eingewogen. Man lüftet den Kork, wirft rasch die Substanz in den Kolben und schließt die Öffnung sofort wieder. Alsdann schiebt man

über das Gasentbindungsrohr einen mit Wasser gefüllten Meßcylinder, fängt in ihm die Luft auf, welche durch die verdampfende Substanz verdrängt wird, und liest ihr Volumen ab.

In mancher Hinsicht bequemer als der Kork, bei welchem man sehr rasch verfahren muß, ist ein über den Rand des Verdampfungsrohres gestülpter kurzer, gut schließender Kautschukschlauch, in den ein vorn zugeblasenes (Fig.) oder, damit man bei zufälliger Temperaturerniedrigung das Eintreten von Wasser in das Rohr vermeiden kann, durch einen Hahn verschließbares Glasröhrchen gesteckt ist. In das letztere hat man den einzuwerfenden Körper gebracht und läßt ihn im geeigneten Zeitpunkt durch Aufrichten des Röhrchens hinunterfallen. Oder man hält den Körper mit einem luftdicht von der Seite eingeführten Stäbchen, durch dessen Zurückziehen man ihn hinunterfallen läßt (Fig.).



Es ist wesentlich, daß der Vorgang in kurzer Zeit verläuft, damit u. a. kein Dampf in die kälteren Teile des Rohres gelangt, wo er sich kondensiert und das Volumen zu klein finden läßt. Daher soll die Temperatur des Bades beträchtlich über dem Siedepunkte der Substanz liegen. (Länger dauernde Luftentbindung kann eine Zersetzung der Substanz anzeigen.)

Es sei m die eingebrachte Substanz in gr,
v das gemessene Luftvolumen in cm³,
t die Zimmertemperatur,
H der Druck, unter welchem die gemessene Luft steht, in mm Quecksilber von 0°,

dann ist die gesuchte Dampfdichte

$$d = \frac{m}{v} \frac{760}{H} \frac{1 + 0{,}004\,t}{0{,}001293} = 587800 \frac{m}{Hv}(1 + 0{,}004\,t).$$

Der Dampf hat nämlich eine Luftmenge verdrängt, welche unter gleichen Verhältnissen das gleiche Volumen besaß. Folglich gibt das Dampfgewicht m, geteilt durch das Gewicht dieser Luftmenge, die gesuchte Dampfdichte. Die gemessene Luft aber wiegt $v \frac{0{,}001293\ H}{(1 + 0{,}004\,t) \cdot 760}$, wonach man ohne weiteres den obigen Ausdruck erhält. Der Faktor 0,004 ist anstatt des Ausdehnungskoeffizienten 0,00367 genommen, um der

Luftfeuchtigkeit Rechnung zu tragen. Er entspricht in gewöhnlicher Temperatur ungefähr der Annahme, daß die Luft im Kolben zweidrittel gesättigt, diejenige, welche über dem Wasser gemessen wird, ganz gesättigt ist. Vgl. V. Meyer, Ber. d. D. chem. Ges. 1878, S. 2258.

Der Druck H ist gleich dem Barometerstande b, vermindert um die in Quecksilber umgewandelte Druckhöhe h der Wassersäule unter der Luft: $H = b - \frac{1}{13,6} h$. Taucht man bei der Ablesung das Meßrohr bis zur Gleichstellung der inneren und äußeren Oberfläche in das Wasser, so ist $H = b$.

Behufs genauer Bestimmung und Rechnung hätte man noch das Volumen v' des etwa mit eingeworfenen Fläschchens zu berücksichtigen. War ferner der Glaskolben vorher mit trockener Luft gefüllt worden, so rechnet man hinreichend genau

$$d = \frac{587800}{v/(1 + 0{,}00367\, t) + v'/(1 + 0{,}00367\, t')} \frac{m}{H - e}.$$

e bedeutet die Spannkraft des Wasserdampfes bei der Temperatur t (Tab. 13), t' die Heiztemperatur des Bades, die nur genähert bekannt zu sein braucht.

Dissoziierte Dämpfe unterliegen der unter Umständen beträchtlichen Fehlerquelle, daß in dem Diffusionsgebiet gegen die Luft ihr Dissoziationsgrad, der mit verminderter Dichtigkeit des Dampfes wächst, ein anderer ist als in dem untersten Raume.

Über eine Anordnung, um mit vermindertem Druck zu arbeiten, s. z. B. Eijkmann, Ber. d. D. ch. Ges. 1889, S. 2754; Lunge u. Neuberg, ib. 1891 S. 729. — Auch Erdmann, ZS f. anorg. Ch. 32, 425. 1902; nach vorgängiger Beobachtung an einem Körper von bekannter Dampfdichte wird nur das Ablesen einer Druckänderung erfordert.

D. Durch Metallverdrängung.

Der verdampfende abgewogene Körper (vgl. B und C) verdrängt eine Flüssigkeit, welche selbst eine geringe Dampfspannung besitzt (in niederer Temperatur Quecksilber, Hofmann, vgl. Tab. 15; in höherer Temperatur Wood'sches Metall, V. Meyer, Ber. d. D. Chem. Ges. 1876, 1216; 1877, 2068). Es bedeute

m das Gewicht der verdampfenden Substanz,

M, s und M', s' das Gewicht bez. das spezifische Gewicht des Metalls vor und bei der Verdrängung,

t die Zimmertemperatur,
T die Bad-Temperatur, z. B. 445° für siedenden Schwefel,
β den Ausd.-Koeffizienten des Gefäßes,
b den Barometerstand,
h die Druckhöhe des flüssigen Metalls im anderen Schenkel.

Dann erhält man die Dampfdichte

$$d = \frac{m}{\frac{M}{s}[1 + 3\beta(T - t)] - \frac{M'}{s'}} \cdot \frac{760(1 + 0{,}00367\,T)}{\left(b + \frac{hs'}{13{,}56}\right) 0{,}001293}.$$

Den letzten Faktor siehe in Tab. 6. Die spezifischen Gewichte sind bei einer Temperatur t

für Quecksilber $13{,}60\,(1 - 0{,}00018\,t)$
für Wood'sches Metall $9{,}6\ (1 - 0{,}00009\,t)$.

20. Gasdichte-Bestimmung.

Die Gasdichte soll, wie im vorigen die Dampfdichte, auf Luft von gl. Temp. u. gl. Druck bezogen werden. Für die Umrechnungen kommen die Gasgesetze von 18 in Betracht. — Über Herstellung einiger Gase und deren Trocknen s. 8, 3.

A. Durch Wägung.

Um die Dichte eines permanenten Gases zu bestimmen, füllt man mit ihm einen Glasballon mit angeschmolzenem Glasrohr (am bequemsten mit Hahnverschluß), etwa indem man den Ballon zunächst mit Quecksilber füllt, ihn über einer Quecksilberwanne umstürzt und nun das Quecksilber durch das aufsteigende Gas verdrängen läßt. Der Ballon wird, wenn das Quecksilber innen und außen gleich hoch steht, d. h. unter Atmosphärendruck, geschlossen und gewogen (m'). Dann wird das Gas durch einen hinreichenden Luftstrom (Luft des Wagezimmers, nicht getrocknet) verdrängt und der Ballon offen gewogen (m). Endlich habe die Wägung mit Wasser oder Quecksilber das Gewicht M ergeben. Wie in **19A** sollen b und t den Barometerstand und die Temperatur im Augenblick des Abschließens des Gases bedeuten, t' und b' gelten für die Wägung des mit Gas gefüllten Ballons. Dann berechnet man die Gasdichte nach der Formel I oder genauer II in **19A**.

Eine etwa bei der Füllung zurückgebliebene Quecksilbermenge läßt man bei allen Wägungen ungeändert.

Verfügt man über eine hinreichend große Menge des Gases, so kann man auch ein Glaskölbchen mit zwei Ansatzrohren (oder das Pyknometer, vierte Fig. S. 66) verwenden, aus welchem man die Luft durch einen anhaltenden Gasstrom verdrängen läßt. Ist das Gas schwerer als Luft, so füllt man durch das lange Rohr und umgekehrt. Für eine genäherte Bestimmung kann sogar ein beliebiges enghalsiges Fläschchen oder Kölbchen von 100 bis 200 cm^3 genügen. Je nachdem das Gas schwerer oder leichter ist als Luft, füllt man das aufrecht oder verkehrt stehende Fläschchen durch ein bis an den Boden reichendes enges Röhrchen und verschließt endlich, indem man das Rohr langsam herauszieht, mit einem Kautschukstöpselchen. Handerwärmung ist zu vermeiden, und wegen der Diffusion muß man nun rasch wägen. Wiegt der Kolben mit Luft gefüllt m, mit Gas gefüllt m', mit Wasser M, so hat man nach der Formel unter I oder II Seite 83 zu rechnen.

Füllt und wägt man bei derselben Temperatur und demselben Druck, so gilt einfach

$$d = \frac{m' - m}{M - m}\frac{1}{\lambda} + 1.$$

Atmosphärische Schwankungen können auch herausfallen, wenn man als Hauptgegengewicht für den Ballon ein ebenso großes geschlossenes Gefäß nimmt; man vermeide dabei aber Überlegungsfehler.

Hält der Ballon einseitigen Atmosphärendruck aus, so kann er vor der Gasfüllung mit der Quecksilberluftpumpe (8, 24) evakuiert werden. Sein Volumen v bei der Gasfüllung habe sich durch Temperatur oder Luftdruckskompression (Rayleigh) bei der Leerwägung (m_0) in v_0, bei der Gaswägung (m') in v' geändert, dann ist

$$d = \frac{m' - m_0}{\lambda v} + \frac{\lambda' v'}{\lambda v} - \frac{\lambda_0 v_0}{\lambda v}.$$

λ_0 und λ' bedeuten das spez. Gewicht der Luft bei der Leerwägung und der Gaswägung (18). λ gilt für den Druck und

die Temperatur des eingefüllten Gases für trockene Luft; Tab. 6.

Über genauere Messungen s. besonders Regnault in Relat. des Exp. etc. I, oder Mém. de l'Acad. 21. 1847; Rayleigh, Proc. R. S. 53, 134. 1893; Morley, ZS f. Phys. Ch. 20, 68. 1896; Leduc, Ann. de ch. et de phys. (7) 15, 1. 1898.

B. Durch Beobachtung der Ausströmungszeit (Bunsen).

Gasdichten verhalten sich nahe umgekehrt wie die Quadrate der Ausströmungsgeschwindigkeiten, mit denen die Gase unter gleichem Druck aus enger Wandöffnung austreten. Vergleicht man also die Zeit, welcher eine bestimmte Gasmenge zum Ausströmen bedarf, mit der Zeit, welche ein gleiches Luftvolumen unter denselben Bedingungen braucht, so gibt das Zeitverhältnis, ins Quadrat erhoben, die Gasdichte.

Der Glascylinder (Fig.) mit Hahn, oben durch einen Schliff mit aufgeschmolzenem dünnen Blech mit ganz feiner Öffnung verschließbar, wird über Quecksilber (8, 1) mit trockener, durch ein Wattefilter staubfrei gemachter Luft, bez. mit dem zu bestimmenden Gas gefüllt. Ein mit einer zweiten Bohrung nach der Spitze versehener Hahn ist zum Füllen bequem; sonst benutzt man die obere Öffnung nach Entfernung des Schliffes. Das Gas wird durch einen angesetzten Kautschukschlauch eingeführt. Läßt der Cylinder sich bis an den Hahn in das Quecksilber eintauchen, so füllt man, während man den Cylinder langsam hebt. Andernfalls zieht man ihn so weit heraus, daß das Quecksilber seinen unteren Rand noch eben abschließt, und leitet nun das Gas so lange durch, bis es die Luft verdrängt hat, was aber ein unsicheres Verfahren ist, weil bei dem Entweichen der Gasblasen leicht etwas Luft in den Cylinder zurückschlägt.

Nun taucht man den Cylinder so tief in das Quecksilber ein, daß der Schwimmer (Fig.) unsichtbar wird. Das Eintauchen muß stets bis zu derselben Höhe geschehen. Nach Feststellen des Cylinders wird der Hahn geöffnet. Den Gasstand, welchen das undurchsichtige Quecksilber nicht direkt ablesen läßt, beobachtet man mittels des Schwimmers, der von dem Quecksilber im Cylinder getragen wird und zwei gut sichtbare

Marken hat, eine am oberen Ende, die andere einige Centimeter über dem unteren Ende. Man beobachtet die Zeitpunkte, wann diese Marken eben aus der Quecksilberoberfläche austreten. Irgendwelche dicht über den Marken befindliche Zeichen sollen auf den Austritt vorbereiten.

Beispiel.	Luft	Kohlensäure
Austritt der oberen Marke um	14,8 sek	42,5 sek
„ „ unteren „ „	51,2 „	1 min. 27,8 „
	Dauer = 36,9 sek	45,3 sek

Also Kohlensäure, auf Luft bezogen, $d = (45,3/36,9)^2 = 1,507$. Auf Sauerstoff = 32 bezogen, d. h. (vgl. S. 81) Molekulargewicht = 1,507 · 28,95 = 43,6 (statt CO_2 = 44 berechnet).

Raummessung.

21. Längenmessung.

I. Strichmaßstab.

Als Material für bessere Maßstäbe kommen in Betracht, nach abnehmender Wärmeausdehnung geordnet (Tab. 11), Messing, Silber (besonders als Einlage), Neusilber, Stahl, Platiniridium, Glas, Nickelstahl, für kurze Teilungen Quarz.

Nach zunehmender Brauchbarkeit wegen hygroskopischer Längenänderung in der Faserrichtung ordnen sich die gebräuchlichen Hölzer: Pappel, Eiche, Mahagoni, Buche, Kiefer, Linde, Ahorn, Fichte. Die Änderungen durch die gewöhnlichen Luftfeuchte-Schwankungen liegen hier zwischen etwa 8/10000 und 1/10000. Elfenbein wird stark beeinflußt. Ganz unbrauchbar ist Nußbaum. Paraffinieren der Hölzer hilft nicht viel. Besser schützt Überziehen oder noch vollkommener Tränken mit Schellack.

Vgl. Hildebrand, Wied. Ann. 34, 397. 1888.

1. Freie Ablesung. Die gewöhnlichsten, aus der Parallaxe stammenden Fehler werden dadurch vermieden, daß man die Teilung mit dem Objekt zusammenfallen läßt, wozu u. a. oft ein durchsichtiger Maßstab genügt. Andernfalls sichert man das Senkrechtsehen zur Teilung durch einen mit ihr parallelen Spiegel, indem man das Spiegelbild des beobachtenden Auges in den abzulesenden Punkt bringt. Oder man hält durch Visieren nach einem fernen Punkt eine konstante Sehrichtung inne. Am sichersten liest man mittels eines zur Teilung senkrecht blickenden Fernrohrs oder schwachen Mikroskops mit Parallelverschiebung ab.

2. Komparator. a) Ein fester Maßstab trägt einen parallel verschiebbaren Schlitten mit Mikroskop. Aus einem Kathetometer läßt sich in der Regel durch Anbringen eines Mikroskopes statt des Fernrohres und eventuell durch ein horizontales Gestell, in welchem der Stab befestigt wird, ein solcher „Komparator" herstellen. Die an dem Maßstab gemessene Verschiebung, wenn man das Mikroskop folgeweise auf die Enden der zu messenden Länge einstellt, ergibt diese Länge.

Die Bedingung genauer Parallelverschiebung des Schlittens muß um so strenger erfüllt sein, je weiter der zu messende Gegenstand von der Teilung des Komparators entfernt ist.

b) Es wird mit einem parallel verschiebbaren Maßstab die zu messende Länge fest verbunden und jeder ihrer Endpunkte folgeweise unter dasselbe feststehende Mikroskop gebracht. Ein zweites festes Mikroskop liest gleichzeitig die Größe der Verschiebung auf dem Maßstab ab. Je größer der senkrechte Abstand der beiden Längen, desto fehlerhafter wirkt eine Abweichung vom Parallelismus.

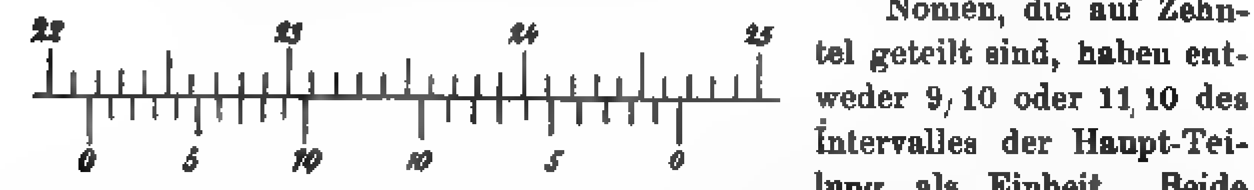
Vorteilhaft wird die zu messende Länge nicht neben dem Maßstabe, sondern in seiner Fortsetzung mit ihm verbunden.

Vgl. z. B. den Komparator von Abbe; Pulfrich, ZS f. Instr. 1892, 307.

c) Einwurfsfrei ist die Messung, wenn das Objekt und der Normalmaßstab unter dem Komparator ausgewechselt werden. Als solcher dient entweder wieder das verschiebbare Mikroskop auf der Teilung oder ein Paar von Mikroskopen, die auf einer Schiene verschoben und festgeklemmt werden können. — Transversalkomparator heißt das Instrument, wenn die Auswechslung von Objekt und Maßstab bequem mittels eines Schlittens ausgeführt wird.

Überschüsse über ganze Teilstriche des Maßstabes können in allen Fällen durch Okularmikrometer von bekanntem Teilwert in den Mikroskopen (vgl. unten) bestimmt werden. Im Falle a) auch mit dem am Schlitten befindlichen Nonius.

Bei einer feineren Messung mit Anwendung eines Nonius übersehe man nicht, erstens, daß der Nonius selbst geprüft sein muß, zweitens, daß man aus der etwaigen Fehlertabelle des Maßstabes den Fehler desjenigen Striches zu nehmen hat, an welchem die Noniusteilung einsteht.



Nonien, die auf Zehntel geteilt sind, haben entweder 9/10 oder 11/10 des Intervalles der Haupt-Teilung als Einheit. Beide gezeichnete Nonien zeigen 0,7 p an. — An Zehntel-mm-Nonien lassen sich leicht aus den Abständen benachbarter Striche auch die Hundertel schätzen.

Den Horizontalabstand zweier Punkte kann man mittels zweier von ihnen herabhängender Kokonfäden mit angehängten Gewichten messen, die, um Schwankungen zu vermeiden, in

ruhiges Wasser tauchen mögen. Ebenso mißt man den Durchmesser eines horizontal gelegten Cylinders.

Einen Komparator für Abstände beliebiger Neigung s. bei F. Braun, Wied. Ann. 41, 627. 1890.

3. Teilmaschine. Diese kann zur Messung, besonders auch von kleinen Längen dienen, wenn an dem Schlitten oder an dem Gestell ein Mikroskop mit Fadenkreuz sitzt. Den Wert eines Schraubenganges bestimmt man auf einem Strichmaßstabe. Wegen des toten Ganges stellt man immer von derselben Seite ein.

Über fortschreitende und periodische Fehler der Schraube s. z. B. Thiesen, Scheel u. Sell, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. II 13, 1895; ZS f. Instr. 1896, S. 328.

4. Mikroskop. Für kleine Längen wird am bequemsten ein Mikroskop mit „Okularmikrometer“ angewandt. Mit einem als Objekt untergelegten Glasmikrometer von bekanntem Werte wird zuerst der Teilwert des Okularmikrometers bestimmt und dann in leicht ersichtlicher Weise verfahren. Das Okularmikrometer kann selbst aus einer Glasteilung bestehen oder aus einem mit Mikrometerschraube beweglichen Faden oder Fadenpaar, dessen Verschiebung an der Trommel abgelesen wird.

Es ist nicht zu übersehen, daß konstante Mikroskopvergrößerung eine ungeänderte Stellung des Okularmikrometers gegen das Objektiv voraussetzt, so daß auch die Einstellung immer für dieselbe Sehweite, z. B. stets mit oder stets ohne Brille, geschehen muß. Bei dem Ramsden'schen Okular, unter welchem das Mikrometer feststeht, ist dies nicht nötig.

5. Prüfung eines Strichmaßstabes. Besitzt man einen schon verifizierten Maßstab[1]), so ist die Aufgabe, für einen anderen Stab eine Korrektionstabelle aufzustellen, oben bereits erledigt. Andernfalls vergleicht man die angeblich gleichen Strecken des Maßstabes mit einer und derselben Länge a und bestimmt dadurch ihr gegenseitiges Verhältnis. Beide unter Nr. 2 erwähnte Komparatoren liefern das Mittel für genaue derartige Messungen. Die Länge L enthalte n Unterabteilungen $a_1 a_2 \ldots a_n$, deren Einzellängen $a_1 = a + \delta_1$, $a_2 = a + \delta_2$ etc. bis

1) Durch Vermittelung der Normal-Eichungskommissionen sind geprüfte Maßstäbe zu beziehen.

$a_n = a + \delta_n$ gefunden werden; bezeichnet man dann das Mittel der Unterschiede $1/n \cdot (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n) = \delta$, so ist

$$a_1 = L/n - \delta + \delta_1 \qquad a_2 = L/n - \delta + \delta_2 \text{ etc.}$$

Um die bei einer großen Zahl von Vergleichungen sich häufenden Fehler zu vermeiden, wird man sowohl größere wie kleinere Strecken vergleichen, z. B. bei einem in mm geteilten Stabe alle dm, alle cm und alle mm; die letzteren wohl nach Nr. 4. Jede größere Abteilung wird bei der Rechnung ihren Unterabteilungen gegenüber zunächst als Ganzes behandelt.

Die Korrektionen zweier gleichartiger Maßstäbe lassen sich durch Aneinanderlegen und mikroskopisches Bestimmen der Unterschiede korrespondierender Striche ermitteln, indem man dies mittels Durchschiebens in den verschiedenen Intervallen ausführt.

Über genaue Methoden s. u. a. Thiesen, Carl Rep. 15, 680. 1879; Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. II 97. 1895; Benoît, Trav. et Mém. du Bureau internat. des poids et mesures II, pag. C 35 ff.; Pernet, ib. IV, pag. B 87. 1885.

6. **Herstellung von Strichmaßen.** Die gewöhnliche Teilmaschine benutzt den auf einer Schraube von bekannter Ganghöhe verschiebbaren Schlitten mit Reißerwerk. Um den „toten Gang“ zu eliminieren, stelle man vor jedem Strich immer von derselben Seite ein. Zu Holz, Elfenbein und weichem Metall dient der Stahlstichel, sonst der Diamant. Für feine Glasteilung mit dem Diamant wird das Strichziehen unter Wasser empfohlen. Meistens überzieht man Glas warm mit einer dünnen Wachsschicht (am besten: eintauchen in weißes Wachs, in einer Röhre mittels Wasserdampf geschmolzen, und rasch herausziehen), in welche nach dem Erkalten die Teilung eingetragen wird. Die Striche ätzt man glatt mittels Flußsäurelösung oder „Diamanttinte“, die man mit dem Pinsel aufträgt, oder matt durch Dämpfe von Flußsäure (aus Flußspatpulver und Schwefelsäure) in einem Bleitroge. Andere Glasflächen, ferner die Augen und Schleimhäute, sind vor den Dämpfen zu schützen.

Nach Bunsen kopiert man Teilungen von einem Originalmaßstabe mittels einer langen Stange mit zwei Spitzen. Das Original und der zu teilende Stab werden in dieselbe gerade Linie festgelegt, die eine Spitze wird in die Teilstriche gesetzt, mit der anderen werden kurze Striche gezogen.

II. Kontaktmaßstäbe.

Den gegenseitigen Abstand zweier Endflächen eines Körpers mißt man, mit geringerer oder größerer Genauigkeit, z. B. mittels der unter dem Namen Schustermaß, Fühlhebel, Kontaktschraube käuflichen Längen- und Dickenmesser. Man achte auf die Richtigkeit ihres Nullpunktes, bez. bringe die notwendige Korrektion an.

Einen genauen Dickenmesser nach Abbe s. ZS f. Instr. 1892, 310.

7. Sphärometer. Zu feinen Dickenmessungen dient die Schraube im Sphärometer; die Höhe des Schraubenganges ist zunächst die Längeneinheit. Das einfachste, in der Figur dargestellte Sphärometer wird zuerst mit seinen drei Füßen auf eine ebene Unterlage gesetzt (etwa auf eine Spiegelglasplatte, deren Vorderfläche auf große Entfernung unverzerrte Spiegelbilder gibt), wobei man die Mittelschraube gerade bis zur Berührung einstellt (vgl. unten). Diese Stellung wird abgelesen: die Bruchteile des Schraubenganges auf der mit der Schraube drehbaren geteilten Kreisscheibe, die Ganzen durch Zählen der Umgänge oder an dem Maßstäbchen, an welchem diese Scheibe nahe vorbeistreift.

Dann dreht man die Schraube zurück, zur Sicherheit die Umdrehungen abzählend, legt den Körper unter, dessen Dicke gemessen werden soll, stellt die Schraube wieder zur Berührung ein, liest ab und nimmt die Differenz gegen die erste Einstellung. Drahtdicken u. dgl. werden zwischen Schneiden oder Platten gemessen. Um die Dicke in Millimetern zu haben, ist diese Differenz mit der angegebenen oder anderweitig ermittelten Höhe eines Schraubenganges zu multiplizieren.

Daß die Schraubenspitze gerade berührt, beurteilt man danach, daß das Instrument dann nicht mehr feststeht, sondern um die verstellbare Spitze wackelt oder sich leicht auf ihr drehen läßt. Ein sehr feines optisches Erkennungsmittel können auch die Newton'schen Interferenzstreifen gewähren. Man legt nämlich zwischen Spitze und Unterlage noch eine Glasplatte, deren obere Fläche jetzt die Ausgangsebene darstellt. Unter der Glasplatte entstehen dann diese Streifen, besonders bei der Beleuchtung mit einer Natriumflamme deutlich sichtbar, und die ein-

tretende Berührung wird scharf wahrnehmbar durch die zugleich eintretende Verschiebung der Interferenzstreifen.

An Stelle der ebenen Platte dient als konstante Einstellungshöhe auch wohl ein Fühlhebel oder ein Fühlniveau oberhalb der Schraube. Man stellt dann stets auf denselben Teilstrich des Zeigers oder auf dasselbe Einspielen der Libellenblase ein.

Die Höhe des Schraubenganges wird mit einem Körper von bekannter Dicke oder nach I 2 oder 3 bestimmt. — Über die Messung eines Krümmungshalbmessers s. 66 I. Über die genaue Prüfung von Schrauben vgl das Bessel'sche Verfahren in Weinstein, Maßbestimmungen, II 290. 1888. Feinere Konstruktionen von Sphärometern nach Mayer und Bamberg s. z. B. bei Czapski, ZS f. Instr. 1887, 297.

8. Der Kontaktkomparator für Vergleichung größerer Endmaße hat ebenfalls Fühlhebel und Fühlniveau, eventuell in Verbindung mit einer Mikrometerschraube. Die Messungsmethoden sind im Prinzip einfach.

Korrektionen. 9. Temperatur. Hat man mit einem Maßstabe von der Normaltemperatur t_0 und vom Ausdehnungskoeffizienten β_0 (44 u. Tab. 11) bei der Temperatur t eine scheinbare Länge l gefunden, so ist die wahre Länge

$$= l(1 + \beta_0(t - t_0)).$$

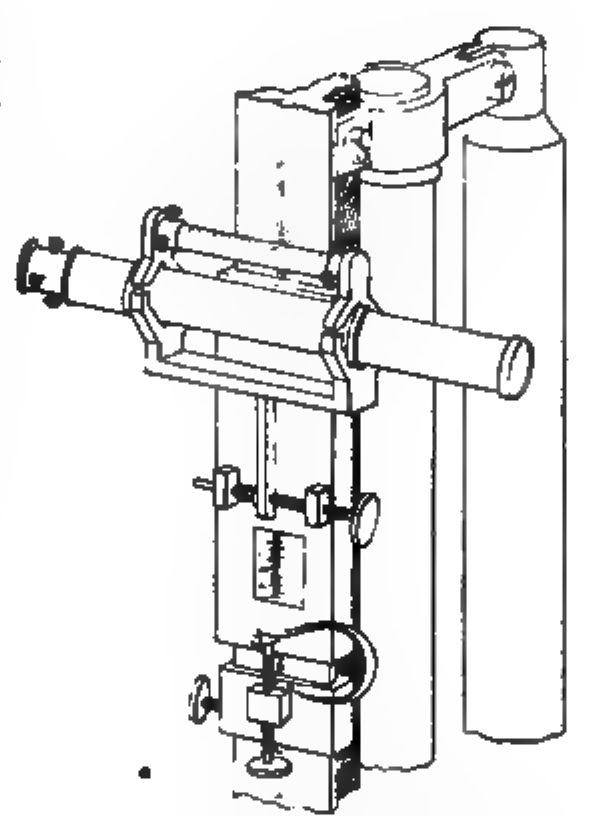
10. Durchbiegung. Die Länge der Axe eines Stabes ändert sich durch mäßige Durchbiegungen nur wenig; die Abstände von Punkten außerhalb der Axe können dadurch aber in leicht ersichtlicher Weise vergrößert oder verkleinert werden. Es empfiehlt sich im allgemeinen, einen Maßstab, wenn er in horizontaler Lage gebraucht wird, in zwei Querschnitten zu stützen, die je um 2/9 der Länge von den Enden abstehen. Auch die Aufbewahrung geschieht so am besten. — Normalmaßstäben gibt man einer H-Form ähnliche Querschnitte und teilt in der Axe.

Über hölzerne Maßstäbe und Luftfeuchte vgl. oben.
Winkelmessung in 25, 30a, 60, 61, 70.

22. Kathetometer (Dulong und Petit 1816).

Das Kathetometer mißt Vertikalabstände, z. B. Druckhöhen. Ein horizontales, um die Vertikale drehbares Fernrohr ist mittels Schlitten am vertikalen Maßstabe verschiebbar. Auf große Entfernungen ist das

Kathetometer wegen der ungenauen Einstellung, wegen der Krümmung des Maßstabes und wegen der Fehler durch Schwankungen mit Vorsicht, unter beständiger Beachtung der Fernrohrlibelle (Nr. 6) anzuwenden.



Die Justierung des Instruments geschieht folgendermaßen.

1. Das Fernrohr ist um seine Sehrichtung drehbar: das Fadenkreuz wird so gestellt, daß bei dieser Drehung der anvisierte Punkt sich nicht gegen das Fadenkreuz verschiebt.

2. Die Kongruenz der beiden Cylinder, um welche das Rohr sich dreht, wird mit der aufzusetzenden Libelle konstatiert, welche dieselbe Einstellung zeigen muß, wenn man das Fernrohr in seinen Lagern umlegt und die Libelle in ihrer alten Lage wieder aufsetzt.

3. Die Drehaxe des Kathetometers wird vertikal gemacht, indem man die Fußschrauben so reguliert, daß die Libelle des Instruments bei der Drehung eine konstante Einstellung gegen ihre Teilung ergibt. Über die Reihenfolge bei der Einstellung der Fußschrauben und das Justieren der Libelle selbst vgl. **30a**.

4. Die vertikale Stellung des Maßstabes wird hinreichend genau mit einem Senkel erkannt, bezüglich danach reguliert.

5. Die horizontale Richtung der Fernrohraxe erkennt man, da nach Nr. 1 die Sehaxe mit der geometrischen Axe übereinstimmt, und wenn nach Nr. 2 die beiden Lagercylinder des Rohres gleich dick sind, mit der Fernrohrlibelle, die bei dem Umsetzen die frühere Einstellung der Blase auf ihrer Teilung zeigen muß. Oder auch, da nach Nr. 3 die Drehaxe vertikal ist: man visiert einen Punkt an, dreht das Instrument um 180° und legt das Fernrohr um; dann muß der vorher anvisierte Punkt dieselbe Höhe gegen das Fadenkreuz zeigen.

6. Daß der Schlitten und das Fernrohr wirklich die vorausgesetzte Parallelverschiebung haben, erkennt man an der konstanten Einstellung der Libelle oder an einem vertikal gerich-

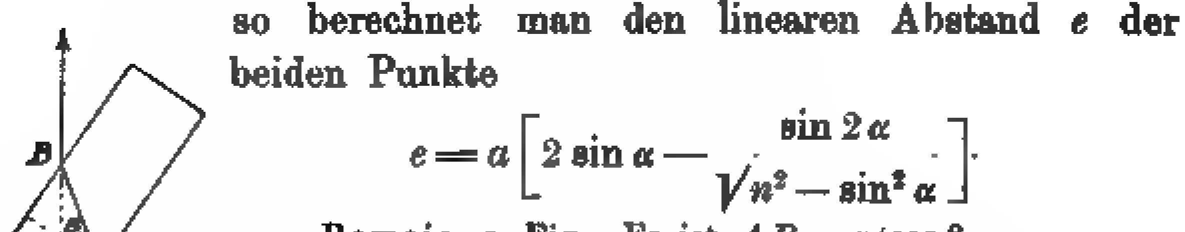
teten Kollimator (d. h. einem Fadenkreuz mit vorgesetzter Linse) dessen Bild dem Fernrohr mittels eines kleinen totalreflektierenden Prismas seitlich zugeführt wird. Eventuell hat man entweder vor jeder Einstellung die Lage des Fernrohrs auf denselben Stand der Libellenblase, bez. auf Koinzidenz mit dem Kollimator zu korrigieren, oder man mißt noch einmal mit umgelegtem Fernrohr und um 180° gedrehtem Instrument und nimmt aus beiden Ablesungen das Mittel. Je weiter entfernt die zu messende Höhe, desto sorgfältiger ist dies zu beachten.

22a. Ophthalmometer (Helmholtz 1853).

Das Instrument dient zur Messung kleiner Abstände. Es besteht aus zwei gleich dicken, dicht nebeneinander vor den Objektivhälften eines Fernrohres befindlichen Glasplatten, welche sich um eine gemeinsame Axe gleichzeitig um gleiche Winkel, aber gegeneinander drehen lassen. Die Größe der Drehung wird an Teilkreisen abgelesen. In der Nullpunktsstellung liegen beide Platten in der zur Sehlinie des Fernrohrs senkrechten Ebene.

Man stellt auf die beiden Punkte, deren gegenseitiger Abstand gemessen werden soll, gleichzeitig ein, indem man durch Drehung der Glasplatten die beiden durch die Lichtbrechung in den schrägen Gläsern abgelenkten Bilder zum Zusammenfallen bringt. Der Abstand des Objekts vom Instrument ist ohne Einfluß.

Ist α der Drehungswinkel aus der Nullstellung,
a die Dicke der Platten,
n das Lichtbrechungsverhältnis der Gläser,
so berechnet man den linearen Abstand e der beiden Punkte



$$e = a\left[2\sin\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}\right].$$

Beweis; s. Fig. Es ist $AB = a/\cos\beta$;
$\frac{1}{2}e = AB\sin(\alpha - \beta) = a(\sin\alpha - \operatorname{tg}\beta\cos\alpha)$.
Ferner $\sin\beta = (1/n)\sin\alpha$, also

$$\operatorname{tg}\beta\cos\alpha = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{2}\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}.$$

Hieraus ergibt sich e.

Die Konstanten a und n des Ophthalmometers kann man entweder einzeln direkt an den herausgenommenen Glasplatten bestimmen (**21**, insbesondere **21**, 7, bez. **62** und **63** II), oder man stellt auf einige Abstände einer mm-Teilung ein, mindestens

natürlich auf zwei. Wenn auf mehrere, so ermittelt man a und n mit kleinsten Quadraten (3 III bis V).

Da das Instrument oft eine unvollkommene Symmetrie zeigt, so ist es gut, jede Messung zweimal mit entgegengesetzten Neigungen der Glasplatten auszuführen und aus den beobachteten α das Mittel zu nehmen.

Etwas umständlich wird also die Konstantenbestimmung und der Gebrauch der Formel. Oft wird es einfacher und genügend sein, zuerst eine bekannte engere Teilung (in $\frac{1}{2}$ mm) durchzubeobachten und dann eine graphische Darstellung der beobachteten Drehungen als Abszissen und der Längen als Ordinaten (6) zu benutzen. Bei diesem Verfahren hält man sich am einfachsten stets an die Drehungen in einem bestimmten Sinn.

23. Volummessung. Kalibrierung durch Auswägen.

Als Volumeinheit gilt hier das Kubikcentimeter („Milliliter") in dem Sinne, daß es genau 1 gr Wasser von 4° faßt, selbstverständlich im leeren Raum gewogen oder hierauf umgerechnet. Geometrisch ausgemessen wird das Kubikcentimeter um 0,00003 ccm kleiner.

Käufliche ältere Meßgefäße sind oft sehr unrichtig. Verbreitet ist noch das „Mohr'sche" Kubikcentimeter, von dem scheinbaren Gewicht des Wassers von 15° in Luft abgeleitet. Dabei wird das Liter gegen richtiges Maß um 1,9 ccm zu groß. Die jetzt käuflichen geeichten Hohlmaße sind nach richtig definiertem Maße geteilt.

Wenn eine Flüssigkeit in der Luft das Nettogewicht m gr zeigt, so ist ihr Volumen in ccm

$$v = \frac{m}{s}\left(1 + \frac{\lambda}{s} - \frac{\lambda}{\sigma}\right),$$

wenn s, σ und λ die Dichtigkeit der Flüssigkeit, der Gewichtstücke und der Luft (0,0012; 18 und Tab. 4 und 6) bedeuten; s. auch 18 und Tab. 1.

Man kalibriert fast ausschließlich mit Wasser oder Quecksilber. Bei der Temperatur der Messung habe Wasser die Dichtigkeit Q (Tab. 4). Ein mit Messinggewichten ($\sigma = 8,4$) in Luft gewogenes scheinbares Gramm hat also das Volumen $\frac{1}{Q}\left(1 + \frac{0,0012}{Q} - \frac{0,0012}{8,4}\right)$ ccm, wofür merklich genau geschrieben werden kann (vgl. S. 76) $(2,00106 - Q)$ ccm. Ein scheinbares Gramm Wasser von 18° hat das Volumen 1,00244 ccm.

Zur Bequemlichkeit findet man in dem zweiten Teil von Tab. 4 das Volumen von 1 gr bei anderen Temperaturen, wobei angenommen ist, daß

ein Glasgefäß für 18° ausgemessen werden soll und daß dieses den kubischen Ausdehnungskoeffizienten 0,000025 hat.

Soll das Volumen des Gefäßes von der Beobachtungstemperatur t auf eine andere t' umgerechnet werden, so ist

$$v' = v(1 + 3\beta(t' - t)),$$

wenn β den linearen Ausdehnungskoeffizienten (Tab. 11) des Gefäßes bedeutet. Für gewöhnliches Glas im Mittel $3\beta = 1/40000$.

Hohlmaße können entweder für Trockenfüllung oder für Ausguß bestimmt und geprüft sein. Ersteres ist das Genauere. Im letzteren Falle rechnet man natürlich das Gewicht des benetzten Gefäßes ab. Sorgfältig konstante Behandlung bezüglich der Art und Dauer des Abtropfens oder Ausblasens ist nötig, wenn dieser Gebrauch genaue Resultate geben soll.

Den Einfluß des Meniskus (vgl. auch **58** I) eliminiert man, indem man immer in gleicher Weise abliest, und zwar in der Regel in der den Meniskus berührenden Horizontalebene. Das zur Vermeidung der Parallaxe notwendige Visieren in einer und derselben Richtung wird durch ein Fernrohr erreicht, welches an einer vertikalen Stange verschiebbar ist; einfacher dadurch, daß man stets einen und denselben fernen Punkt als Augenpunkt nimmt, oder endlich mit einem Streifchen Spiegelglas (**21, 1**).

Kalibrierung eines geteilten Rohres mit Quecksilber. Die konstante und bekannte Quecksilberfüllung eines oben abgeschliffenen, mit einer Platte bedeckten, gegen Erwärmung an einem Stiel gehaltenen kleinen Gefäßes, etwa eines unten geschlossenen Glasröhrchens, wird wiederholt in das zu kalibrierende Gefäß eingegossen und darin der Stand des Quecksilbers jedesmal abgelesen. Der Einfluß des Meniskus läßt sich ermitteln, indem man eine verdünnte Lösung von Sublimat auf das abgelesene Quecksilber aufgießt, wodurch die Oberfläche sich abflacht. (Bunsen, gasometrische Methoden.)

Pipetten. Der gewöhnliche Gebrauch auf Ausfluß bedarf höchstens des Hinweises, daß die vorausgesetzte konstante Benetzung, die man durch Abtropfen während einer bestimmten Zeit zu erzielen sucht, durch Spuren von Fett sehr beeinträchtigt wird. Genauer ist, falls man den Inhalt durch Nachspülen vollständig herausbringen kann, der Gebrauch auf Trockenfüllung. Zu diesem Zweck eicht man mittels Differenzwägung der ge-

trockneten und der gefüllten Pipette, wobei ein Standgefäß auf der Wage, welches die Pipette und ausfließende Füllung aufnimmt, als Tara mitgewogen wird. — Aus paraffinierten Pipetten fließt auch Wasser usw. trocken aus.

Die genaue Einstellung auf den Teilstrich (Ringmarke) wird am bequemsten durch Erwärmen der Luftsäule unter dem abschließenden Finger mit der anderen Hand erzielt.

Über Volumen des Quecksilbers vgl. **24**; über seine Reinigung 8, 1. — Über die Behandlung von Meßgefäßen, besonders Pipetten u Büretten, vgl. z. B. Wagner, ZS. f. phys. Ch. 28, 193 1899

24. Kalibrierung einer engen Glasröhre.

Das gereinigte und durch einen Luftstrom gut ausgetrocknete Rohr wird horizontal über einen Maßstab (mit Spiegel zur Vermeidung der Parallaxe) gelegt und ein Faden von reinem Quecksilber (8, 1) eingebracht, den man verschieben kann. Letzteres geschieht durch Neigen und Klopfen, oder mittels eines Stückchens Kautschukschlauch am Rohre; man verschließt das Ende des Schlauches mit der einen Hand und kann nun mit der andern Hand durch Luftdruck, oder auch, wenn man den Schlauch vorher gedrückt hatte, durch Saugen, den Faden vor- oder rückwärts bewegen.

Ist die Röhre nur einseitig offen, so läßt sich das Quecksilber nur einfüllen oder verschieben, wenn man die unter ihm befindliche Luft zum Entweichen bringt. Dies bewirkt man leicht dadurch, daß man einen reinen dünnen Eisen- oder besser Platindraht neben dem Quecksilber in das Rohr schiebt. Längs des Drahtes bildet sich von selbst ein Luftkanal.

Um die Röhre in gleiche Volumina abzuteilen, bringt man den Faden in nahe aneinander schließende Lagen und notiert seine Längen, denen dann gleiche Volumina entsprechen. Bei der Einteilung in viele Unterabteilungen häufen sich die Ablesefehler. Es ist in diesem Falle besser, Beobachtungen mit größeren und kleineren Fäden zu kombinieren. Um z. B. in 25 Teile zu teilen, mag man zuerst mit einem Faden von $^1/_5$ der Rohrlänge messen und die entstandenen Abteilungen dann mit einem 5 mal kleineren Faden teilen.

Eine Anordnung für nicht zu dünne Kapillaren mit einer feinen Saugpipette bei Hulett, ZS f. phys. Ch. 33, 238. 1900.

Die Resultate wird man in einer Tabelle oder durch eine Kurve auf Koordinatenpapier darstellen (**6**) und für zwischenliegende Querschnitte die Werte interpolieren.

Absolutes Kaliber. 1 gr in Luft gewogenes Quecksilber (**13** und **23**) hat bei der Temperatur t das Volumen $0{,}07355(1+0.000182\,t)$ oder $0{,}07379(1+0{,}000182\,(t-18))$ ccm.

Den mittleren Querschnitt q einer gemessenen Strecke vom Volumen v ccm berechnet man, wenn l cm die Länge des Fadens ist, $q = v/l$ qcm, den Halbmesser $r = \sqrt{(q/\pi)}$.

Meniskus. Wegen der Krümmung der Endflächen wird die Quecksilbermenge, also auch der oben bezeichnete Querschnitt, zu klein sein, wenn man l zwischen den Kuppen der Menisken gemessen hat. Unter der für enge Röhren gestatteten Annahme, daß die Endflächen Kugelkappen sind, berechnet man den mittleren Querschnitt aus den Höhen h und h' beider Menisken

$$q = \frac{1}{l - \frac{1}{2}(h+h')}\left[v - \frac{1}{6}\pi\,(h^3 + h'^3)\right].$$

Haben beide Menisken die gleiche Höhe h, so wird also

$$q = \frac{1}{l-h}\left(v - \frac{1}{3}\pi h^3\right).$$

$\frac{1}{3}\pi$ ist nahe $=1$. Für sehr flache Menisken verschwindet der Einfluß von h^3.

Unter mittleren Verhältnissen wird die Korrektion, die von der zwischen den Kuppen gemessenen Länge l abzurechnen ist, in engen Röhren etwa $0{,}4\,h$ für jeden Meniskus betragen.

Über Kalibrierung mit Quecksilberfäden s. auch **41** u. **95b**.

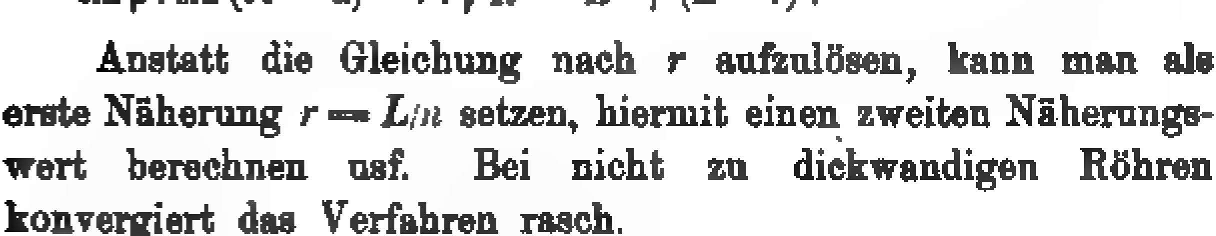
Querschnitt aus der Wägung eines Rohres. Hat ein Kreisrohr vom äußeren Durchmesser R, der Länge l und dem spezifischen Gewicht s der Rohrsubstanz das Gewicht m, so ist der innere Querschnitt $= R^2\pi - m/ls$. Für dünnwandige Röhren ist dieses Verfahren brauchbar. s bestimmt man oder setzt für gewöhnliches Glas $s = 2{,}5$.

Optische Bestimmung des inneren Durchmessers. Man beleuchtet das aufrecht gestellte Rohr durchfallend mit einer schmalen Flamme, am besten mit Natriumlicht (**59a**). Die Reflexion an dem inneren Cylinder läßt dessen Ränder als zwei feine Lichtlinien erscheinen, deren scheinbarer gegenseitiger

Abstand mit dem Ophthalmometer (**22a**) oder, auf einen dicht vorgestellten Maßstab projiziert, mit einem Fernrohr gemessen, $= 2L$ sei. Der äußere Rohrdurchmesser, der gleich mit bestimmt werden kann, sei $= 2R$. Es besteht dann, wenn n das Lichtbrechungsverhältnis des Glases ist, die Beziehung

$$r = \frac{L}{n}\sqrt{1 + \frac{(L-r)^2}{R^2 - L^2}}.$$

Folgt aus $n = \sin\alpha : \sin\beta$ $\quad\sin\alpha = L/R$ und $\sin\beta : \sin(90-\alpha) = r : \sqrt{R^2 - L^2 + (L-r)^2}$.



Anstatt die Gleichung nach r aufzulösen, kann man als erste Näherung $r = L/n$ setzen, hiermit einen zweiten Näherungswert berechnen usf. Bei nicht zu dickwandigen Röhren konvergiert das Verfahren rasch.

Glasröhren sind selten konzentrisch cylindrisch. Man mißt L z. B. in 4 oder 8 gleich verteilten Lagen und nimmt das Mittel.

n_{Na} beträgt für Jenaer Glas XVI 1,5268, für Glas 59 1,497.

Ist r bekannt, so kann man umgekehrt auch n bestimmen.

Aus der kapillaren Steighöhe. Steigt eine Flüssigkeit vom spezifischen Gewichte s und der Kapillarkonstante α (Wasser 7,6, Alkohol 2,4 $\frac{\text{mg}}{\text{mm}}$) in dem gut benetzten Rohre um die Höhe H an, so ist der Halbmesser des Rohres $r = 2\alpha/(Hs)$. Vgl. 58.

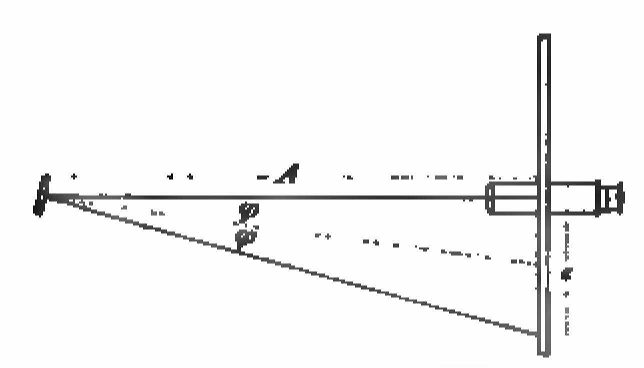
Auf 1° wächst ein Querschnitt gewöhnlichen Glases um $\frac{1}{60000}$.

25. Winkelmessung mit Spiegel und Skale (Poggendorff 1827).

Die Messung von Drehungen mittels des gespiegelten Maßstabes, neben der Einfachheit der Hilfsmittel eine unbegrenzte Empfindlichkeit bietend, findet beinahe in jedem Gebiet Anwendung. Sie darf als die bedeutendste Grundlage moderner physikalischer Messungen bezeichnet werden. Die Methode setzt voraus, daß die zu messenden Winkel klein sind.

Mit dem sich drehenden Körper ist ein der Drehaxe paralleler Spiegel verbunden. Ungefähr in der Ebene, die von der sich drehenden Spiegelnormale beschrieben wird, befindet sich, ge-

wöhnlich in ½ bis 5 m Abstand eine meistens in Millimeter geteilte Skala. Entweder beobachtet man deren reflektiertes Bild in einem auf den Spiegel gerichteten Fernrohr mit Fadenkreuz, oder es wird von einer Lichtquelle auf den Spiegel Licht geworfen, welches nach der Reflexion ein Bild auf der Skale erzeugt, das sich durch die Drehung verschiebt. Meist gibt man der Skale bez. dem Fernrohr oder der Lichtquelle die Stellung, in welcher bei nicht abgelenktem Spiegel nahezu der Fußpunkt des vom Spiegel auf die Skale gefällten Perpendikels in dem Fadenkreuz erscheint oder von dem Lichtbildchen getroffen wird. Dieser Punkt soll der mittlere Skalenteil heißen. Man findet ihn mit einem rechten Winkel, den man an die Skale so anlegt, daß die Visierlinie längs des anderen Schenkels den Spiegel trifft. — Das Fernrohr darf natürlich auch schräg zur Skale stehen.



Einstellung von Fernrohr und Skale. Man stellt etwa von vornherein das Fernrohr durch Verschieben des Okularrohres genähert auf die richtige Sehweite ein, d. h. auf die doppelte Entfernung der Skale vom Spiegel. Dann gibt man ihm, während das Rohr nach dem Spiegel gerichtet ist, die Stellung, bei welcher das dicht neben dem mittleren Skalenteil visierende Auge das Objektiv des Fernrohres oder das neben dem Fernrohr visierende Auge den mittleren Skalenteil im Spiegel sieht. Alsdann wird das Bild der Skale, wenn es nicht bereits im Gesichtsfelde des Fernrohres ist, durch eine kleine Drehung in demselben erscheinen. Schließlich werden die feineren Einstellungen vorgenommen.

Zu den letzteren gehört das Deutlichsehen von Skale und Fadenkreuz. Zuerst wird das Fadenkreuz durch eigene Verschiebung oder durch Verstellen des zwischen ihm und dem Auge befindlichen Okularglases auf richtige Sehweite gebracht, dann das Okularrohr so eingeschoben, daß Skale und Fadenkreuz keine Parallaxe zeigen, d. h. sich bei dem seitlichen Bewegen des Auges vor dem Okular nicht gegeneinander verschieben.

Wechseln bei zusammenhängenden Ablesungen Beobachter von verschiedener Sehweite, so soll ein jeder das deutliche Bild nur durch Verstellen des zwischen Auge und Fadenkreuz befindlichen Teiles des Okulars hervorbringen. Jedes Ablesefernrohr soll also das Akkommodieren des Auges auf das Fadenkreuz durch leicht verschiebbare oder verschraubbare Linsen vor dem Fadenkreuz gestatten.

Zukneifen des nicht beobachtenden Auges befördert stark die Ermüdung. Zur Gewöhnung an das Offenhalten dient eine über das Okular gehängte Papierblende.

Objektive Beobachtung. Man läßt das Licht von einer scharf markierten Lichtquelle (Spalt; Faden vor einer Flamme; elektrische Glühlampe mit geradem Faden) durch eine Linse auf den Spiegel und von da auf die Skale fallen. Um ein objektives Bild zu geben, muß die Lichtquelle jedenfalls außerhalb des Brennpunktes der Linse stehen. Die richtige Stellung, bei der ein deutliches objektives Bild der Marke auf der Skale entsteht, probiert man aus, wobei auch die gute Zentrierung der Linse (67) zu beachten ist. Ein Hohlspiegel anstatt des Planspiegels läßt die Projektionslinse ersparen. Soll in diesem Falle die Lichtquelle denselben Abstand vom Spiegel haben wie die Skale, so ist dieser Abstand gleich dem Krümmungshalbmesser (66) oder der doppelten Brennweite des Spiegels zu wählen.

Über Versilbern von Glasspiegeln s. 8, 6.

Reduktion der Skalenablesung auf den Winkel und seine Funktionen.

Wir nehmen an, daß die Skaleneinstellung im nicht abgelenkten Spiegel mit dem Fußpunkt der Senkrechten von dem Spiegel auf die Skale nahe zusammenfällt. Der Ort des Fernrohrs bez. der Lichtquelle kommt nicht in Betracht. Skalenausschlag heiße die Differenz e des beobachteten Skalenteils gegen die Ruhelage

1. Für kleine Ablenkungen ist der Ausschlagswinkel φ dem Skalenausschlag proportional. Und zwar wird, wenn A den zur Drehaxe senkrecht gemessenen Abstand der spiegelnden Fläche von der Skale, ausgedrückt in Skalenteilen, bedeutet, der Bogenwert eines Skalenteiles gefunden: in absolutem Maße (Anh. 3) $= 1/(2A)$; in Bogengraden usw.:

$$= \frac{1}{A} \cdot 28{,}648^\circ = \frac{1}{A} \cdot 1718{,}9' = \frac{1}{A}\ 103132''.$$

Ferner ist
$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = e/(2A).$$

2. Für größere Ablenkungen gelten die Reihen

$$\varphi = \frac{28{,}648^0}{A} e\left(1 - \tfrac{1}{3}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{1}{5}\frac{e^4}{A^4}\cdots\right)$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \tfrac{1}{4}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{1}{8}\frac{e^4}{A^4}\cdots\right)$$

$$\sin\varphi = \frac{e}{2A}\left(1 - \tfrac{3}{8}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{31}{128}\frac{e^4}{A^4}\cdots\right)$$

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{e}{4A}\left(1 - \tfrac{11}{32}\frac{e^2}{A^2} + \tfrac{431}{2048}\frac{e^4}{A^4}\cdots\right).$$

Bis zu Ablenkungen von 6° wird meistens das erste Korrektionsglied genügen. Man reduziert hiernach einen Skalenausschlag e auf eine dem Bogen, der Tangente, dem Sinus, dem Sinus des halben Winkels proportionale Größe, indem man $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ oder $\frac{11}{32}\cdot e^3/A^2$ von e abzieht.

3. Für beliebig große Ablenkungen ist an gerader Skale
$$\operatorname{tg}2\varphi = e/A \quad \text{oder} \quad \varphi = \tfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}(e/A).$$

Die letztere Formel erhält man durch eine einfache geometrische Betrachtung, die anderen aus den Reihenentwickelungen für φ, $\operatorname{tg}\varphi$ usw.

In Tab. 28 findet sich für verschiedene Skalenabstände die Korrektion auf Bögen; um auf die Tangente zu reduzieren, hat man die Korrektionszahlen um ihren 4ten Teil zu verkleinern. Man stellt die Tabelle, ev. auf das wirkliche A interpoliert, graphisch dar (6) und entnimmt aus der Kurve die Werte für bestimmte Ausschläge.

Ausführliche Reduktionstafeln s. Czermak, Berlin 1890.

Messung eines Skalenabstandes. Die Messung bis auf etwa ± 1 mm mit Bandmaß, mit einem Draht, den man nachher vergleicht, oder mit zwei Maßstäben, die man aneinander gleiten läßt, bietet meist keine Schwierigkeit. Zu genauen Messungen können etwa zwei Kontaktmaßstäbchen dienen, von denen man den einen mit dem Spiegel, den anderen mit der Skale in Berührung bringt. Von den Maßstäbchen senkelt man, wenn ein Horizontalabstand zu messen ist, mit feinen Drähten vor einen hinreichend langen Maßstab oder auf zwei Punkte des Fußbodens, deren Abstand genau gemessen werden kann.

Papierskalen ändern ihre Länge mit der Zeit merklich; mm-Skalen auf Milchglas (z. B. von Hartmann & Braun) sind wohl die besten.

Korrektionen wegen verschiedener Umstände.

a) Wegen Deckglasdicke. Liegt in dem Wege der Lichtstrahlen eine feste Glasplatte von der Dicke d und dem Brechungsverhältnis n, so hat man von dem gemessenen Skalenabstand abzuziehen $d(n-1)/n$, also für gewöhnliches Glas nahe $\frac{1}{3}d$. (Vgl. 62, 1.)

b) Wegen Spiegeldicke. Der von der Vorderfläche eines rückwärts belegten Glasspiegels bis zur Skale gemessene Abstand A ist zu vermehren, nicht um die ganze Dicke δ, sondern nur um die optische Dicke δ/n des Spiegels, also nahe um $\frac{2}{3}\delta$. Ist die Glasdicke der Messung mit dem Maßstabe unzugänglich, so kann man diese „optische Dicke" auch mit dem Mikroskop als den halben Abstand eines Punktes auf der Vorderfläche von seinem Bilde in der spiegelnden Fläche bestimmen. Vgl. 62, 3.

c) Wegen Spiegelneigung. Die Vertikalebene der Skale werde getroffen von der Spiegelnormale in der Höhe N, von der durch den Spiegel gelegten Horizontalen in der Höhe H, von der Visierlinie des Fernrohrs in der Höhe F. Dann ist anstatt des gemessenen Horizontalabstandes A_0 der Skale vom Spiegel in Rechnung zu setzen

$$A = A_0 + \frac{(N-H)(N-F)}{A_0}.$$

d) Wegen Spiegelkrümmung. Ist ein nicht ebener Ablesespiegel in der Entfernung a von der Drehaxe angebracht, so muß der gemessene Skalenabstand A_0 für Konkavspiegel vermehrt, für Konvexspiegel vermindert werden um $A_0 a/r$, wenn r den Krümmungshalbmesser des Spiegels (66 III) bedeutet. Da die Spiegel sich schon durch das Fassen leicht etwas verziehen, so kann diese Korrektion für stark exzentrische Spiegel beträchtlich werden

F. K., Wied. Ann. 31, 96. 1887; Ausführliches bei Holman, Technology quarterly, Sept. 1898.

26. Ableitung der Ruhelage aus Schwingungen.

Der Skalenteil, auf welchen ein schwingender Zeiger oder Spiegel sich einstellen würde, wenn er in Ruhe wäre, die Ruhelage oder Gleichgewichtslage, läßt sich durch Beobachtung des schwingenden Zustandes auf folgende Weisen ableiten.

1. Umkehrbeobachtungen. Ist die Dämpfung der Schwingungen schwach, so findet sich die Ruhelage z. B. aus je drei aufeinander folgenden Umkehrpunkten, indem das arithmetische Mittel aus Nr. 1 und 3 mit Nr. 2 zum Mittel vereinigt wird. Dies kann man auf eine beliebige Anzahl von Ablesungen ausdehnen und nachher das Gesamtmittel bilden; die Endbestimmungen kommen dabei freilich weniger zur Geltung als die mittleren. — Hat man eine beliebige ungerade Zahl von Umkehrpunkten beobachtet, so kann man auch einerseits aus Nr. 1, 3, 5 . ., andererseits aus Nr. 2, 4 . . das Mittel nehmen

und beide Werte zum Hauptmittel vereinigen. Vgl. z. B. **10** II. — Bei raschen Schwingungen kann man etwa je zwei überschlagen.

2. Standbeobachtungen. Wenn die Bewegung so langsam ist, daß man in jedem Augenblick den Stand auf der Skale genau ablesen kann, so gibt das arithmetische Mittel aus zwei beliebigen, um die Zeit der Schwingungsdauer auseinander liegenden Ablesungen die Ruhelage.

3. Gedämpfte Schwingungen. Ist eine stärkere Dämpfung vorhanden (z. B. durch einen Multiplikator oder einen Kupferdämpfer um eine Magnetnadel oder durch einen Luftdämpfer), so findet sich aus zwei um die Schwingungsdauer auseinander liegenden Ablesungen p_1 und p_2, z. B. aus zwei Umkehrpunkten, die Ruhelage p_0, wenn k das Dämpfungsverhältnis ist (vgl. 27 und das Beispiel daselbst),

$$p_0 = p_2 + (p_1 - p_2)/(1 + k).$$

Zum Beruhigen von Schwingungen einer Magnetnadel dient ein Magnet, der nach dem Gebrauch hinreichend entfernt in der Höhe der Nadel vertikal aufgestellt wird.

27. Dämpfung und logarithmisches Dekrement.

Von mannigfacher Bedeutung für magnetische und elektrische Messungen ist die Abnahme der Schwingungen, etwa einer Magnetnadel, welche durch eine Kupferhülse oder einen Multiplikator gedämpft ist. Die Dämpfung entsteht hier durch die von der bewegten Nadel in dem Kupfer induzierten Ströme; ihr Gesetz (108) sagt, daß kleine Bogen in geometrischer Reihe abnehmen. Das konstante Verhältnis k eines Schwingungsbogens zu dem folgenden heißt Dämpfungsverhältnis und $\log k = \lambda$ das logarithmische Dekrement (Gauß).

Man erregt (etwa durch einen elektrischen Strom oder einen Magnet) Schwingungen und beobachtet eine Reihe von Umkehrpunkten. Die Differenz zweier aufeinanderfolgender Umkehrpunkte, bei größeren mit dem Spiegel beobachteten Schwingungen nach 25 auf Bogenwert korrigiert, gibt den Bogen. Ist a_p die Größe des $p$ten, a_q die des $q$ten Bogens, so gilt

$$k = \left(\frac{a_p}{a_q}\right)^{\frac{1}{q-p}} \quad \text{oder} \quad \lambda = \frac{\log a_p - \log a_q}{q - p}.$$

Aus einer Reihe (am besten einer ungeraden Zahl) von Umkehrpunkten kann man die Dämpfung so herleiten, wie das folgende Beispiel zeigt. e ist die Entfernung des Umkehrpunktes vom mittleren Skalenteil (hier 500). Der Skalenabstand vom Spiegel betrug 2600 Sk.-T., also die Korrektion der Ausschläge auf Bogenwert $\frac{1}{8}e^3/2600^2$ (25, 2; Tab. 28). Aus Bogen Nr. 1 und 4, 2 und 6 etc. wird λ und k erhalten.

Hinter dem Vertikalstrich ist mit dem unten abgeleiteten Dämpfungsverhältnis $k = 1{,}151$ aus je 2 Umkehrpunkten die Ruhelage (26, 3) berechnet.

Beobachtete Umk.-Punkte	e	$\frac{e^3}{8 \cdot 2600^2}$	Korrigierte Umk.-Punkte	Bogen a	$\frac{a}{2{,}151}$	Ruhelage.
285,0	215	0,5	285,5	424,0	197,1	512,4
710,0	210	0,5	709,5	368,1	171,1	512,5
341,2	159	0,2	341,4	320,9	149,2	513,1
662,5	162	0,2	662,3	278,3	129,4	513,4
383,9	116	0,1	384,0	241,6	112,3	513,3
625,7	126	0,1	625,6	210,0	97,6	513,2
415,6	84	0,0	415,6			
						512,98

Man erhält aus 1 und 4 $\lambda = \frac{1}{3}(\log 424{,}0 - \log 278{,}3) = 0{,}0610$
„ 2 „ 5 368,1 241,6 0,0610
„ 3 „ 6 320,9 210,0 0,0614

Mittel $\lambda = 0{,}061\bar{1}$; $k = 1{,}151$.

Die Anwendung natürlicher Logarithmen oder die Multiplikation der obigen λ mit 2,3026 liefert das „natürliche log. Dekrement“. Über die Theorie und über aperiodische Dämpfung vgl. 108.

Inkonstanz der Dämpfung. Für größere Schwingungen nimmt die Dämpfung, besonders bei schmalem oder hohem Multiplikator und längerem Magnet etwas ab. Die Abnahme gegen die Dämpfung bei sehr kleinen Schwingungen ist ungefähr dem Quadrate der Schwingungsweite proportional; sie wird empirisch bestimmt.

Luftwiderstand. Wird die Dämpfung gesucht, welche ein Multiplikator usw. allein geben würde, so beobachtet man sowohl bei geschlossener wie bei unterbrochener Leitung. Das log. Dekrement im letzteren von dem im ersteren Falle abgezogen gibt dasjenige des Multiplikators allein.

27a. Bifilare Aufhängung (Harris, Gauß).

Ein an zwei Fäden aufgehangener schwerer Körper ist im Gleichgewicht, wenn er die möglichst tiefe Lage hat. Dabei liegen die Fäden in derselben Vertikalebene. Für kleine Drehungen des Bifilarkörpers ist das rücktreibende Moment dem Sinus der Ablenkung proportional. Wenn die Länge der Fäden sehr groß gegen ihren Abstand ist, gilt dies auch für größere Ablenkungen.

Die Fäden sind gleich gespannt, wenn der Schwerpunkt des Bifilarkörpers in der mittleren Vertikalen liegt. Durch Heben des Körpers an einem in dieser gelegenen Faden darf seine Lage sich also nicht ändern.

Zur bifilaren Aufhängung eines Körpers ist oft eine Suspension wie Fig. bequem Das kleine Laufgewicht dient zum Äquilibrieren.

I. Berechnung der Direktionskraft. Es seien e_1 und e_2 der obere und untere Horizontalabstand der beiden Fadenenden und h die mittlere Fadenlänge; laufen die Fäden nicht vertikal, so bedeutet h den mittleren Vertikalabstand der beiden Fadenenden. Endlich sei P die Summe der nahe gleichen Vertikalspannungen der Fäden.

Der Ablenkungswinkel α gibt das Drehmoment der Schwere

$$P\frac{e_1 e_2}{4h}\cdot\sin\alpha.$$

P ist das Gewicht des angehängten Körpers, vermehrt um das halbe Gewicht der Fäden; im CGS-System Masse in gr mal $g = 981$ (s. **35**, Anh. Nr. 7 und Tab. 43).

Fadensteifheit. Diese wirkt so, als ob die Drähte verkürzt würden. Es seien ϱ und E Halbmesser und Elastizitätsmodul bezogen auf cm und gr. Dann muß man von der gemessenen Länge abrechnen

$$\delta = \varrho^2\sqrt{\frac{2\pi E}{P}}\ \text{cm}.$$

Torsionselastizität. Die Direktionskraft der Torsion beider Fäden zusammen beträgt (55)

$$\frac{2\pi}{5}\frac{\varrho^4 E}{h}.$$

Über $[E]$ im CGS-System vgl. **52** u. Anh. 13.

Die gesamte, mit $\sin\alpha$ zu multiplizierende „Direktionskraft" ist in absolutem Maße

$$D = gm\frac{e_1 e_2}{4(h-\delta)} + \frac{2\pi}{5}[E]\frac{\varrho^4}{h}.$$

Beispiel, 300 cm lange, 0,01 cm dicke Messingdrähte, also $\varrho = 0{,}005$; $E = 90 \cdot 10^7$ gr-Gew./cm²; $[E] = 981 \cdot 90 \cdot 10^7 = 88 \cdot 10^{10}$ CGS. Der Bifilarkörper wog 100 gr. Dann ist $\vartheta = 0{,}005^2 \sqrt{(2\pi \cdot 90 \cdot 10^7/100)} = 0{,}19$ cm. Ferner ist

$$\frac{2\pi}{5}[E]\frac{\varrho^4}{h} = \frac{2 \cdot 3{,}14}{5} 88 \cdot 10^{10} \frac{0{,}005^4}{300} = 2{,}3\,[\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sek}^{-2}].$$

Die Drähte wogen zusammen 0,42 gr, also $m = 100 + 0{,}21 = 100{,}21$ gr.

Endlich war $e_1 = e_2 = 12$ cm; also

$$gm\frac{e_1 e_2}{4(h-\vartheta)} = 981{,}0 \cdot 100{,}21 \frac{12 \cdot 12}{4 \cdot 299{,}81} = 11804\,[\mathrm{cm}^2 \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sek}^{-2}].$$

Die gesamte Direktionskraft beträgt danach 11806 [cm²·gr·sek⁻²].

Vgl. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

II. Direktionskraft aus Schwingungsbeobachtungen. Aus dem auf die Drehaxe bezogenen Trägheitsmoment K des Bifilarkörpers und aus der Schwingungsdauer t findet sich (29; Anh. 12) $D = \pi^2 \cdot K/t^2$.

Zeitmessungen. Geographische Bestimmungen.

28. Schwingungsdauer.

Schwingungsdauer eines Pendels, einer Magnetnadel usw. nennt man die Zeit, welche zwischen einer Umkehr bis zur nächsten auf der anderen Seite verfließt.[1] Bei langsamen Schwingungen ist die Umkehr zur Zeitbestimmung ungeeignet, denn die Bewegung ist gerade in diesem Augenblick unmerkbar. Dagegen passiert der Körper einen der Gleichgewichtslage nahe gelegenen Punkt mit der größten Geschwindigkeit, so daß der Durchgang scharf zu beobachten ist. Aus zwei aufeinander folgenden Durchgangszeiten durch denselben Punkt (in entgegengesetzter Richtung) findet sich der zwischenliegende Augenblick der Umkehr als arithmetisches Mittel.

Man markiert einen der Ruhelage naheliegenden Punkt (an der Skale durch Überhängen eines hinreichend sichtbaren Fadens), beobachtet die Zeiten, in welchen dieser Punkt passiert wird, nach dem Schlage einer Sekundenuhr und nimmt zunächst aus je zwei solchen benachbarten Zeiten das Mittel. Die Zehntelsekunden schätzt man aus dem Verhältnis der Abstände des Fadens von der Marke bei den Sekundenschlägen, die dem Durchgang vorausgehen und ihm nachfolgen.

Berechnung der Schwingungsdauer. Würde man aus n so beobachteten aufeinander folgenden Schwingungsdauern wieder das Mittel nehmen, so erhielte man dasselbe Resultat, wie wenn man die Differenz der ersten und der letzten Umkehrzeit durch n dividierte. Die zwischenliegenden Beobachtungen wären also nutzlos. Um alle zu verwerten, kann man sie in zwei Hälften teilen, immer aus entsprechenden Nummern der beiden Hälften die Differenzen bilden, hieraus das arithmetische Mittel berechnen und dasselbe durch $\frac{1}{2}n$ dividieren. Über etwaige Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. 3 II.

[1]) In der Akustik und Optik heißt die Zeit einer ganzen Periode die Schwingungsdauer.

Durchgang beob.

min	sek
10	3,3
	16,5
	29,9
	43,0
	56,6
11	9,9
	23,3

Umkehrzeit ber.

Nr.	min	sek
1.	10	9,90
2.		23,20
3.		36,45
4.		49,80
5.	11	3,25
6.		16,60

Schwingungsdauer

	sek
aus Nr. 1 und 4	39,90 : 3 = 13,30
2 und 5	40,05 : 3 = 13,35
3 und 6	40,15 : 3 = 13,38
	Mittel = 13,34

Am vorteilhaftesten ermittelt man einige weiter auseinander liegende Umkehrzeiten für genaue Ansprüche z. B. folgendermaßen. Es wird zweimal (oder mehrmals) eine gerade Anzahl, z. B. sechs aufeinander folgende Durchgangszeiten, durch den markierten Punkt beobachtet. Dann nimmt man in jedem Beobachtungssatz aus je zwei symmetrisch gegen die mittelste Elongation gelegenen Zeiten das arithmetische Mittel und aus diesen wieder das Hauptmittel.

Erster Satz.

Durchgang Nr.	min	sek	Mittel Nr.	min	sek
1.	7	40,7			
2.		49,0			
3.		56,6			
4.	8	4,0	3. 4.	7	59,80
5.		10,7	2. 5.		59,85
6.		16,8	1. 6.		59,75
			Hauptmittel	7	59,80

Zweiter Satz.

Durchgang min	sek
10	10,5
	18,9
	25,6
	33,9
	40,6
	48,9

Mittel min	sek
10	29,75
	29,75
	29,70
10	29,73

Die beiden Hauptmittel sind die Zeitpunkte zweier Elongationen so genau, wie sie aus diesen Beobachtungen zu entnehmen sind. Ihr Unterschied (= 149,93 sek), dividiert durch die Anzahl der zwischen ihnen verflossenen Schwingungen, gibt die Schwingungsdauer. Es ist nicht notwendig, diese Schwingungen gezählt zu haben; man kann die Zahl aus einem Näherungswert der Schwingungsdauer ableiten. Aus den beiden ersten und den beiden letzten Beobachtungen des ersten Satzes finden sich 7^{min} $44{,}8^{sek}$ und 8^{min} $14{,}7^{sek}$ als Zeitpunkte, zwischen denen 4 Schwingungen liegen. Danach betrüge die Schwingungsdauer 29,9 : 4 = 7,47 sek. Dividiert man nun 7,47 in 149,93, so kommt 20,07; die gesuchte Anzahl von Schwingungen ist also ohne Zweifel 20, die Schwingungsdauer also 149,93 : 20 = 7,496 sek. Um über die Anzahl sicher zu sein, beginne man die Beobachtungen immer mit einer bestimmten Richtung, dann weiß man, daß die Zahl eine gerade ist.

Für genaue Messungen macht man eine größere gerade Anzahl $2m$ von Beobachtungssätzen, kombiniert Nr. 1 mit $m+1$, 2 mit $m+2, \cdots m$ mit $2m$ und nimmt das Mittel der einzelnen Resultate.

Folgen die Schwingungen zu rasch, um alle Durchgänge zu notieren, so kann man immer zwei (allgemein eine gerade Anzahl) Durchgänge überspringen, z. B. aus den Durchgängen Nr. 1 4 7 10 13 16 den Satz von Beobachtungen bilden. Übrigens rechnet man wie oben und teilt schließlich das Resultat durch 3.

Sehr schnelle Schwingungen von wenigen Sekunden Dauer beobachtet man besser in ihren Umkehrpunkten, als in den Durchgängen durch die Mitte, und zwar am bequemsten in lauter einseitigen Umkehrpunkten, wobei man nach Bedürfnis überspringen kann.

Die Schwingungsdauer einer gedämpften Nadel vom log. Dekrement λ verhält sich zu derjenigen ohne Dämpfung wie $\sqrt{\pi^2 + (2{,}303 \cdot \lambda)^2}$ zu π (Tab. 29). Nur bei starker Dämpfung wird die Korrektion beträchtlich.

Ob mit Spiegel und Skale oder mit bloßem Auge beobachtet wird, ist für die Methode natürlich gleichgültig.

Methode der Koinzidenzen siehe 35.

Reduktion der Schwingungsdauer auf unendlich kleine Bögen.

Die Schw.-D. einer durch Torsionselastizität getriebenen Masse ist von der Amplitude unabhängig. Häufiger aber kommt der Fall vor (Magnetnadel, Pendel), daß das Drehmoment dem Sinus des Ablenkungswinkels proportional ist. Dann wächst die Schw.-D. t mit der Amplitude α nach dem Ausdruck

$$t = t_0 \left(1 + \tfrac{1}{4} \sin^2 \tfrac{1}{2} \alpha + \tfrac{9}{64} \sin^4 \tfrac{1}{2} \alpha + \cdots \right).$$

Fast immer sucht man den Grenzwert t_0, welchem die Schwingungsdauer sich annähert, wenn die Schwingungsweite verschwindend klein wird. Über die diesbezügliche Korrektion siehe für große Schwingungen Tab. 27. Da bei kleinen, mit Spiegel beobachteten Schwingungsweiten von p Sk.-T. $\frac{1}{4} \sin^2 \frac{1}{4} \alpha = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4} \frac{p}{2A} \right)^2 = \frac{1}{256 A^2} p^2$ zu setzen ist (25), wenn A den Skalenabstand in Sk.-T. bezeichnet, so ist, unter Vernachlässigung der 4. Potenz, hier von dem beobachteten t abzuziehen $t \cdot \frac{1}{256 A^2} p^2$.

Als den Wert von α oder p, welcher in obige Formeln eingesetzt wird, kann man meistens das arithmetische Mittel a aus dem ersten und dem letzten Bogen einsetzen. Genauer und immer genügend ist, wenn

noch die Differenz des ersten und letzten Bogens mit d bezeichnet wird, einzusetzen $a(1 - \frac{1}{32} d^2/a^2)$.

Über stark gedämpfte Schwingungen vgl. oben.

29. Trägheitsmoment.

Das Trägheitsmoment einer punktförmigen Masse m im Abstande l von einer Drehungsaxe ist $l^2 m$. Das T.-M. mehrerer fest miteinander verbundener Punkte oder eines Körpers ist die Summe oder das Integral dieser Ausdrücke, berechnet für alle Körperelemente. Die Einheit, nach welcher Masse und Länge gemessen sind, wird durch ein der Zahl für das T.-M. beigesetztes [gr·cm²] oder [mg·mm²] usw. angegeben. (Vgl. Anhang Nr. 12.)

Schwingungsdauer t, Direktionskraft D und Trägheitsmoment K hängen durch die Formel $t^2/\pi^2 = K/D$ zusammen.

I. Berechnung.

Dieselbe setzt regelmäßige Gestalt und homogenes Material voraus. m bedeute immer die Masse des Körpers, K sein T.-M., bezogen auf eine durch den Schwerpunkt gehende Drehaxe.

Dünner Stab von der Länge l. Bezogen auf die zum Stabe senkrechte Axe ist $K = \frac{1}{12} m l^2$.

Rechtwinkliges Parallelepipedum. a und b seien zwei Kanten desselben. Das T.-M., bezogen auf die zur dritten Kante parallele Axe, ist $K = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2)$.

Cylinder (auch Kreisscheibe) vom Halbmesser r. Es ist, bezogen auf die Axe des Cylinders, $K = \frac{1}{2} m r^2$.

Bezogen auf den Kreisdurchmesser des Cylinders, wenn dessen Länge $= l$, ist $K = m(\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4} r^2)$.

Hohlcylinder (auch Ring) von den Halbmessern r_0 und r_1. Bezogen auf die Axe $K = \frac{1}{2} m(r_0^2 + r_1^2)$; bezogen auf die zur Axe senkrechte Mittellinie $K = m(\frac{1}{12} l^2 + \frac{1}{4}(r_0^2 + r_1^2))$.

Kugel vom Halbmesser r. Bezogen auf einen Durchmesser ist $K = \frac{2}{5} m r^2$.

Hilfssatz. Ist das T.-M. K auf eine durch den Schwerpunkt gelegte Axe bezogen, K' aber auf eine dieser parallele im Abstande a befindliche Axe, so ist $K' = K + m a^2$. Z. B. ist das T.-M. eines dünnen Stabes, bezogen auf eine zum Stab senkrechte Axe an seinem Ende $= \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m l^2 = \frac{1}{3} m l^2$.

II. Bestimmung aus der Schwingungsdauer mit und ohne Belastung (Gauſs).

a) Das Verfahren ist anwendbar auf Körper, die mit konstanter Direktionskraft um eine vertikale Axe schwingen, also besonders auf Magnete. Anderen Körpern kann man durch die Torsionselastizität eines Aufhängedrahtes (Stahl, Platiniridium) eine konstante Direktionskraft geben.

Man beobachtet die Schwingungsdauer t, vermehrt dann das Trägheitsmoment, ohne die drehenden Kräfte zu ändern, um eine bekannte beträchtliche Größe K_1 und beobachtet wieder die Schwingungsdauer t'. Dann ist das gesuchte T.-M.

$$K = K_1 t^2/(t'^2 - t^2).$$

K_1 kann z. B. durch einen ausgemessenen und gewogenen Ring (s. oben) gegeben sein. Oder es besteht aus zwei gleichen Massen (Summe $= m$), in gleichem Abstande l ihrer Schwerpunkte von der Drehaxe mit Spitzen oder kurzen Fäden aufgehangen oder auf Stifte gesteckt. Dann ist $K_1 = ml^2 + K_0$, wenn K_0 die Summe der auf die Vertikalaxe durch die Schwerpunkte bezogenen einzelnen T.-M. bedeutet.

Der Ausdruck setzt voraus, daß die Massen sich mit drehen, also z. B. bifilar oder auf Spitzen mit großer Reibung aufgehängt oder daß sie auf Stifte aufgesteckt sind. Hingen die Massen an ganz dünnen Fäden, so daß sie sich parallel bewegten, so wäre $K_1 = ml^2$ zu setzen.

l mißt man als den halben Abstand der Aufhängepunkte der Gewichte voneinander, bei bifilar aufgehangenen Massen als das Mittel der Fadenabstände längs jeder Seite. Exzentrizität des Schwerpunktes aufgesteckter Gewichte fällt durch Drehen um 180° heraus.

Genaueres über die allgemeine Berücksichtigung des Mitschwingens der Belastungen s. Kreichgauer, Wied. Ann. 25, 289. 1885.

Beispiel. Durchmesser der Belastungscylinder 1,00 cm $r = 0,50$ cm
Sie wiegen zusammen 50,00 gr $m = 50,00$ gr
Abstand ihrer Axen voneinander $= 10,026$ cm $l = 5,013$ cm

$$K_1 = 50,00(5,013^2 + \tfrac{1}{2}\cdot 0,25) = 1262,8 \text{ gr}\cdot\text{cm}^2.$$

Ferner wurden die Schwingungsdauern gefunden: unbelastet $t = 9,737$, belastet $t' = 14,267$ sek.

Das gesuchte T.-M. ist

$$K = 1262,8\cdot 9,737^2/(14,267^2 - 9,737^2) = 1101,1 \text{ gr}\cdot\text{cm}^2.$$

b) Brauchbar ist unter Umständen auch die abgeänderte Anordnung, daß ein Schwingungskörper von bekanntem T.-M. K_0 mit dem unbekannten K belastet wird. Steigt hierdurch die Schwingungsdauer von t_0 auf t, so ist $K = K_0(t^2 - t_0^2)/t_0^2$.

III. Mittels bifilarer Aufhängung.

Gegeben sei eine ausmeßbare Bifilarsuspension (Fig. S. 112), in welche man den zu bestimmenden Körper einlegen kann.

Nach **27a** werde die Direktionskraft D_0 berechnet. Die Schwingungsdauer betrage t_0. Dann legt man den Körper von dem gesuchten T.-M. K ein, so daß sein Schwerpunkt in der mittleren Vertikale liegt. Die jetzige Direktionskraft sei D und die Schwingungsdauer t; dann ist offenbar

$$K = (Dt^2 - D_0 t_0^2)/\pi^2.$$

Über die Beobachtung der raschen Schwingungen s. S. 116.

Ist der zu bestimmende Körper magnetisiert, so beobachtet man in den zwei entgegengesetzten Meridianlagen die Schwingungsdauern t_1 und t_2. Es ist zu setzen $t^2 = 2t_1^2 t_2^2/(t_1^2 + t_2^2)$.

F. K., Wied. Ann. 22, 422. 1884.

29a. Messung sehr kurzer Zeiten.

Man verwendet sehr rasch laufende Uhren mit elektrischer Auslösung und Arretierung, graphische Aufzeichnung auf Flächen, die sich mit bekannter Geschwindigkeit fortschieben, als empfindlichstes Mittel endlich die Verschiebung des Reflexes in einem rotierenden Spiegel.

Über elektrische Methoden mit dem ballistischen Galvanometer vgl. **109**.

1. Hipp'sches Chronoskop. Ein Uhrwerk läuft mit seinem raschesten Rad, in dessen Zähne eine schwingende Stahlfeder als Hemmung eingreift, 10 mal in 1 sek um. Mittels einer elektromagnetischen Vorrichtung wird durch Stromunterbrechung ein bis dahin ruhendes Zeigerwerk zu Anfang des zu messenden Zeitraums mit dem laufenden Rade verbunden, zu Ende durch Wiederschließen des Stromes von ihm getrennt und angehalten.

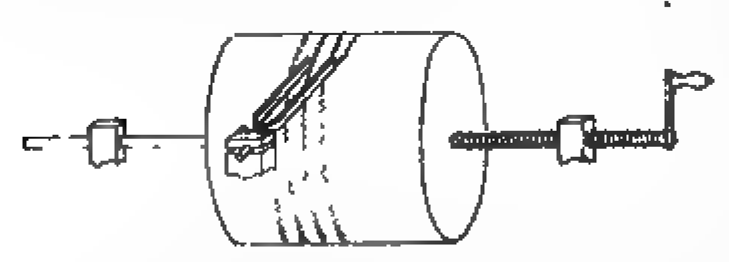
Bei der Messung einer Schußgeschwindigkeit z. B. unterbricht die Kugel den Strom beim Austreten aus dem Lauf durch Zerreißen eines Leitungsdrahtes und schließt ihn beim Aufschlagen auf das Ziel mittels einer zweiten Leitung mit einem fein eingestellten Stoßkontakt.

Eine Fallzeit wird gemessen, indem das Auslösen eines Stromkontakts zugleich das fallende Gewicht auslöst, welches unten so, wie eben beschrieben, einen Stoßkontakt schließt.

Die Zeitverluste zwischen den Vorgängen und ihrer Wirkung auf das Zeigerwerk müssen zu Anfang und zum Schluß gleich sein; durch Regulieren der elektromagnetischen Vorrichtung mittels Stromstärke und Spannfeder wird dies bewirkt. Die Angaben des Chronoskops werden kontrolliert bez. korrigiert nach den Fallzeiten so schwerer Kugeln (Hartblei, $1\frac{1}{2}$ cm Durchmesser), daß man auf sie während der ersten Zehntel von Sekunden das bekannte Fallgesetz anwenden darf.

2. Schreibende Stimmgabel usw. Eine an einem tönenden, am besten elektromagnetisch angeregten Körper von bekannter Schwingungs-

zahl (57) befestigte leichte, biegsame Spitze schreibt auf eine sich fortbewegende berußte Fläche. Die beiden Ereignisse, deren Zeitabstand zu messen ist, werden neben die entstehende Sinuskurve notiert. Die Anzahl der zwischen ihnen liegenden Wellen mit der Schwingungsdauer multipliziert gibt das Resultat.



Das Markieren der beiden Augenblicke geschieht meist elektrisch, entweder durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung, die durch die Wirkung der Ereignisse auf den Strom im Elektromagnet ihren Ort verändert. Oder die elektrische Wirkung besteht in einem Induktionsfunken, der von einer, neben der schreibenden Spitze befindlichen Metallspitze durch das berußte Papier auf dessen Unterlage springt und im Ruß eine Marke zurückläßt. Auch Photographie ist anwendbar. Siehe auch **57**, 1.

Vgl. z. B. den Siemens'schen Funkenchronograph, Pogg. Ann. 66, 435. 1845.

3. Fallender Körper, Pendel. Die Zeitmarken werden auf einen fallenden vertikalen Maßstab gezeichnet, oder auf einen Kreisbogen, der mit einem Pendel schwingt. Ihr Abstand läßt sich in Zeit umrechnen, da die Geschwindigkeit des Objekts sich aus dem Verhältnis seiner Lage im Augenblick der Messung zu der Ausgangsstellung ergibt; im ersteren Falle als $\sqrt{2gh}$, wenn h die vorher durchlaufene Fallhöhe bedeutet. — Die Lineargeschwindigkeit eines Punktes vom Radius r am Pendel beträgt $(2\pi r/\tau)\cdot\sqrt{\sin^2 \frac{1}{2} A - \sin^2 \frac{1}{2} \alpha}$, wenn τ die Schwingungsdauer, A der Winkel, aus dem es losgelassen wurde, und α der augenblickliche Ablenkungswinkel ist.

Siehe auch **109**, Pendelunterbrecher.

4. Rotierende Trommel. Ähnlich wie unter 2. Es wird die anderweitig gemessene Umlaufsgeschwindigkeit zugrunde gelegt.

Über Umlaufzähler (Gyrometer, Tachometer) s. **57**, 7 u. **119** V.

5. Rotierender Spiegel. Die Umlaufszeit sei τ, die Drehung beträgt dann in der Zeit t den absolut gemessenen Winkel $\alpha = t \cdot 2\pi/\tau$. Das Bild eines um A vor dem Spiegel liegenden Objekts verschiebt sich bei der Drehung α um $\alpha \cdot 2A$, in der Zeit t also um $l = 4\pi A t/\tau$. Wird l gemessen, z. B. mittels eines um A hinter dem Spiegel liegenden Maßstabes, so ist also $t = \frac{1}{4\pi} \frac{l}{A} \tau$. Dieselbe Formel gibt die Zeit zwischen zwei Ereignissen, die an demselben Ort aufeinander folgen und im Spiegel gesehen um l auseinander liegen. Ist z. B. $A = 2000$ mm, $\tau = \frac{1}{100}$ sek, $l = 1$ mm, so wird $t = \frac{1}{2500000}$ sek. Der Fehler der Längenmessung kann leicht < 1 mm gemacht, ferner A vergrößert, τ erheblich verkleinert werden, so daß kurze Zeiten auf viel weniger als 10^{-7} sek genau zu bestimmen sind.

In vielen Fällen kann man durch einen mit dem Instrument bewegten elektrischen Kontakt bewirken, daß die Ereignisse eintreten, wenn der

Mechanismus die richtige Stellung hat. — Akustische Schwingungen von Flammen lassen sich mit langsamer, Oszillationen in einem elektrischen Entladungsfunken mit schneller Rotation sichtbar machen und messen.

Über die Messung von Lichtgeschwindigkeiten (Foucault, Michelson) vgl. z. B. Wüllner, Physik IV 25. 1899; Müller-Pfaundler, II 14. 1897.

30. Einige astronomische Bezeichnungen.

1. Zur Bestimmung des Ortes eines Gestirns dienen folgende Begriffe:

Azimut A: Bogen des Horizonts vom Südpunkte des Meridians zum Vertikalkreise des Gestirns (Winkel zwischen Vertikalkreis und Meridian).

Höhe h. Bogen des Vertikalkreises vom Horizont zum Gestirn.

Deklinationskreise (oder Stundenkreise): Größte Kreise durch den Himmelspol.

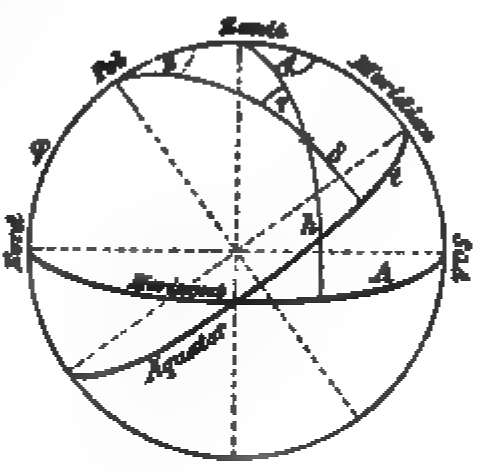
Stundenwinkel t: Bogen des Himmelsäquators von dem Südpunkt des Meridians zum Deklinationskreis des Gestirns.

Deklination δ: Bogen des Deklinationskreises vom Äquator zum Gestirn.

Kulmination: Durchgang durch den Meridian eines Ortes.

Polhöhe φ. Geographische Breite eines Ortes.

Parallaktischer Winkel γ: Winkel zwischen Deklinationskreis und Vertikalkreis des Gestirns.



Aus dem sphärischen Dreieck von den Seiten $90 - \delta$ $90 - h$ $90 - \varphi$ und den Winkeln $180 - A$ t γ folgen u. a. die Gleichungen

1. $\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cdot \cos A$
2. $\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cdot \cos t$
3. $\cos h \sin A = \cos\delta \sin t$
4. $\cos h \cos A = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cdot \cos t$
5. $\sin t \operatorname{ctg} A = -\cos\varphi \operatorname{tg}\delta + \sin\varphi \cos t$.

Frühlingspunkt: Aufsteigender Knoten der Ekliptik.

Rektaszension eines Gestirns α: Bogen des Äquators vom Frühlingspunkt zum Deklinationskreise des Gestirns. Der Äquator wird dabei in 24^h oder in 360^0 geteilt. Die Rektaszension rechnet man der täglichen Bewegung entgegen.

Die übrigen Bögen des Äquators oder des Horizontes zählen im Sinne der täglichen Bewegung.

Die Örter einiger Hauptsterne s. in Tab. 49.

2. Zur Zeitbestimmung werden die Bezeichnungen gebraucht:

Sternzeit z: Bogen des Himmelsäquators vom Südpunkt des Meridians zum Frühlingspunkt, den ganzen Äquator zu 24 Stunden gerechnet.

Sterntag: Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Kulminationen eines Fixsterns. 1 mittl. Tag = 1,002738 Sterntag = 1 Sterntag + 235,9 mittl. Sekunden.

Der Sterntag beginnt mit dem Durchgang des Frühlingspunktes durch den Meridian. Ein Gestirn passiert also den Meridian (es kulminiert) in dem Augenblick, wann seine Rektaszension gleich der Sternzeit ist. Allgemein: Die Sternzeit z ist = Stundenwinkel t + Rektaszension α eines Gestirnes, also $t = z - \alpha$.

„Wahrer" oder scheinbarer Mittag: Durchgangszeit des Sonnenmittelpunktes durch den Meridian.

Sonnenzeit: Stundenwinkel der Sonne.

Zeitgleichung: Mittlere Ortszeit minus Sonnenzeit.

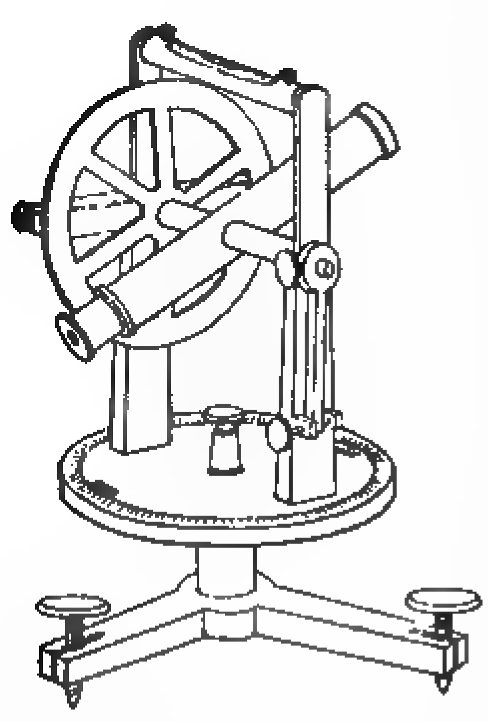
Bei der jetzigen Rechnung nach „Einheitszeit", welche sich auf einen Meridian von der östl. geogr. Länge l_0 Grad bezieht (15° für Mittel-Europa), ist für einen Ort von der östl. geogr. Länge l Grad die mittlere Ortszeit = Einheitszeit + $4(l - l_0)$ min.

Der astronomische Sonnentag beginnt um Mittag, wird von 0 bis 24^h gezählt und führt das Datum des Tages, an dem er beginnt.

Über Deklination der Sonne, Sternzeit und Zeitgleichung s. Tab. 45. Ausführlichere Tafeln im Nautischen Jahrbuch, dem Berliner astr. Jahrb. oder dem Nautical Almanac; auch in Bremiker's Logarithmen. Weitere oder genauere Methoden s. u. a. Brünnow, sphär. Astronomie; Jordan, Zeit- und Ortsbestimmung; Wislicenus, geogr. Ortsbestimmungen, Leipzig 1891.

30a. Theodolit. Universalinstrument.

Die Instrumentalbedingung, daß die Drehaxe des Fernrohrs auf der anderen Drehaxe senkrecht steht, setzen wir als erfüllt voraus.



Berichtigung der Libelle. Die Blase soll, wenn die Drehaxe des Fernrohrs horizontal liegt, in oder wenigstens nahe der Mitte einspielen. Um dies zu erkennen oder herbeizuführen, bringt man die aufgesetzte Libelle zum Einspielen und setzt sie dann auf den Zapfen der Axe um oder dreht die Vertikalaxe des Instruments um genau 180°; dann muß die Libelle wieder einspielen. Zeigt sie eine beträchtliche Abweichung, so wird deren Hälfte an der Libelle korrigiert. Die andere Hälfte korrigiert man mit den Fußschrauben und wiederholt die Prüfung. Ein grober Fehler, bei dem die Blase bis an das Ende der Libelle ausschlägt, wird zuvor durch Probieren beseitigt.

Um die Exzentrizität eines Teilkreises zu eliminieren, werden beide um 180° verschiedene Nonien abgelesen. Bei der Rechnung bezieht man die ganzen Grade immer auf Nonius I und nimmt nur in den Unterabteilungen das Mittel aus beiden Ablesungen.

Die Beobachtung hochstehender Objekte mittels eines geraden Fernrohrs kann man dadurch ermöglichen oder erleichtern, daß man vor dem Okular ein kleines, total reflektierendes Prisma befestigt. Um das Fadenkreuz zu erhellen, genügt es, einige qmm weißes Papier schräg vor das Objektiv zu halten und seitlich zu beleuchten.

Zur Messung von Azimutal- und Höhenwinkeln sind die Axen vertikal bez. horizontal zu stellen.

1. Vertikale Axe.

Eine Drehaxe steht vertikal, wenn die Libelle bei der Drehung um diese Axe ihren Stand nicht ändert: man dreht die Libelle zunächst parallel der Verbindungslinie zweier Fußschrauben und bringt sie mit diesen zum Einspielen. Dann dreht man um 180° und berichtigt, falls die Blase jetzt eine andere Stellung zeigt, den halben Unterschied mit den Fußschrauben. Endlich wird um 90° gedreht und mit der dritten Fußschraube dieselbe Einstellung der Blase bewirkt, wie die soeben verlassene. Wenn das Verfahren zum ersten Male noch einen Fehler zurückgelassen hat, so wiederholt man es.

2. Horizontale Axe.

a) Stehen zwei Axen senkrecht aufeinander, so verbürgt die vertikale Stellung der einen von selbst die horizontale der anderen. Diese Bedingung kann ohne Libelle folgendermaßen geprüft werden, wenn kein Kollimationsfehler vorhanden ist (vgl. Nr. 3). Man sucht zwei möglichst entfernt übereinander liegende Objekte, die von dem Fernrohr bei Drehung um seine Axe getroffen werden. Dann dreht man um 180° um die Vertikalaxe und schlägt das Fernrohr durch; die beiden Objekte müssen dann wieder durch eine bloße Drehung um die Fernrohraxe einstellbar sein.

Selbständig prüft man die Horizontalität einer Fernrohraxe:

b) Mit der Libelle. Man prüft zuerst, ob die beiden Zapfen der Fernrohraxe gleich dick sind, indem man nach Einstellung auf das Einspielen der Blase das Fernrohr umlegt (die Zapfen in ihren Lagern vertauscht) und die Libelle in ihrer früheren Stellung wieder aufsetzt. Die gleiche Einstellung der Blase beweist die gleiche Dicke der beiden Zapfen.

Dies vorausgesetzt wird eine horizontale Drehaxe daran erkannt, daß die auf der Axe umgesetzte Libelle den früheren Stand einnimmt.

Ob die Fernrohraxe rund ist, prüft man durch ihre Drehung unter der aufgesetzten Libelle.

c) Mit dem Senkel. Man hängt ein langes Senkel entfernt vor dem Theodolit auf und visiert nach verschiedenen Höhen. Der Kollimationsfehler muß zuvor berichtigt sein.

3. Kollimationsfehler.

a) Zur Prüfung, ob die Sehlinie zur Drehungsaxe des Fernrohrs senkrecht steht, stellt man auf ein ungefähr in der Horizontalebene des Instrumentes gelegenes fernes Objekt ein, dreht den Horizontalkreis um genau 180° und stellt das Fernrohr mittels Durchschlagens in seine frühere Richtung. Das Objekt muß wieder genau einstehen. Ein Unterschied ist zur Hälfte durch Verschiebung des Fadenkreuzes zu berichtigen, worauf man die Prüfung wiederholt.

b) Oder man stellt wie oben ein, legt bei feststehendem Instrument das Fernrohr in seinen Lagern um und richtet es auf denselben Gegenstand; dieser muß wieder im Fadenkreuz erscheinen.

4. Messung einer absoluten Höhe. Horizontal- und Zenit-Punkt.

a) Das Instrument sei nach Nr. 1 bis 3 berichtigt. Man stellt auf den Gegenstand ein und liest den Höhenkreis ab; man dreht die Vertikalaxe um 180°, schlägt das Fernrohr durch, stellt wieder ein und liest den Höhenkreis ab. Der Unterschied (Vorzeichen!) beider Ablesungen gibt den doppelten Zenitabstand des Objekts. Der halbe Unterschied von 90° abgezogen liefert also die Höhe des Objekts über dem Horizont.

Das arithmetische Mittel beider Einstellungen gibt den Zenitpunkt des Höhenkreises, die Hinzufügung von 90° zum Zenitpunkt ergibt den Horizontalpunkt.

b) Quecksilberhorizont. Anstatt das Fernrohr durchzuschlagen, kann man vor dasselbe einen Quecksilberhorizont stellen und nun durch Messung des Höhenwinkels zwischen

dem (sehr entfernten) Objekt und dessen Spiegelbild sowohl die Höhe des Objektes über dem Horizont, wie auch den Zenit- und den Horizontalpunkt des Höhenkreises, in leicht ersichtlicher Weise bestimmen.

Der Quecksilberhorizont erlaubt natürlich auch die absolute Höhenmessung mit einem Spiegelsextanten

Auf Gestirne sind diese Verfahren um die Kulminationszeit direkt anwendbar. Für andere Zeiten bekommt man, wenn die Einstellungen rasch hintereinander ausgeführt werden, die Höhe für den mittleren Augenblick zwischen beiden Beobachtungen. Über hochstehende Objekte vgl. S. 123.

Winkel zwischen zwei Objekten. Aus den Höhenwinkeln h und h' und ihrem gegenseitigen Azimutwinkel A wird der Winkelabstand w zwischen beiden gefunden aus der Gleichung $\cos w = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cdot \cos A$.

31. Bestimmung der Meridianrichtung eines Ortes.

Der Meridian ist die Vertikalebene, in der die Gestirne kulminieren, oder die Vertikalebene des Sonnenmittelpunktes am scheinbaren Mittag, oder die Halbierungsebene zwischen den zwei Azimuten eines Gestirns, denen dieselbe Höhe entspricht. vorausgesetzt, daß das Gestirn inzwischen keine eigene Höhenbewegung ausgeführt hat.

I. Aus der größten Ausschreitung eines Gestirns. Man beobachtet einen Circumpolarstern, am besten den Polarstern selbst, zu der Zeit seiner größten östlichen oder westlichen Ausschreitung. Da zu dieser Zeit die Bewegungsrichtung des Sternes vertikal ist, so kann man bequem und scharf einstellen.

Beobachtet man die östliche und westliche Ausschreitung, so geht der Meridian durch die Halbierungslinie. Insofern die Deklination δ des Gestirns und die Polhöhe φ bekannt ist (Tab. 44, 49), genügt auch eine einseitige Beobachtung Es bildet nämlich der Vertikalkreis der größten Ausschreitung mit der Nordrichtung den Winkel ϑ, den man erhält aus

$$\sin \vartheta = \cos \delta / \cos \varphi.$$

Denn Meridian, Vertikalkreis und Stundenkreis des Sterns bilden dann ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $90 - \varphi$, der einen Kathete $90 - \delta$ und dem der letzteren gegenüberliegenden Winkel ϑ.

Der Polarstern hat in mittlerer geogr. Breite seine größte Ausschreitung ungefähr um $7^h\, 20^{min}$ bez. $19^h\, 30^{min}$ Sternzeit (Tab. 45).

II. Am Polarstern zu irgend einer bekannten Zeit. Aus dieser ergibt sich die Sternzeit z (Tab. 45), aus letzterer und der Rektaszension α des Polarsterns (Tab. 49) sein Stundenwinkel $t = z - \alpha$, und

endlich sein Azimut A gegen den Meridian aus 30 Gl. 5, oder, in mittleren Breiten auf einige Minuten genau, $\vartheta = (90 - \delta) \sin t / \cos \varphi$.

III. Aus korrespondierenden Höhen. Man stellt den Theodolit mit vertikaler Drehaxe (30a, 1) auf das Gestirn ein und liest den Horizontalkreis ab. Ohne an der Höheneinstellung etwas zu ändern, beobachtet man dann dasselbe Gestirn nach seiner Kulmination wieder und stellt das Fernrohr so, daß der Stern wieder durch das Fadenkreuz geht. Die Halbierungslinie der beiden Einstellungen liegt im Meridian des Ortes. Ein Höhenkreis ist unnötig.

Für die Genauigkeit ist günstig, daß die Ansteigung rasch geschieht, also daß das Gestirn dem Meridian nicht zu nahe steht.

Bei Benutzung der Sonne stellt man den Vertikalfaden Vormittags auf den einen, Nachmittags auf den andern seitlichen Rand ein, während der Horizontalfaden z. B. den oberen Rand berührt. Die Halbierungslinie der beiden Einstellungen geht aber im allgemeinen nicht genau durch den Meridian, sondern erfordert wegen der Deklinationsänderung der Sonne die folgende „Meridianverbesserung".

Es sei τ der halbe Zeitunterschied der beiden Beobachtungen von einander in Stunden, der Stundenwinkel der Sonne in Graden also $= 15\,\tau$. Es sei ferner s die Änderung der Sonnendeklination während eines Tages (Tab. 45 oder Bremiker, fünfstellige Logarithmen S. 149), also $s\tau/24$ diese Änderung in der halben Zwischenzeit. Dann beträgt die Meridian-Verbesserung, wenn wieder φ die Polhöhe ist,

$$\frac{1}{\cos\varphi} \cdot \frac{s\tau}{24} \cdot \frac{1}{\sin 15\tau}.$$

Für mittlere europäische Breiten und bei Beobachtungen, die zwischen 8 und 10^h Vm., bez. 2 und 4^h Nm. angestellt werden, genügt innerhalb einer Bogenminute Genauigkeit, die Korrektion $= 0{,}27 \cdot s$ zu setzen.

Selbstverständlich liegt die gefundene Mittellinie im Frühjahr westlich vom Meridian, im Herbst östlich. In den Tagen der Sonnenwenden verschwindet die Korrektion.

Beweis. Es sei die Deklination der Sonne zwischen beiden Durchgängen durch die Höhe h um $\Delta\delta$ gewachsen und dadurch das zweite Azimut um ΔA zu groß gefunden. Zwischen $\Delta\delta$ und ΔA wird durch Differentiation der Gleichung 1 (30) die Beziehung gefunden $\Delta\delta \cdot \cos\delta = \Delta A \cdot \cos\varphi \cos h \sin A$. Ersetzt man hierin $\cos h \sin A$ nach Gl. 3 durch $\cos\delta \sin t$, so kommt $\Delta\delta = \Delta A \cdot \cos\varphi \sin t$. Um $\frac{1}{2}\Delta A = \frac{1}{2}\Delta\delta/(\cos\varphi \sin t)$ wird man das arithmetische Mittel aus den beiden Beobachtungen korrigieren müssen. Man braucht nur noch $\frac{1}{2}\Delta\delta = \frac{1}{24}s\tau$ und $\sin t = \sin 15\tau$ zu setzen, um den obigen Ausdruck zu erhalten.

IV. Aus der Beobachtung der Sonne um Mittag. Kennt man die absolute Zeit (33), so liefert die Beobachtung des Sonnenmittelpunktes um 12^h „wahrer" Sonnenzeit (= mittlerer Ortszeit minus Zeitgleichung, Tab. 45) den Meridian. Man stellt dabei den Theodoliten auf den west-

lichen oder den östlichen Sonnenrand ein. Dann ist das beobachtete Azimut nach Osten oder nach Westen zu berichtigen um

$$\Delta = \varrho/\sin(\varphi - \delta).$$

Hier bedeutet ϱ den Halbmesser, δ die Deklination der Sonne und φ die Polhöhe; Tab. 47, 45 u. 44

Beweis. Meridian, Höhenkreis des Sonnenrandes und Halbmesser der Sonne zu ihrem Berührungspunkt mit dem Höhenkreis bilden ein rechtwinkliges Dreieck mit der Hypotenuse $\varphi - \delta$, worin die Kathete ϱ dem Winkel Δ gegenüberliegt. Es ist also $\sin\Delta : 1 = \sin\varrho : \sin(\varphi - \delta)$. Für $\sin\Delta$ und $\sin\varrho$ kann man Δ und ϱ setzen.

32. Polhöhe eines Ortes.

I. Die geographische Breite oder Polhöhe eines Ortes wird am leichtesten aus der Höhe eines Gestirns bei seiner Kulmination abgeleitet. Kennt man den Meridian bereits (31), so beobachtet man bei dem Durchgang durch diesen; andernfalls folgt man mit dem Fernrohr dem Objekt in der Nähe des Meridians und liest die höchste bez. niedrigste Einstellung des Fernrohrs ab.

Die beobachtete Höhe muß wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung um die aus Tab. 48 zu entnehmende „Refraktion" des Gestirns vermindert werden. Nennt man die so korrigierte Höhe h, ist ferner δ die Deklination des Gestirnes (Tab. 49), so wird die Polhöhe

$$\varphi = 90 - h + \delta \qquad \text{oder} \qquad \varphi = 90 + h - \delta,$$

je nachdem die Kulmination eine obere oder eine untere war.

Am Polarstern sind wegen seiner langsamen Bewegung die Messungen am bequemsten und genauesten.

Um die jeweilige Kulminationszeit eines Gestirns voraus zu kennen, zieht man die Sternzeit um Mittag von der Rektaszension des Sternes (Tab. 49) ab; dann erhält man die Tageszeit seiner oberen Kulmination, gerechnet vom Mittage ab in Sternstunden. 1 Sternstunde = 0,9973 mittl. Stunden.

Die Sternzeit um Mittag findet man aus Tab. 45. Wegen der periodischen, durch die Schaltjahre ausgeglichenen Verschiebung des Frühlingsanfangs, und ferner, weil der Sonnenmittag für westliche Orte später fällt als für östliche, kann die Tabelle nicht für alle Jahre und für alle Orte dieselbe sein. Wenn an einem Orte von der östlichen geogr. Länge l^0 von Greenwich die Sternzeit für die mittlere Ortszeit T gesucht wird, so hat man deswegen nicht mit T selbst, sondern mit einem, in Bruchteilen des Tages ausgedrückten, korrigierten Werte

$$T + k + \frac{1}{360}(15^0 - l)$$

als Argument in die Tabelle einzugehen. k hat für jedes Jahr einen andern Wert, den man in Tab. 46 findet. l endlich wird aus Tab. 44 oder aus einer Landkarte entnommen. — Ist T die mitteleuropäische „Einheitszeit", so ist nur $T + k$ zu nehmen.

II. Man beobachtet mit feststehendem Horizontalkreis des Theodoliten die beiden Höhen des Polarsterns, in denen dieser während eines Umlaufs den vertikalen Faden passiert, und nimmt das Mittel, welches, wegen der Refraktion korrigiert, die Polhöhe gibt.

III. Eine einzelne Beobachtung des Polarsterns zu genähert bekannter Zeit gibt die Polhöhe, da $(90 - \delta) \cos t$ (vgl. 31 II) meistens genügend genau als vertikale Erhebung des Sterns über den Pol angesehen werden kann.

Über die Deklination der Sonne vgl. S. 129 und Tab. 45. Selbstverständlich muß hier die beobachtete Einstellung, welche auf den oberen oder den unteren Rand stattfindet, um den Sonnenhalbmesser (Tab. 47) abgeändert werden.

33. Zeitbestimmung aus Sonnen- oder Sternhöhen.

I. Aus einer einzelnen Höhe.

Für einen Beobachtungsort von bekannter geographischer Länge und Breite bietet sich als einfaches Mittel zur Zeitbestimmung die Beobachtung des Standes der Sonne über dem Horizont. Sie wird gewöhnlich mit dem Sextant oder dem Theodolit ausgeführt. Am günstigsten für die Bestimmung sind die Zeiten, in denen die Ansteigung des Gestirns rasch und gleichmäßig geschieht, also wann der Stand ungefähr östlich oder westlich ist. Je näher dem Mittag, desto ungenauer ist die Bestimmung. Bedeutet

φ die geographische Breite oder Polhöhe des Ortes,

δ die Deklination der Sonne zur Beobachtungszeit (vgl. f. S.),

h die wirkliche Höhe des Sonnenmittelpunktes,

so wird der Stundenwinkel t der Sonne oder die „Sonnenzeit“ im Augenblicke der Beobachtung erhalten aus (Formel 2, S. 121)

$$\cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Der Stundenwinkel t wird von den trigonometrischen Tafeln zunächst in gewöhnlichem Bogenwert gegeben. Die Bogengrade werden durch 15 geteilt, um die Sonnenzeit in Stunden zu erhalten. t ist Vormittags negativ, Nachmittags positiv zu nehmen.

Korrektionen. 1) Von dem beobachteten Ort, der wegen der atmosphärischen Strahlenbrechung zu hoch gefunden wird, subtrahiert man nach Tab. 48 die Refraktion.

2) Man addiert oder subtrahiert den Halbmesser der Sonne (Tab. 47). Dieser eliminiert sich von selbst, wenn man, um unabhängig vom Horizontalpunkt des Höhenkreises zu sein, mit Durchschlagen (**30a**, Nr. 4) zweimal einstellt und die eine Einstellung auf den unteren, die andere auf den oberen Sonnenrand richtet. Um das Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten für die Zeit zu nehmen, in welcher der Sonnenmittelpunkt die mittlere Höhe passiert, müssen beide Beobachtungen rasch aufeinander folgen, da die Erhebung der Sonne nicht gleichförmig geschieht.

Geographische Breiten finden sich in Tab. 44, können auch aus einer guten Karte auf 0,01° entnommen werden. Ihre Bestimmung siehe in **32**.

Deklination der Sonne. Man interpoliert diese aus Tab. 45 für die Beobachtungszeit, welche man um $+k$ (Tab. 46) bez. um $+k+\frac{1}{360}(15-l)$ korrigiert hat. Vgl. hierüber S. 127. Ein Fehler von 3 min in der Zeit gibt höchstens einen Fehler von δ um 0,001°, so daß die Turmuhrzeit genügt.

Mittlere Zeit. Zu der wahren Sonnenzeit t fügt man zur Reduktion auf mittlere Ortszeit die aus Tab. 45 zu entnehmende „Zeitgleichung" hinzu; auf mitteleuropäische Einheitszeit außerdem $+(15-l)\times 4$ min.

Andere Gestirne. Anstatt der Sonne mag irgend ein anderes Gestirn von bekannter Deklination und Rektaszension (Tab. 49) gewählt werden, welches weder dem Horizonte noch dem Pole zu nahe steht. Dann bedeutet das aus der Formel im Eingang berechnete t den Stundenwinkel des Gestirns. Fügt man zu t die Rektaszension des Sternes, so erhält man die für den Augenblick der Beobachtung geltende Sternzeit, zu der dann die mittlere Zeit aus Tab. 45 oder genauer nach den astronomischen Jahrbüchern gefunden wird.

Die hier gegebenen Vorschriften und Tabellen vernachlässigen Korrektionen, welche unter 0,01° liegen.

II. Aus korrespondierenden Höhen.

Diese Zeitbestimmung bedarf außer einer gleichmäßig gehenden Uhr nur eines in der Höhe klemmbaren Fernrohres mit vertikaler Drehaxe (**30a**, 1), ohne jede Kreisteilung. Die

atmosphärische Strahlenbrechung kommt für gewöhnliche Zwecke nicht in Betracht. Bei den Beobachtungen der Sonne stellt man jedesmal auf denselben unteren oder oberen Rand ein, ohne auf den Mittelpunkt umrechnen zu müssen.

Im Interesse scharfer Zeitbestimmung beobachtet man die Gestirne möglichst im Osten oder Westen.

Ein Gestirn passiere vor und nach seiner Kulmination den Horizontalfaden eines Fernrohres, welches auf konstante Höhe eingestellt ist. Das arithmetische Mittel der beiden Uhrzeiten gibt für ein Gestirn ohne Eigenbewegung die Uhrzeit, für welche es kulminiert. Die absolute Zeit der Kulmination findet sich aus den Tabellen.

Fixsterne. Mitten zwischen den beiden Augenblicken, in denen der Stern vor und nach seiner Kulmination dieselbe Höhe passiert, liegt sein Durchgang durch den Meridian. Für diesen Augenblick gibt also die Rektaszension des Sternes (Tab. 49) die Sternzeit, aus welcher man die mittlere Zeit nach Tab. 45 oder einem astronomischen Jahrbuche entnimmt.

Sonne. Die Beobachtung liefert den Zeitpunkt des Sonnendurchgangs durch den Meridian, d. h. den scheinbaren oder Sonnenmittag; die mittlere Ortszeit hat dann den durch die Zeitgleichung (Tab. 45) gegebenen Wert. In den Tagen der Sonnenwenden erhält man aus den Zeiten zweier Durchgänge durch die gleiche Höhe die Zeit des Durchgangs durch den Meridian genau als das arithmetische Mittel. Im allgemeinen aber kommt noch wegen der täglichen Deklinationsänderung der Sonne eine Korrektion, die „Mittagsverbesserung", hinzu, da die Sonne ihren höchsten Stand in der ersten Jahreshälfte etwas hinter, in der zweiten Hälfte etwas vor dem Meridian erreicht.

Es sei φ die Polhöhe des Ortes, δ die Deklination der Sonne und ε ihre tägliche Änderung in Bogengraden (Tab. 45 oder Bremiker, 5stell. Logarithmen). Endlich sei τ der halbe Zeitunterschied zwischen den beiden Beobachtungen in Stunden (also $\pm 15\tau$ der Stundenwinkel der Sonne in Bogengraden). Die Mittagsverbesserung beträgt dann in Zeitsekunden

$$10\varepsilon\tau \cdot (\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}\delta \cos 15\tau)/\sin 15\tau.$$

Beweis. Es bedeute (Fig. zu 30) t den Stundenwinkel der Sonne bei der Beobachtung. Ohne Deklinationsänderung würden die absoluten

Werte von t Vor- und Nachmittags gleich sein. Ist vom ersten bis zum zweiten Durchgang durch die Höhe h die Deklination um $\varDelta\delta$ gewachsen, so wird t im zweiten Augenblick um eine Größe $\varDelta t$ zu groß gefunden, für welche man durch Differentiation von Gleichung 2 (30) die Beziehung erhält

$$0 = \varDelta\delta \cdot (\sin\varphi\cos\delta - \cos\varphi\sin\delta\cos t) - \varDelta t \cdot \cos\varphi\cos\delta\sin t.$$

Also ist $\varDelta t = \varDelta\delta\,(\mathrm{tg}\,\varphi - \mathrm{tg}\,\delta\cos t)/\sin t$. An dem arithmetischen Mittel aus beiden beobachteten Durchgangszeiten ist offenbar, um es auf den Durchgang durch den Meridian zu reduzieren, die Korrektion $\frac{1}{2}\varDelta t$ anzubringen. Beachtet man noch, daß $t = 15\tau$ und daß $\frac{1}{2}\varDelta\delta$ in Bogengraden $= \varepsilon\tau/24$, also in Zeitsekunden $= 86400/360 \cdot \varepsilon\tau/24 = 10\,\varepsilon\tau$, so kommt der obige Ausdruck für diese Korrektion.

34. Bestimmung des Ganges einer Uhr oder Festhaltung einer absoluten Zeit.

Zwei absolute Zeitbestimmungen (33) liefern natürlich den Gang der zur Beobachtung dienenden Uhr. Einfacher und häufig genauer sind aber die Beobachtungen eines Gestirns in einem bestimmten Azimut.

I. Beobachtung an Fixsternen. Zu diesem Zwecke kann man jedes mit Fadenkreuz versehene Fernrohr gebrauchen, welches eine horizontale Drehungsaxe besitzt. Das bestimmte Azimut wird gegeben, wenn man von einem bestimmten Standorte aus eine entfernte irdische Marke zum Einstellen benutzt. Am günstigsten sind Beobachtungen nahe am Meridian.

Noch einfacher und leicht auf 1 sek genau ist das mit bloßem Auge beobachtete Verschwinden oder Auftauchen eines Fixsterns hinter einem entfernten irdischen Objekte. Ist letzteres mindestens 100 m entfernt, so genügt als fester Punkt für das Auge der Rand eines Fensterkreuzes oder ähnliches. Geheizte Schornsteine u. dgl. sind als bedeckende Objekte ungeeignet.

Selbstverständlich wählt man am besten Sterne, die dem Äquator nahe stehen.

Zwischen zwei Durchgängen eines Fixsterns durch denselben Punkt liegt ein Sterntag, welcher um 235,9 sek = 3,932 min = 0,06553 Stund. = 0,002730 Tag kürzer ist als der mittlere Tag.

II. Beobachtungen an der Sonne. Zwei aufeinander folgende Sonnendurchgänge durch den Meridian liefern, unter Berücksichtigung der täglichen Änderung der Zeitgleichung

(Tab. 45 und Bremiker, fünfstellige Logarithmen S. 149), die Länge des mittleren Tages. Es ist hierzu nicht erforderlich, daß der Meridian ganz genau sei. Ein konstanter Fehler von 1° macht den beobachteten Tag höchstens etwa um 2 sek unsicher. Sowohl um die Tag- und Nachtgleichen wie um die Sonnenwenden ist diese Unsicherheit am kleinsten.

Zur Beobachtung reicht ein Fernrohr mit horizontaler Drehaxe aus, an dessen Fadenkreuz man den Antritt und den Austritt der Sonne beobachtet. Für mäßige Ansprüche genügt auch der Schatten eines Senkels oder das von einer engen Öffnung entworfene Sonnenbildchen. Man nimmt den Zeitpunkt, in welchem dieser Schatten oder das Sonnenbild von einer auf dem Fußboden oder auf einer gegenüberstehenden Wand angebrachten Marke halbiert wird. Auch eine gute Sonnenuhr läßt den Gang der Uhr in größeren Zeiträumen einigermaßen genau bestimmen.

Eine einmal gewonnene absolute Zeit läßt sich durch diese einfachen Mittel festhalten.

35. Gravitationskonstante. Länge des Sekundenpendels.

Die Konstante g der Schwerbeschleunigung, d. h. die Zunahme der Geschwindigkeit eines frei fallenden Körpers in 1 sek, beträgt in Meereshöhe unter 45° Breite $g = 980{,}6$ und für die geogr. Breite φ und die Höhe H Meter üb. d. Meere

$$g = 980{,}6\,(1 - 0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi - 0{,}0000002 \cdot H)\,\mathrm{cm/sek}^2.$$

Für $H = 0$ siehe Tab. 43. Die lokalen Abweichungen erreichen sehr selten 0,2. — Ebensoviel beträgt der Einfluß der Höhe auf 1000 m Erhebung. 0,0000002 ist ein Mittelwert, der natürlich durch die Bodenbeschaffenheit beeinflußt wird.

Bei sehr kleiner Schwingungsweite ist die Schwingungsdauer eines punktförmigen Pendels von der Länge l gleich $\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$; die eines beliebig gestalteten Pendels gleich $\pi\sqrt{\frac{K}{D}}$ (Anh. 12), wo K das Trägheitsmoment und D die „Direktionskraft" bedeutet, d. h. $D = a \cdot gM$, wenn a den Abstand des Schwerpunkts von der Drehaxe und M die schwingende Masse vorstellt.

Der Punkt eines Pendels, der, wenn er allein vorhanden wäre, die gleiche Schwingungsdauer zeigen würde, heißt der **Schwingungspunkt**. Es gilt der Satz, daß, wenn man ein Pendel umkehrt und im Schwingungspunkt aufhängt, dieselbe Schwingungsdauer entsteht.

Bestimmung von g mit dem Pendel. Es wird im allgemeinen nicht leicht sein, g genauer zu bestimmen, als es aus der Formel berechnet wird. Als Übungsaufgabe soll die Messung mit einem Fadenpendel beschrieben werden. Eine gut abgedrehte, möglichst schwere Kugel von etwa 2 cm Durchmesser hänge an einem leichten und weichen Faden über eine Schneide bereits eine so lange Zeit, daß eine konstante Pendellänge entstanden ist. Diese Länge l sei gezählt von der Schneide bis zum Mittelpunkt der Kugel; sie wird also mit einem spiegelnden Maßstab (**21**, 1) oder mit dem Kathetometer (**22**) gemessen als das arithmetische Mittel aus den Abständen bis zum obersten und dem untersten Punkte der Kugel.

Schwingungsdauer τ. Finden in t sek k Schwingungen statt, so ist $\tau = t/k$. Wenn die Länge zwischen 99 und 100 cm gewählt wird, so kommt die Dauer der Sekunde nahe, und man beobachtet nach der Methode der Koinzidenzen. Liegt zwischen zwei aufeinander folgenden Koinzidenzen der Pendelschwingung mit einer vollen Sekunde eine Zeit $= n$ sek, so ist

$$\tau = \frac{n}{n-1} \quad \text{oder} \quad \tau = \frac{n}{n+1},$$

je nachdem das Pendel hinter der Uhr zurückbleibt oder ihr vorauseilt. Die Koinzidenz wird mit dem Auge beurteilt oder nach dem Gehör auf die Umkehr des Pendels oder auf seinen Durchgang durch die Mitte bezogen. Eine längere Beobachtungsreihe kann man, wenn die Amplitude klein oder wenig veränderlich war, nach **3** II berechnen.

Korrektionen der beobachteten Schwingungsdauer τ. 1. Amplitude. Dieselbe sei $= \alpha$. Für α genügt meistens das Mittel aus der Schwingungsweite zu Anfang und zum Schluß. Die beobachtete Schwingungsdauer ist gemäß der Formel in **28** zu dividieren durch $1 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{4}\alpha$. Da die Korrektion klein ist, so kann man (Formel 4, S. 9) statt dessen von τ abziehen $\tau \cdot \frac{1}{4}\sin^2\frac{1}{4}\alpha$. Siehe Tab. 27.

2. Trägheitsmoment der Kugel. Eine punktförmige Masse würde rascher schwingen als die Kugel vom Radius r. Korrektion $= -\tau \cdot \frac{1}{5} r^2/l^2$.

3. Faden. Der mitschwingende Faden hat die Schwingungs-

dauer der Kugel allein vermindert. Korrektion $= + \tau \cdot \frac{1}{12}\mu/m$, wenn μ und m die Masse des Fadens und der Kugel.

Beweis Ein Pendel mit punktförmiger Masse von der Länge l würde haben $\tau_0 = \pi\sqrt{l/g}$; unser Pendel, wenn K sein Trägheitsmoment und D die Direktionskraft ist (vgl. S. 117 „Kugel“ und „Hilfssatz“), hat:

$$\tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}} = \pi\sqrt{\frac{l^2 m + \frac{2}{5}r^2 m + \frac{1}{3}l^2\mu}{g(lm + \frac{1}{2}l\mu)}} = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{2}{5}r^2/l^2 + \frac{1}{3}\mu/m}{1 + \frac{1}{2}\mu/m}}.$$

Die gesuchte Schwingungsdauer eines punktförmigen Pendels mit einem Aufhängefaden ohne Masse oder $\pi\sqrt{l/g}$ ist demnach gleich τ multipliziert mit $\sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2}\mu/m}{1 + \frac{2}{5}r^2/l^2 + \frac{1}{3}\mu/m}}$, wofür nach Formel 6, S. 9 geschrieben werden kann $\sqrt{(1 - \frac{2}{5}r^2/l^2 + \frac{1}{6}\mu/m)}$. Dieser Ausdruck ist aber nach Formel 8 gleich $1 - \frac{1}{5}r^2/l^2 + \frac{1}{12}\mu/m$, q. e. d.

4. Auftrieb in der Luft. Die Schwere der Kugel wäre im leeren Raum im Verhältnis $1 + \lambda/s$ größer gewesen, wenn λ und s die Dichtigkeit der Luft (18) und der Kugel (Tab. 2). Korrektion der Schwingungsdauer $= -\tau\cdot\frac{1}{2}\lambda/s$.

5. Inhomogenität der Kugel. Man hängt die Kugel, oben und unten vertauscht, um, beobachtet wieder und nimmt das Mittel.

Nicht berücksichtigt sind Fadensteifheit und mitschwingende Luftmasse.

Die so korrigierte Schwingungsdauer heiße τ_0, dann ist $g = \pi^2 l/\tau_0^2$. Die Länge l_s des Sekundenpendels würde sein $l_s = l/\tau_0^2$.

Reversionspendel. Dasselbe hat zwei parallele Axen. Werden diese durch Verstellung oder Änderung der Massenverteilung so reguliert, daß für beide die gleiche Schw.-Dauer τ gilt, so ist (S. 132 unten), wenn l ihr Abstand, wieder $g = \pi^2 l/\tau^2$.

Lokale Variationen von g pflegen mit dem Sterneck'schen Pendel (ZS f. Instr. 1888, 157), zeitliche Änderungen der Schwererichtung mit dem Zöllner'schen Horizontalpendel (Pogg. Ann. 150, 134. 1873) beobachtet zu werden. Über letzteres besonders auch Rebeur-Paschwitz, z. B. Astr. Nachr. 1892, 193

Atwood'scher Fallapparat.

Um aus Beobachtungen an diesem bekannten Instrument g abzuleiten, muß die als Übergewicht treibende Masse m im Verhältnis zum äquilibrierten Teil M der Gesamtmasse bekannt sein. Wenn die Beschleunigung b beobachtet wird, so ist $g \cdot m = b\cdot(M + m)$, also $g = b(M + m)/m$.

In M ist die der Trägheit des Rades äquivalente Masse x enthalten, die auf zweierlei Weise in Rechnung gesetzt werden kann.

1. Man eliminiert x durch Beobachtungen an zwei Paaren von Massen am Faden; diese zusammen sollen je M_1 bez. M_2 heißen. Dann folgt also aus den zugehörigen beiden Beschleunigungen b_1 bez. b_2 $gm = b_1(M_1 + m + x)$ und $gm = b_2(M_2 + m + x)$, woraus man erhält

$$m + x = \frac{b_1 M_1 - b_2 M_2}{b_2 - b_1} \quad \text{und} \quad g = \frac{b_1 b_2}{b_2 - b_1} \frac{M_1 - M_2}{m}.$$

2. Man bestimmt das Trägheitsmoment K der Rolle durch Beobachtung (29 IIb). Dann ist einzusetzen $x = K/r^2$, wenn r den Halbmesser der Rolle bedeutet. Denn die Winkelbeschleunigung durch das Drehmoment $p \cdot r$ einer Kraft p am Faden beträgt (Anh. 12) $p \cdot r/K$, die Linearbeschleunigung des Fadens hierdurch also $p \cdot r^2/K$. Demnach vertritt K/r^2 die Trägheit einer äquivalenten, in der Peripherie konzentrierten Masse.

Absolute Gravitationskonstante G.

G ist die zwischen zwei Masseneinheiten im Abstande Eins bestehende Anziehung und wird aus der Kraft $k = G \frac{mm'}{r^2}$ abgeleitet, die zwei kleine oder kugelförmige Massen m, m' aus dem Abstande r ihrer Mittelpunkte aufeinander ausüben. Die Messung geschieht gewöhnlich

A) mit der Coulomb'schen Drehwage. Das Drehmoment, welches eine oder mehrere passend angebrachte feste Massen auf eine oder zwei an dem Wagebalken befestigte Massen ausüben, wird mit der Direktionskraft der Aufhängung verglichen, meist durch die hervorgebrachte Ablenkung (Cavendish 1798, Reich, Baily, Cornu, Boys, Braun, Poynting). Auch die durch die Annäherung der Massen bewirkte Änderung der Schwingungsdauer kann benutzt werden.

B) mit der Wage. Man bestimmt die Änderung des Gewichts, welche eine angehängte Masse durch eine feste Masse erfährt, die man ihr von unten nähert (Jolly, Poynting), oder indem man die bewegliche Masse abwechselnd ober- und unterhalb einer festen wägt (Richarz u. Krigar-Menzel).

Als Resultat ist anzunehmen, daß zwei Grammpunkte aus 1 cm Abstand gegenseitig die anziehende Kraft $= 6{,}68 \cdot 10^{-8}$ Dynen ausüben, d. h. $G = 6{,}68 \cdot 10^{-8}\,\text{cm}^3\,\text{gr}^{-1}\,\text{sek}^{-2}$.

Druck.

36. Druckmessung. Manometer.

Druck nennt man die Kraft auf die Flächeneinheit. Für Messungen kommt hauptsächlich der Druck von Flüssigkeiten oder Gasen in Betracht. Gewöhnlich wird der Druck durch Flüssigkeitshöhen gemessen; diese bieten eine im ganzen Meßbereich konstante Empfindlichkeit.

I. Flüssigkeitsmanometer.

Eine Säule von der Höhe h cm und dem spez. Gewicht s stellt den Druck hs gr-Gew./cm² oder in absolutem Maße $= ghs$ Dyne/cm² dar; g ist die Schwerbeschleunigung in cm/sek², für 45° Breite $= 980{,}6$ (vgl. S. 132 u. Tab. 43).

Als Flüssigkeiten werden Quecksilber und Wasser, auch wohl Glyzerin ($s = 1{,}26$), am meisten gebraucht. Der Druck von 760 mm Quecksilber von 0°, streng genommen unter der Schwere in 45° geogr. Breite, heißt eine Atmosphäre. Diese entspricht also einem Druck von $76 \cdot 13{,}596 = 1033$ gr-Gew./cm² oder $980{,}6 \cdot 76 \cdot 13{,}596 = 1013200$ Dyne/cm²; für 50° Breite gelten die Zahlen 1034 und 1013800.

Man erhält aus einer beobachteten Druckhöhe h einer Flüssigkeit vom spez. Gewicht s die Höhe h' einer anderen Flüssigkeit s', welche denselben Druck gibt, als $h' = h \cdot s/s'$. Eine bei der Temperatur t gemessene Quecksilberdruckhöhe h wird also auf t' umgerechnet durch Multiplikation mit dem Faktor $1 + 0{,}000182\,(t' - t)$, der hier gleich s/s' ist; vgl. S. 104.

Ablesung. Man projiziert auf einen hintergestellten Maßstab, mit dem Auge unter Vermeidung der Parallaxe durch einen Spiegel, oder mit einem parallel verschiebbaren Fernrohr; oder man mißt mit dem Kathetometer (22). Abgelesen wird immer die horizontale Tangente des Meniskus, also an Quecksilberflächen der obere, an den übrigen Flüssigkeiten der untere Rand. Die Kuppen sind oft schwierig zu erkennen; kann man dicht über, bez. unter der Oberfläche eine Spitze anbringen, so stellt man auf die Mitte zwischen ihr und ihrem Spiegelbild ein.

Bei dem Ablesen auf einem hintergestellten Maßstab kann an einer breiten, also in der Mitte ebenen Fläche ebenso

die Mitte zwischen einem Teilstrich und seinem Spiegelbild zur Einstellung und zur Schätzung oder Messung des Abstandes der Kuppe vom nächsten Teilstrich benutzt werden.

Vgl. Thiesen, ZS f. Instr. 1886, 89.

In einem offenen Schenkel ist, wenn im geschlossenen stets eine bestimmte Höhe innegehalten wird (vgl. Luftthermometer), oft ein verschiebbarer Maßstab mit Spitze zu gebrauchen, die zur Berührung eingestellt wird. Der Nullpunkt der Teilung findet sich aus der Einstellung bei beiderseitig gleichem Druck. Schema s. Fig.

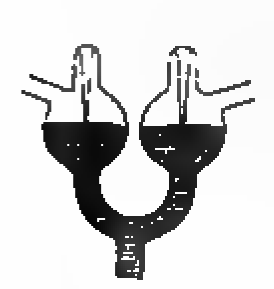
Kapillar-Korrektion. Die Oberfläche hat gewöhnlich nicht eine so große Breite, daß ihr höchster (bez. tiefster) Teil eben ist; dann kommt zu dem Gewichtsdruck der Kapillardruck der Oberflächenkrümmung. Die abgelesene Höhe ist zu niedrig (bez. zu hoch). Die Korrektion wächst mit abnehmender Rohrweite. In kommunizierenden gleichen Röhren hebt sie sich bei beiderseitig gleicher Benetzung und Kapillarkonstante natürlich heraus. — Die „Kapillardepression" des Quecksilbers läßt sich wegen der Veränderlichkeit des Randwinkels nicht als bloße Funktion der Rohrweite darstellen. Ist aber außer der Rohrweite die Höhe des Meniskus bekannt, so kann man die Depression, freilich mit der nicht unbeträchtlichen Unsicherheit, die aus Veränderungen der Kapillarkonstante selbst erwächst, aus Tab. 18a entnehmen. Bei einer Rohrweite von 15 mm beträgt sie höchstens 0,1 mm. Vgl. auch 37, 1 bis 5.

Formeln für die „Kapillarerhebung" in benetzten Röhren s. 58 I.

Kleine Druckunterschiede (Thiesen u. Scheel). Die beiden Drucke werden auf verschiedene Oberflächenteile einer Flüssigkeit in einem geschlossenen, oben durch eine Scheidewand geteilten Gefäß übertragen, welches vorn und hinten durch ebene Glasplatten geschlossen ist. Die Hinterwand ist horizontal durchlaufend geteilt. Die Oberflächen seien so groß, daß ihre Mitten merklich eben sind. Man bestimmt mittels Mikroskops die beiden Höhen aus dem Abstande direkt gesehener Teilstriche von ihren Spiegelbildern. Unsymmetrien werden durch Vertauschen der Drucke eliminiert.

Thiesen u. Scheel, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III 12 u. 76. 1900; ZS f. Instr. 1901, 177.

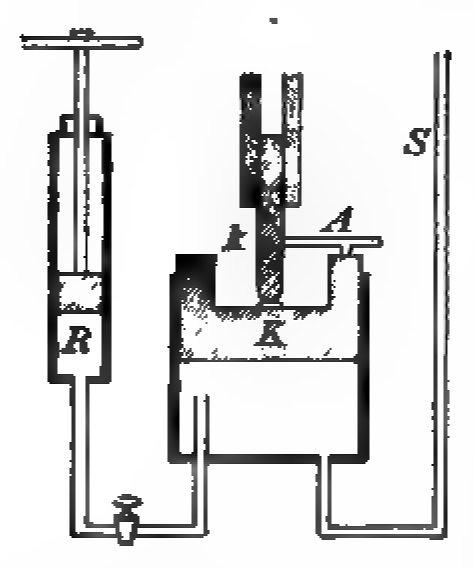
Ein anderes sehr empfindliches Verfahren (Rayleigh) benutzt zwei Spitzen in kommunizierenden, etwa 25 mm weiten Druckkammern; man stellt durch eine mit Spiegel und vertikaler Skale (25) gemessene Neigung des Systems immer auf die Berührung beider Quecksilberflächen mit den Spitzen ein. Als bewegliche Verbindungen dienen Kundt'sche Glasfedern (8, 24). Zum Zwecke der Regulierung der mittleren Niveauhöhe steht das Quecksilber (wie bei der Quecksilberluftpumpe oder dem Luftthermometer; 8, 24 u. 42) durch einen Schlauch in Verbindung mit einer freien Oberfläche, die man heben oder senken kann; die Feineinstellung geschieht mittels einer Klemmschraube am Schlauch.



Lord Rayleigh, Proc. R. S. 68, 92. 1901; Phil. Trans. (A) 196, 208. 1901; ZS f. phys. Ch. 37, 716. 1901. — Vgl. auch VI.

Große Drucke. Quecksilbermanometer gewöhnlicher Form für eine größere Anzahl von Atmosphären werden an Hauswänden usw. befestigt. Tragbare Instrumente müssen die gebrochene Form haben (Thiesen), in welcher die Drucke mehrerer Säulen in U förmigen Röhren durch Wasser usw. aufeinander übertragen und summiert werden.

Vgl. Thiesen, ZS f. Instr. 1881, 114; bis 100 Atm. Kamerlingh Onnes, Commun. Phys. Lab. Leiden Nr. 44. 1898. — Das 300 m hohe offene Manometer am Eiffelturm besteht aus einem 4½ mm weiten Stahlrohre. Zum Ablesen dienen seitlich angesetzte je 3 m lange Glasröhren, die, außer beim Ablesen, durch Doppelhähne abgesperrt sind. Vgl. Cailletet, Comptes rendus 112, 764. 1891.



Druckreduktion durch Kolbenübertragung. Um Drucke von Hunderten oder Tausenden von Atmosphären bei der Übertragung auf Quecksilber zu verkleinern, benutzt man das umgekehrte Prinzip der hydraulischen Presse. Der große Druck wirkt auf den Kolben k vom kleinen Querschnitt q, welcher die Kraft auf den Kolben K vom großen Querschnitt Q überträgt und unter K den Druck im Verhältnis q/Q reduziert auftreten läßt. Die übertragenden Flüssigkeiten sind Rizinusöl oder bei sehr großen Drucken Melasse.

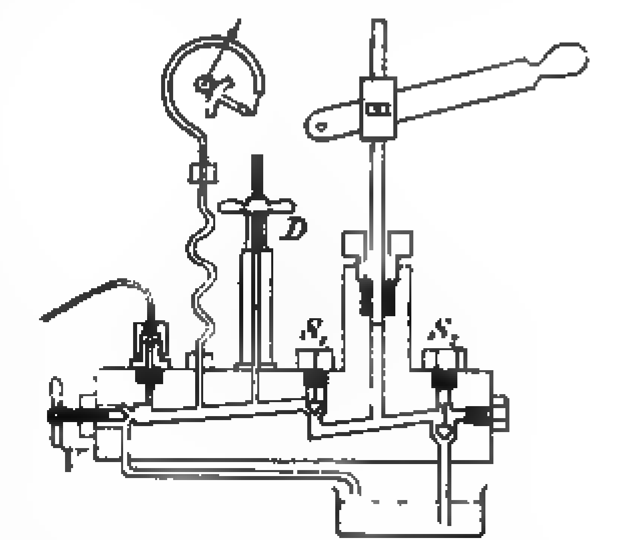
Die Reibung wird durch drehende Bewegungen vermindert, welche man während der Messung dem Kolben durch einen eingeschraubten Arm *A* mitteilt. Der weite Cylinder enthält unten Quecksilber, welches mit dem Steigrohr *S* kommuniziert. Die mit Rizinusöl gefüllte Regulierpumpe *R* läßt den Druck, trotz Austreten von etwas Flüssigkeit an den Kolbenwänden, konstant erhalten.

Näheres bei Amagat, Ann. de chim. et de phys. (6) 29, 68. 1893.

Glasröhren sind für inneren einseitigen Druck über höchstens 400 Atm. nicht brauchbar zu machen und müssen höher hinauf in Metallcylindern beiderseitig gedrückt werden. Volumänderungen von Gasen oder Flüssigkeiten in solchen Röhren (Piezometern) können dann, ohne daß die Röhren sichtbar sind, vermöge elektrischer Kontakte beobachtet werden, die in die Röhre eingeschmolzen und durch dünnen Platindraht hintereinander verbunden sind. Jedes Herantreten des Sperrquecksilbers an einen folgenden Kontakt schaltet Widerstand aus und ist dadurch (90 bis 93) zu erkennen (Amagat l. c.).

Bei Messungen mit hohen Drucken ist die Kompressionswärme zu beachten und also mit der Beobachtung bis zum wiedererfolgten Temperaturausgleich zu warten.

Cailletet'sche Pumpe, Ducretet & Lejeune, Paris. Bis 300 Atm. kann der Pumpkolben gebraucht werden, dann die (in Wirklichkeit seitlich angebrachte) Druckschraube *D*. Alle Dichtungsschrauben sind sehr fest anzuziehen. Sorgfältig sauber müssen die kleinen Hartkautschukventile gehalten werden. — Ventilschraube *V* dient zum Abspannen des Druckes. Als Füllung kann destilliertes Wasser gebraucht werden; bei längerem Nichtgebrauch ist die Pumpe durch Lüften der Schraube S_1 zu entleeren und bis zum Austrocknen offen zu lassen.



Die Kupferkapillare links gibt den Druck weiter. — Gase, die ihm unterworfen werden sollen, werden gewöhnlich in dickwandigen Glasröhren über Quecksilber beobachtet, welches mit Wasser überdeckt und von diesem aus durch die Kapillare mit der Pumpe verbunden ist. Eingekittet wird mit Marineleim. Oberhalb 300 Atm. dienen andere Vorrichtungen.

Über die Anordnung von Versuchen mit hohem Druck s. u. a.:

Elektr. Leitvermögen: Fink, Wied. Ann. 26, 481. 1885; Lussana, Cim (4) 12, 237. 1900; Zusammendrückbarkeit: Röntgen u. Schneider, Wied. Ann. 33, 644. 1888; Lichtbrechung: Röntgen u. Zehnder, ib. 44, 24. 1891; Dielektr.-Konstanten: Röntgen, ib. 52, 593. 1894. — Auch das Preisverzeichnis von Ducretet & L. — Eine Übersicht über die Meßmethoden: Wiebe, ZS f. komprim. u. flüss. Gase, 1, 8ff. 1897. — Firmen: z. B. Dreyer, Rosenkranz & Droop, Hannover; Schäffer & Budenberg, Magdeburg.

II. Wagemanometer.

Der Druck auf den Kolben vom Querschnitt q wird auf einen äquilibrierten Wagebalken mit Wagschale übertragen



und durch Gewichte p gemessen. In der Figur mit Hebelübertragung ist der Druck $= \frac{p}{q} \cdot \frac{L}{l}$.

Eine Manschette aus Goldschlägerhaut dichtet den lose eingeschliffenen Kolben; drehende Bewegung vermindert die Reibung. Man mittelt die Ablesungen bei steigendem und fallendem Druck.

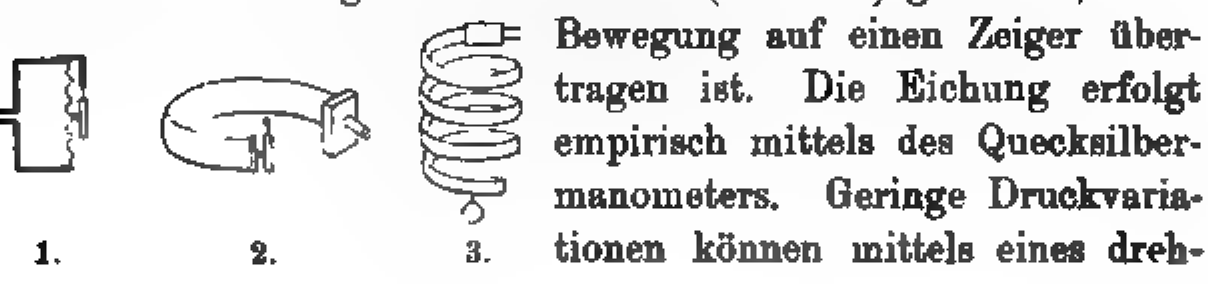
III. Gasmanometer.

Der Druck wird auf eine abgesperrte Gasmenge in einem kalibrierten Rohr durch eine Flüssigkeit übertragen, welche das Gas nicht absorbiert. Der Druck ist dem Volumen umgekehrt proportional. Veränderliche Druckhöhen der Sperrflüssigkeit oder Temperaturwechsel lassen sich nötigenfalls leicht in Rechnung setzen. Die Empfindlichkeit der Messung nimmt dem Drucke proportional ab. Für große Drucke müssen die Abweichungen des Gases vom Mariotte'schen Gesetz bekannt sein.

Präzisionsmanometer bis 64 Atm. bei Kamerlingh Onnes, Commun. Phys. Lab. Leiden Nr. 50. 1899.

IV. Metallmanometer.

Der Druck wird durch die Durchbiegung einer Metallmembran oder die Krümmung einer Metallröhre (Bourdon) gemessen, deren



Bewegung auf einen Zeiger übertragen ist. Die Eichung erfolgt empirisch mittels des Quecksilbermanometers. Geringe Druckvariationen können mittels eines dreh-

baren Spiegelchens, welches durch Kontakt mit dem Manometer bewegt wird (1 u. 2) oder sich mit dem Ende einer mehrfach gewundenen Bourdon'schen Röhre dreht (3), mit Fernrohr und Skale beobachtet werden. Die zu messende Druckänderung kann von innen oder von außen wirken.

1. Röntgen, Pogg. Ann. 148, 580—624; 2. F. K., ib. 150, 423. 1873; 3. Barus, ZS f. Instr. 1896, 253. — Anwendung auf kleine Druckunterschiede bei Dieterici, Wied. Ann. 50, 55. 1893; 62, 624. 1897.

V. Elektrische Widerstandsmanometer.

Nur für sehr hohe Drucke. Die kleine Änderung des Widerstandes von Manganindrähten durch den Druck (etwa + 0,000002 auf 1 Atm.) verläuft bis 3000 Atm. nahe linear. Bei Messung des Widerstandes in der Wheatstone'schen Brücke (**93** I) wird von 500 Atm. aufwärts eine Genauigkeit auf 1/1000 als erreichbar angegeben, porenfreies Metall und Temperaturgleichheit vorausgesetzt.

Lisell, Öfv. K. Vetensk. Akad. 55, 697. 1898; Beibl. 1899, 393; ausführl. Dissert. Upsala 1902.

VI. Drucklibelle für sehr kleine Drucke (Toepler).

Ein unter sehr stumpfem Winkel $180^0 - 2\alpha$ geknicktes Glasrohr von etwa 3 mm Weite enthält eine etwa $\frac{1}{4}$ m lange Säule Petroleum oder Xylol vom spez. Gewicht s. Ein einseitiger Druck, welcher eine Verschiebung um l cm bewirkt, ist gleich $(2s \cdot \sin\alpha) l$ gr-Gew./cm². Den konstanten Faktor $2s \cdot \sin\alpha$ kann man beliebig klein machen.

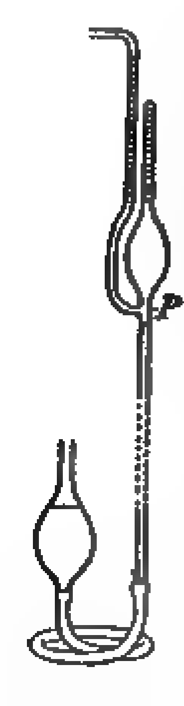
Oder, wenn der Abstand der beiden Kuppen $= a$ ist, und wenn ein Druck d kompensiert wird durch eine Neigung des Rohres um den Winkel φ, so ist $d = sa \cdot \sin\varphi$. Der Neigungswinkel wird durch die Drehung der Fußschraube an der Libelle hervorgebracht und gemessen.

Mit mikroskopischer Ablesung ist eine Druckänderung von 10^{-8} Atm. noch bemerkbar und selbst die Temperatur drückender Gassäulen scharf zu messen.

Toepler, Wied. Ann. 56, 611. 1895.

VII. Messung sehr kleiner Gasdrucke (Arago).

Man verkleinert das Volumen in gemessenem Verhältnis; der Druck steigt in gleichem Verhältnis. Die Ausführung,



z. B. an einer Quecksilberluftpumpe, zeigt die Figur (häufig nach Mac Leod benannt). Das an die obere Birne angesetzte Rohr ist in mm geteilt und außerdem relativ zu dem bis an den Punkt P gerechneten Volumen der Birne kalibriert. Hebung der unteren Birne mit Quecksilber schließt durch dessen Ansteigen die Luft der oberen ab und drängt sie in das Meßrohr. Der Höhenunterschied gegen das ebenfalls geteilte Verbindungsrohr gibt den Drucküberschuß des komprimierten Gases gegen das ursprüngliche, der durch das jeweilige Volumverhältnis geteilt den ursprünglichen Druck darstellt. 1000malige Vergrößerung läßt diesen auf wenige Zehntausendtel [illegible]

An modernen Quecksilberpumpen kann man mittels des gebogenen Verbindungsrohres am Rezipienten (Fig. zu 8, 24) oft eine ähnliche Anordnung improvisieren.

Vgl. auch Kleine Drucke, S. 188, das Verfahren von Rayleigh.

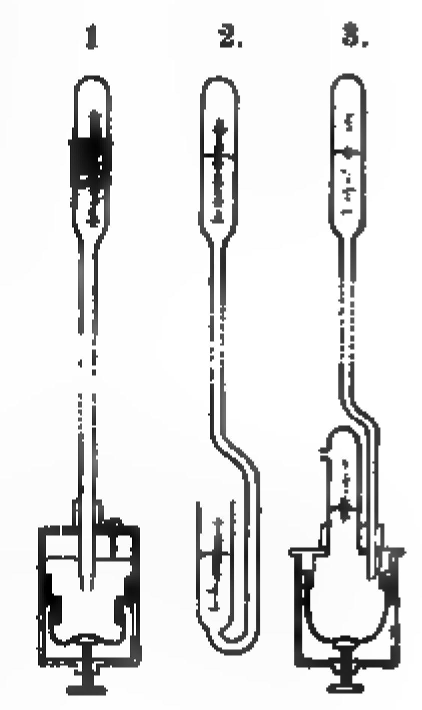
37. Atmosphärischer Druck (Barometerstand).

Unter Barometerstand versteht man die Höhe einer Quecksilbersäule von 0°, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält. Wegen der Veränderlichkeit der Schwere, die etwa ½% betragen kann, fügt man für genaue Zwecke hinzu, daß die auf das Quecksilber wirkende Schwere diejenige unter 45° Breite am Meeresspiegel sein soll. Vgl. 5.

Luft oder Wasserdampf über dem Quecksilber erniedrigen durch ihren eigenen Druck den Stand. Die Abwesenheit von Luft erkennt man an dem scharfen Klange, mit welchem das Quecksilber bei dem Neigen des Instrumentes oben anstößt. Schwieriger zu erkennen ist das Vorhandensein von Wasserdampf, welcher sich nur bei größeren Mengen durch einen Beschlag bemerklich macht, der sich bei dem Neigen an der Glaswand bildet.

Kann man durch Heben des Quecksilbers usw. das Vakuum über dem Quecksilber verkleinern und zugleich die Druckhöhe beobachten, so läßt sich eine vorhandene kleine Luft- oder Dampfmenge daran erkennen, daß die Höhe sich vermindert; ihr

Einfluß kann vermittelst Messung dieser Depression in Rechnung gesetzt werden. Das Wild-Fuess'sche Heberbarometer (Skizze in Fig. 3) läßt diesen Zweck durch Hinaufdrücken des Quecksilbers, in welches die beiden Schenkel eintauchen, mittels des Lederschlauchs erreichen. Eine etwas andere Konstruktion hat einen mit Schraube komprimierbaren Lederdeckel.



Am Heberbarometer (Fig. 2) liest man beide Kuppen ab und nimmt ihre Höhendifferenz. — Am Gefäßbarometer (Fortin, Fig. 1) stellt man den durch eine Stahl- oder Elfenbeinspitze gebildeten Nullpunkt des Maßstabes auf die am Reflex scharf zu erkennende Berührung mit der unteren Quecksilberfläche ein und liest oben ab. Hat aber das Gefäßbarometer einen feststehenden Maßstab, so sind die beobachteten Schwankungen mit $1 + q/q'$ zu multiplizieren, wenn q bez. q' den Querschnitt des Rohres bez. des Gefäßes bedeuten. Oder es ist die Teilung an derartigen Instrumenten gleich in diesem Verhältnis verkleinert.

Die Ablesung der Kuppe geschieht mit bloßem Auge oder durch Einstellung eines verschiebbaren Index, unter Anwendung eines Spiegels zur Vermeidung der Parallaxe (**21**, 1), oder mit einer Visiervorrichtung aus gespannten Fäden oder dem Mikroskop. Ein Barometerrohr ohne Maßstab beobachtet man mit dem Kathetometer (**22**). Über den Nonius siehe **21**.

Wegen der Reibung des Quecksilbers klopft oder neigt man vor der Ablesung. Vorteilhaft ist, auch wegen der Kapillarität, bei dem Heberbarometer das Quecksilber in beiden Schenkeln vor dem Ablesen ansteigen zu lassen (Fig. 3 oben).

Barometerablesungen verlangen folgende Korrektionen:

1. Temperatur des Quecksilbers. Das Quecksilber dehnt sich für 1° C. um 0,000182 seines Volumens aus. Ist demnach l der bei der Temperatur t des Barometers abgelesene Barometerstand, so ist der auf 0° reduzierte (**4**, Beispiel Nr. 2)

$$b = l - 0{,}000182\, lt.$$

2. Temperatur des Maßstabes. Bei genauen Messungen muß auch die Länge des Maßstabes auf seine Normaltemperatur t_0 reduziert werden, was durch Addition von $\beta(t-t_0)l$ erreicht wird, worin β den Ausdehnungskoeffizienten des Maßstabes (0,000019 für Messing; 0,000008 für Glas) bedeutet.

Wenn wie gewöhnlich die Normaltemperatur des Maßstabes $= 0^0$ ist, so wird der wegen der Temperaturausdehnung vollständig korrigierte Barometerstand

$$b = l - (0{,}000182 - \beta)\,lt.$$

Die gesamte Korrektion des abgelesenen Standes l beträgt

für eine Messingskale $-0{,}000163\,lt$
für eine Glasskale $-0{,}000174\,lt$,

welche Werte in Tab. 8 zu finden sind.

Bei dem gewöhnlichen Barometerstande beträgt die Korrektion nahe $\frac{1}{8}$ mm auf 1^0 und es wird oft genügen, von dem beobachteten Stande $\frac{1}{8}t$ mm abzuziehen.

3. Kapillardepression eines Gefäßbarometers. Um diese zu korrigieren, mag man zu dem an der Kuppe des Meniskus abgelesenen Stande den aus Tab. 18a zu dem inneren Durchmesser der Röhre und der Höhe des Quecksilbermeniskus entnommenen Wert hinzufügen (vgl. 6 und S. 137).

4. Spannkraft des Quecksilberdampfes. In höherer Temperatur bewirkt diese eine kleine Depression (Tab. 15), die aber erst bei 40^0 0,01 mm erreicht.

5. Schwere-Reduktion auf 45^0. Der Druck einer und derselben Quecksilbersäule an verschiedenen Orten ist der Schwere proportional. Mit dem Ausdruck (**35**) $1 - 0{,}0026 \cos 2\varphi - 0{,}0000002\,H$, dessen letztes Glied übrigens nur in größeren Höhen merklich wird, ist ein beobachteter Barometerstand zu multiplizieren, um den Stand zu erhalten, welcher demselben Luftdruck unter 45^0 am Meeresspiegel entspricht.

Aus dem reduzierten Barometerstande b in cm berechnet man den Druck in gr-Gewicht/cm² als $b \cdot 13{,}596$. Der Druck im absoluten cm-gr-sek-System, d. h. in Dynen/cm² oder in $[\mathrm{cm}^{-1} \cdot \mathrm{gr} \cdot \mathrm{sek}^{-2}]$ (Anh. 8) ist $b \cdot 13{,}596 \cdot 980{,}6 = b \cdot 13332$.

Eine normale Atmosphäre entspricht dem Drucke $76 \cdot 13{,}596 = 1033$ gr-Gew./cm² oder $76 \cdot 13332 = 1013200$ $[\mathrm{cm}^{-1}\ \mathrm{gr}\ \mathrm{sek}^{-2}]$ oder Dyne/cm².

Die Bemerkungen Nr. 1 bis 5 sind auf jede genaue Druckmessung mit Quecksilbersäulen anzuwenden.

6. Normalbarometer. Die aus der Kapillardepression entstehende Unsicherheit läßt sich nur durch ein weites Rohr (25 mm und für äußerste Genauigkeit noch weiter) vermeiden, welches die Depression ausschließt. Die Füllung geschieht zur Vermeidung von Luft oder Wasserdampf mit der Quecksilberluftpumpe. Über reines Quecksilber s. 8, 1. Durch Vergleichung eines anderen Instrumentes mit dem Normalbarometer bestimmt man die Korrektionen des ersteren empirisch.

Über Formen von Barometern, deren Luftgehalt stets zu kontrollieren oder zu beseitigen ist, vgl. L. Weber, ZS f. Instr. 18, 63. 1898. Über das Wild-Fueß'sche Barometer Wiss. Abh. d. P T. Reichsanst. I 93 1894. — Barographen, die den Luftdruck registrieren, sind an Aneroidbarometer angeschlossen oder sie benutzen die Variation des Gewichtes der gehobenen Quecksilbersäule (Sprung), vgl. z. B. Scheel, ZS f Instr. 1895, 138.

Aneroidbarometer werden durch Vergleichung mit dem Quecksilberbarometer justiert bezw. mit einer Korrektionstabelle versehen. Man bringt das Instrument z. B. unter die Luftpumpe und verbindet mit dem Rezipienten ein hinreichend weites Glasrohr, in welches Quecksilbersäulen angesaugt werden. Nachdem man dann wegen der elastischen Nachwirkung, welche den Messungen rasch wechselnder Drucke mit dem Aneroid als Fehlerquelle anhaftet, längere Zeit gewartet hat, liest man das Aneroid, die gehobene Säule und den äußeren Barometerstand ab. Die letzteren beiden, auf 0° reduzierten Höhen, von einander abgezogen, geben den der Einstellung des Aneroids zugehörenden Barometerstand. Die Temperaturkorrektion eines Aneroids ist empirisch zu bestimmen. Über Einflüsse der elastischen Nachwirkung s. **55b**. Ihre Elimination ist schwierig.

Variometer für Luftdruck. Zu Messungen dauernd brauchbar sind die unter **36** IV beschriebenen Spiegelinstrumente, wenn die Mündung verlötet ist. Die Temperatureinflüsse auf die Elastizität der Wände und des Luftgehalts lassen sich dadurch kompensieren, daß die Luft bis auf einen geeigneten kleinen Rest ausgepumpt wird.

Sehr empfindlich mißt die Schwankungen auch eine durch einen Tropfen (Petroleum, Toluol) in einer geteilten Röhre abgesperrte größere Luftmenge, solange ihre Temperatur konstant erhalten wird. Vgl. v. Hefner Alteneck, Wied Ann. 57, 468. 1896. Ferner M. Toepler, Ann. der Ph. 12, 787. 1903 über die Anwendung der unter **36** V beschriebenen Drucklibelle.

38. Barometrische Höhenmessung (Halley, Laplace).

Mit wachsender Höhe nimmt der hydrostatische Druck der Luft ab. Bei dem Ansteigen vermindert sich die Quecksilbersäule, welche dem Luftdruck das Gleichgewicht hält, um eine Länge, die sich zu dem Höhenunterschiede verhält, wie das spez. Gewicht der Luft zu dem des Quecksilbers, unter gewöhnlichen Umständen also wie 0,0012 : 13,6 oder ungefähr wie 1 : 11000; d. h. auf 11 m Anstieg sinkt das Barometer um etwa 1 mm. — Da die Luft ein dem Barometerstande selbst proportionales, also mit der Höhe kleiner werdendes spez. Gewicht hat, so nimmt der Barometerstand nicht gleichmäßig mit der Höhe ab, sondern in geometrischer Proportion. Dies spricht sich darin aus, daß der Höhenunterschied der Differenz der Logarithmen des Barometerstandes proportional ist, denn ein Logarithmus ändert sich gleichmäßig, wenn die Zahl sich in geometrischem Verhältnis ändert. — Vgl. die Ableitung S. 147.

I. Aus den gleichzeitig an zwei benachbarten Stationen beobachteten Barometerständen b_0 und b_1 findet man die Höhendifferenz h der Stationen in Metern nach der Formel

$$h = 18400 \cdot (1 + 0{,}004\, t)(\lg b_0 - \lg b_1),$$

wofür bis zu Höhendifferenzen von etwa 1000 m auch der bequemere genäherte Ausdruck gesetzt werden kann

$$h = 16000 \cdot (1 + 0{,}004\, t) \cdot (b_0 - b_1)/(b_0 + b_1).$$

t bedeutet die mittlere Temperatur der Luftsäule.

In der Formel ist halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf und die für 45° geltende Schwere angenommen. Die Logarithmen sind die gewöhnlichen briggischen.

II. Um die Veränderlichkeit der Schwere und der Luftfeuchtigkeit zu berücksichtigen, bezeichnen wir mit

φ die geographische Breite,

H die mittlere Meereshöhe der beiden Orte in Metern (der Einfluß wird selten merklich);

e_0 und e_1 die Spannkraft des Wasserdampfes an den beiden Stationen (47) und setzen zur Abkürzung

$k = \frac{1}{2}(e_0/b_0 + e_1/b_1)$.

Dann berechnet man die Höhendifferenz

$$h = 18430 \cdot (\lg b_0 - \lg b_1)(1 + 0{,}00367\, t) \cdot (1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi + 0{,}0000002\, H + \tfrac{3}{8} k).$$

Beweis der Formeln. Die Dichtigkeit der Luft ist (18 u. S. 144), wenn wir $0{,}0026 \cdot \cos 2\varphi = \vartheta$, $0{,}0000002 = \varepsilon$ und $0{,}00367 = \alpha$ setzen, gleich

$$\frac{0{,}001293}{1+\alpha t}\,\frac{b-\frac{3}{8}e}{760}(1-\vartheta-\varepsilon H).$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers von 0° beträgt 13,596. Folglich ist, wenn für die Höhenänderung dH der Barometerstand b sich um db ändert (d. h. dH bez. db die Höhe einer Luft- bez. einer Quecksilbersäule bedeuten, die sich im Gleichgewicht halten),

$$-db = \frac{0{,}001293}{13{,}596\cdot 760}\left(b-\tfrac{3}{8}e\right)\frac{1-\vartheta-\varepsilon H}{1+\alpha t}\,dH.$$

Hierin sind e und t eigentlich mit H veränderlich, aber nach einem unbekannten Gesetze. Wir führen für t den konstanten Mittelwert ein und setzen e in ein konstantes Verhältnis zum Barometerstand, $e = kb$. Rechnet man den Zahlenfaktor aus und behandelt die kleinen Größen $\frac{3}{8}k$, ϑ und εH nach S. 9 als Korrektionsgrößen, so kann man schreiben

$$-7991000\,(1+\alpha t)(1+\vartheta+\tfrac{3}{8}k)\cdot db/b = (1-\varepsilon H)\,dH.$$

Wird jetzt integriert, auf der linken Seite von b_0 bis b_1, auf der rechten von H_0 bis H_1, so kommt

$$7991000\,(1+\alpha t)(1+\vartheta+\tfrac{3}{8}k)\,(\lg\mathrm{nat}\,b_0-\lg\mathrm{nat}\,b_1) = (H_1-H_0)\left[1-\tfrac{1}{2}\varepsilon\,(H_1+H_0)\right].$$

Endlich setzen wir $\lg\mathrm{nat}\,b = 2{,}3026\lg\mathrm{brigg}\,b$, behandeln $\frac{1}{2}\varepsilon(H_1+H_0) = \varepsilon H$ als Korrektionsglied und erhalten

$$H_1-H_0 = h = 18400000\,\mathrm{mm}\cdot(\lg b_0-\lg b_1)(1+\alpha t)(1+\vartheta+\varepsilon H+\tfrac{3}{8}k).$$

Der Faktor 18400 m ist wegen der bisher vernachlässigten **Abnahme** der Schwere des Quecksilbers mit der Höhe noch um $\frac{1}{6}$%, also auf 18430 zu vergrößern. Denn auf 1 m Erhebung beträgt jene $\frac{1}{5000000}$, während der Druck um $\frac{1}{8000}$ abnimmt. Also war die Höhen-Abnahme des Barometerstandes um $\frac{8000}{5000000} = \frac{1}{600}$ zu groß angesetzt.

Die Näherungsformel I ergibt sich, wenn man halbe Sättigung der Luft mit Wasserdampf annimmt, nach 18 Formel 2.

Die unter I für kleine Höhenunterschiede gegebene Formel ist nichts anderes als die obige Differentialformel, welche mit Mittelwerten von ϑ und k wird $-7990000\,(1+\alpha t)\,db/b = dH$; dH ist der Höhenunterschied. Für den Unterschied der Barometerstände $-db$ schreiben wir b_0-b_1, setzen den mittleren Stand $b = \frac{1}{2}(b_0+b_1)$, lassen beim Übergange vom mm zum m 3 Nullen fort und erhöhen 7990 wegen der Schwerekorrektion um $\frac{1}{600}$ auf rund 8000.

Sehr große Höhen. Ballonhöhen von vielen tausend Metern sollen nach der vollständigen Formel zu klein ausfallen und zutreffender ohne individuelle Rücksicht auf Temperatur usw. als $h = 18590\,(\lg b_0 - \lg b)$ berechnet werden. Maillard, C. R. 136, 1427. 1903; ZS f. Instr. 1903, 123.

Hypsometer. So nennt man einen leicht transportabeln Apparat, der die Siedetemperatur des Wassers sehr genau be-

stimmen läßt; Tabelle 14a gibt die zusammengehörigen Siedetemperaturen und Barometerstände. Da 1 mm Barometerstand etwa $\frac{1}{25}$ Grad entspricht, so werden große Vorsichtsmaßregeln der Temperaturbestimmung (40 II) verlangt. Neuerdings ist aber die Sicherheit der Messung bis auf etwa $\pm$ 0,02 mm des Barometerstandes gesteigert worden.

Vgl. z. B. Grützmacher, ZS f. Instr 1897, 193; Mohn, Videnskabsselsk. Skriften I Math. nat. Kl., Kristiania 1899 Nr. 2; Hecker, Best. der Schwerkraft auf d. Atlant. Ozean etc. Berlin 1903.

Reduktion eines Barometerstandes auf Meereshöhe. Die internationale Meteorologie korrigiert einen für die Höhe H geltenden Barometerstand b auf Meereshöhe, indem sie zu $\lg b$ die Größe addiert:

$$\frac{H(1 - \frac{3}{8}e/b)}{(18429 + 67{,}5\,t + 0{,}003\,H)(1 + 0{,}0026 \cos 2\varphi)}$$

Wärme.

39. Formen von Thermometern. Allgemeines.

Über Temperaturbäder etc. s. 8, 27.

„Luftfreie“ Quecksilberthermometer können von — 39° bis etwa + 300° brauchbar sein; meistens zerreißt der Faden bereits in tieferer Temperatur, besonders wenn Luftspuren sich im Quecksilber befinden. Man beseitigt diese, indem man mittels Abkühlung durch Kältemischungen, verdampfenden Äther, feste Kohlensäure das Quecksilber sich ganz in die Kugel zusammenziehen läßt. Endigt die Kapillare oben in eine Erweiterung (Birne), die auch gegen das Zerspringen bei unvorsichtiger zu hoher Erwärmung schützt, so bringt man den am Luftbläschen abgerissenen Faden in die Birne. Das übrige Quecksilber läßt sich dann durch Umkehren des Thermometers oder nötigenfalls durch Anwärmen gleichfalls bis in die Birne bringen. Dort läßt man die Quecksilbermengen zusammenfließen und kühlt nun langsam in vertikaler Stellung ab.

1. 2.

Die Erweiterung dient oft auch zur Abtrennung eines Teiles des Quecksilbers, um dasselbe Instrument in höherer Temperatur gebrauchen zu können, als die Skale angibt. Man vergleicht nachher einen Punkt der Skale mit einem Normalthermometer. Außerdem ist aber der Skalenwert, wenn man a Grade abgetrennt hat, im Verhältnis $1 + 0{,}00016\,a$ größer anzunehmen.

Unter dem Namen Beckmann'sches Thermometer ist, besonders bei Gefrierpunktsbestimmungen, die Form 1 gebräuchlich, welche eine sehr weite Teilung hat. — Nr. 2 ist zunächst von 0 bis 30° und von 100 bis 130° brauchbar. Die obere Erweiterung läßt Quecksilber abtrennen, um die verwendbaren Intervalle von 30 Graden höher legen zu können.

Ein evakuiertes Quecksilberthermometer zeigt wegen des „toten Ganges“ bei sinkender Temperatur wenigern sicher als bei steigender. Klopfen mit einem Stückchen Holz vor der Ablesung ist bei genauen Messungen stets anzuraten.

Für die Gestalt der Gefäße kann in Betracht kommen: eine große Oberfläche im Interesse raschen Wärmedurchganges, unter Umständen eine gestreckte Form auch zu dem Zwecke, die Mitteltemperatur eines Raumes anzuzeigen; geringe Wanddicke für Wärmedurchlaß, andererseits nicht zu geringe wegen Zerbrechlichkeit und Einfluß des Druckes und der Neigung (**40** III). Größere Quecksilbermassen sind wegen der zum Wärmeausgleich nötigen Zeit vorsichtig zu gebrauchen.

In hoher Temperatur achte man auch noch auf etwaiges Abdestillieren von Flüssigkeit.

Hochgehende Thermometer enthalten über dem Quecksilber Stickstoff oder Kohlensäure. Mit Hilfe dieser Füllung werden durch das schwer schmelzbare Jenaer Glas Nr. 59 jetzt Skalen bis 550° ermöglicht, wobei der Druck über dem Quecksilber wegen dessen Dampfspannung 12 Atmosphären übersteigen muß.

Von — 39° abwärts dient Alkohol, Toluol, Petroläther, technisches Pentan zur Füllung; vgl. **43a** III. Diese Flüssigkeiten haben die Nachteile erstens größerer Trägheit wegen schlechter Wärmeleitung, zweitens der Benetzung des Glases, welche z. B. auch die Kalibrierung nach der Füllung hindert. Ferner wachsen die Gradlängen mit der Temperatur. Die Teilung kann nach Ausdehnungsformeln geschehen, ist aber durch Vergleich mit dem Gasthermometer zu korrigieren.

Ablesung des Thermometers. „Einschlußthermometer" mit feiner Kapillare vor der Teilung können mit bloßem Auge, mit Lupe oder Fernrohr abgelesen werden. Bei feineren Ablesungen an Stabthermometern ist das Fernrohr anzuwenden: man richtet z. B. das Thermometer durch Visieren nach einem Senkel, Fensterrahmen u. dergl. vertikal und stellt das Fernrohr in der Höhe des abzulesenden Teilstriches auf. Am sichersten, besonders bei geringem Abstande des Fernrohrs (Mikroskops) liest man ein durchsichtiges Stabthermometer von vorn und rückwärts ab und nimmt das Mittel; dabei dreht man das Thermometer in sich, ohne es der Länge nach zu verschieben.

Ein einfaches Mittel zur Vermeidung der Parallaxe ist ein hinter das Thermometer angedrücktes Spiegelstreifchen; man hält das Auge so, daß sein Spiegelbild in der Höhe der Quecksilberkuppe liegt. Bei der Ablesung mit einer Lupe bietet auch

die Krümmung der in unrichtiger Höhe liegenden Striche ein Mittel zur richtigen Augenstellung.

40. Quecksilberthermometer. Eispunkt und Siedepunkt.

Wissenschaftlich definiert man die Temperatur nach ihrer Wirkung auf ein vollkommenes Gas (bis jetzt Wasserstoff; in Zukunft wohl Helium), indem man gleichen Druck- (oder Volum-)Zuwachsen des Gases gleiche Temperatur-Zuwachse zur Seite stellt. Die Centigradskale nennt Null die Temperatur des schmelzenden Eises und Hundert die Siedetemperatur des Wassers bei 760 mm Druck (87).

Die amtlich in Deutschland geprüften und die aus den besseren Werkstätten bezogenen Thermometer beziehen sich bis 100° auf Wasserstoff, von da aufwärts auf Luft oder Stickstoff.

Das Quecksilberthermometer hält nicht ganz gleichen Schritt mit dem Gasthermometer, weil Quecksilber und Glas sich nicht gleichmäßig ausdehnen. Vgl. hierüber VI. Zunächst soll das Quecksilberthermometer für sich betrachtet werden. Die neueren, gut definierten und mit manchen Fehlern der alten Gläser weniger behafteten Jenaer Gläser haben das Thermometer zu einem wissenschaftlich genauen Instrument gemacht.

Bei feinen thermometrischen Messungen ist freilich, wenn die Temperatur größeren Schwankungen unterliegt, Rücksicht darauf zu nehmen, daß der Stand des Thermometers wegen der Nachwirkung von Ausdehnungen des Glases auch durch die vorausgehenden Zustände etwas beeinflußt wird; vgl. III. Wir setzen indessen zunächst voraus, daß das Instrument bei jeder Messung schon so lange in der Nähe der abgelesenen Temperatur verweilt habe, daß es zur Ruhe gekommen ist. (Über eine andere Art zu rechnen vgl. IV.) Als („stabiler") Nullpunkt soll also der Punkt gelten, an welchem sich nach längerem, wenn das Thermometer vorher stark erwärmt war, unter Umständen nach sehr langem Verweilen im Eise das Quecksilber einstellt; von hier bis zu der stabilen Einstellung beim Sieden sind 100 Grade. Die Temperaturskale sei zwischen diesen festen Punkten und außerhalb derselben durch Teilen bez. Kalibrieren nach gleichen Volumina definiert.

Eine Zusammenstellung der bei dem Quecksilber-Thermometer in Betracht kommenden Gesichtspunkte s. z. B. bei Scheel, Vereinsbl. d. Deutsch. Ges. f. Mech. u. Opt. 1897, 91, 97, 105.

Als ein gelegentlich brauchbarer Fixpunkt wird von Richards auch die Umwandlungstemperatur 32°,38 des krist. Natriumsulfats mit $10 H_2O$ (Glaubersalz) in wasserfreies Na_2SO_4 empfohlen. ZS f. phys. Ch. 43, 465. 1903; Proc. Amer. Acad. 38, 431. 1902.

I. Eispunkt.

Man taucht das Thermometer in reinen schmelzenden Schnee oder reines (gewaschenes), fein zerstoßenes, besser etwa mit

einem Böttchermesser geschabtes oder auf einem Reibeisen zerkleinertes salzfreies Eis, mit destilliertem Wasser zu einem Brei angefeuchtet; fabriziertes Eis ist wegen Salzgehaltes bedenklich.

Die Quecksilbersäule soll möglichst ganz in das Eis eintauchen; Einschlußthermometer sind bis über den Nullpunkt einzusenken und nur während der Ablesung oben soweit nötig vom Eise zu befreien, nicht etwa herauszuziehen, da hierbei die Luft einströmt. Besondere Beachtung verlangt das etwaige Abschmelzen des Eises von der Quecksilberkugel, welches beträchtliche Fehler bewirken kann. Die Fehlerquellen werden viel kleiner, wenn man die Bestimmung in einer Umgebung vornehmen kann, deren Temperatur wenig über 0° liegt.

Dem Punkte, auf welchen sich die Quecksilbersäule einstellt, nachdem das Thermometer die Temperatur des Eises angenommen hat, entspricht die Temperatur Null.

Der stabile Nullpunkt ist vor dem Siedepunkt zu bestimmen; vgl. III.

II. Siedepunkt.

Man bringt das Thermometer in die Dämpfe von Wasser, welches in einem Metallgefäß oder auch einem Glasgefäß mit hineingeworfenen Metallstücken kräftig siedet. Die Temperatur des Wasserdampfes ergibt sich aus dem Druck, unter welchem das Wasser siedet, d. h. aus dem nach 37 reduzierten Barometerstande mit Hilfe von Tab. 14a. Bis auf $\frac{1}{100}$ Grad richtig kann man zwischen 715 und 775 mm für den Barometerstand b die Siedetemperatur t ohne Tabelle nach der Formel erhalten

$$t = 100^0 + 0{,}0375^0 \cdot (b - 760).$$

Die Thermometerkugel wird nicht in das siedende Wasser gebracht, sondern etwas über die Oberfläche. Es soll möglichst die ganze Quecksilbersäule sich im Dampf befinden. — Der Ausgang für die Dämpfe muß so weit sein, daß nicht im Innern des Gefäßes ein Überdruck entsteht, oder man mißt diesen Überdruck mittels eines aus dem Dampfraum am Thermometer kommenden Wassermanometers. Der 14. Teil der gehobenen Wassersäule wird zu dem Barometerstande hinzugezählt. — Die

Flamme soll die nicht benetzten Teile der Gefäßwände nicht bespülen. — In dem oben gezeichneten Gefäß braucht die Quecksilberkugel nicht dicht über dem Wasser zu stehen. — Die Durchwärmung bedarf besonders bei Einschlußthermometern einige Zeit. Man soll mit der Ablesung warten, bis der Stand unveränderlich ist.

Beispiel. Reduzierter Barometerstand (37) = 742 mm. Also wahre Siedetemperatur (Tab 14a) = 99,33° (aus der Formel 100 — 0,0375·18 = 99,33°). Das Thermometer zeigte 99,80. Folglich zeigt das Thermometer um 0,47° zu hoch, also ist in der Nähe von 100° die Korrektion der Ablesung = — 0,47°.

III. Veränderlichkeit der Fixpunkte.

1. Neigung und Druck. Die meisten Thermometer sind darauf berechnet, daß sie in vertikaler Stellung gebraucht werden. Man muß das bei langen Thermometern beachten, da sie in anderer Stellung wegen des verminderten Innendrucks etwas höher zeigen. Der Einfluß ist empirisch zu bestimmen. Findet man, daß das Thermometer dieselbe Temperatur in horizontaler Lage um ϑ höher angibt als in vertikaler Lage, so hat die Korrektion des Thermometers auf vertikale Lage bei einer Neigung um den Winkel φ den Betrag $\vartheta \cdot \sin \varphi$. Der Faktor ϑ ist der von der Mitte des Quecksilbergefäßes gemessenen Höhe der Quecksilbersäule proportional, also mit der Temperatur variabel (aber bei eingeschalteten Erweiterungen nicht der Anzahl der Grade proportional). — Eis- und Siedepunkt lassen sich unschwer auch in horizontaler Lage ermitteln. Vgl z. B. Melander, ZS f. Instr. 1894, 130.

Auf empfindliche Thermometer hat auch veränderlicher äußerer Druck, z. B. die Tiefe des Eintauchens oder der wechselnde Barometerstand einen der Änderung proportionalen Einfluß, den man empirisch ermitteln, aber in der Regel auch um etwa 10 Proz. kleiner als den inneren Druckkoeffizienten ansetzen kann. Der letztere beträgt durchschnittlich auf eine Zunahme des Druckes um 1 mm Quecksilber etwa $\frac{1}{7000}$ ° C.; der obige Faktor ϑ ist also für eine l mm lange Quecksilbersäule durchschnittlich auf $\frac{1}{5000}\, l$° C. zu schätzen.

2. Allmähliches Aufrücken der Fixpunkte. Wegen der langsamen Zusammenziehung des geblasenen Glases rücken die beiden festen Punkte neu hergestellter Thermometer aufwärts, und zwar um nahe gleich viel. Das Aufrücken dauert mit verminderter Geschwindigkeit unter Umständen jahrelang fort und kann mehr als 1° betragen; durch „künstliches Altern", d. h. langes Erwärmen, etwa auf Siedetemperatur, wird der Prozeß beschleunigt. Bei den neueren Thermometergläsern Jena Nr. XVI und besser noch bei Nr. 59 tritt diese und die unter Nr. 3 genannte Veränderlichkeit nicht mehr so stark auf.

3. Depression der Einstellungen nach Erwärmungen. Das Glas erreicht ein durch Temperaturänderung ihm endgültig zukommendes

neues Volumen erst im Laufe der Zeit. In höherer Temperatur, z. B. schon bei 100° verläuft der Prozeß rasch, in niedriger Temperatur viel langsamer. Es läßt also jede Erwärmung eine Erweiterung des Gefäßes (Nachwirkungs-Dilatation) und dadurch einen tieferen Stand des Quecksilbers, eine nach der Glassorte und der Größe und Dauer der Erwärmung verschiedene „Depression des Nullpunktes“ zurück. Dieselbe verliert sich mit der Zeit anfangs rascher, später langsamer und kann nach längerer stärkerer Erwärmung wochenlang merkbar bleiben.

Dies ist der Grund, aus welchem der stabile Eispunkt eines Thermometers nicht kurze Zeit nach einer erheblichen Erwärmung, im allgemeinen also z. B. vor dem Siedepunkt zu bestimmen ist.

Bei Thermometern, die in höherer Temperatur gebraucht werden, ist das Warten oft unbequem. Zur Kontrolle ihrer Unveränderlichkeit kann aber anstatt des stabilen Eispunktes auch der „für 100° maximal deprimierte Eispunkt“ dienen, d. h. der Punkt, den das Instrument nach längerem, etwa halbstündigem Verweilen in siedendem Wasser gleich nachher als vorübergehenden tiefsten Stand im Eise zeigt. Dieser Punkt charakterisiert das Thermometer mit derselben Bestimmtheit wie der stabile Eispunkt.

Die Anfangsdepression nach langer Erwärmung auf t^0 läßt sich durch den Ausdruck $at + bt^2$ darstellen; a und b hängen von der Glassorte ab. Zwischen 0 und 100° ist für mittleres Thüringer Glas (welches Kali und Natron enthält) a, für Jenaer Thermometerglas und das französische Thermometerglas Verre dur (die wesentlich nur ein Alkali enthalten) b klein gefunden. Nach längerer Erwärmung auf t^0 beträgt die Depression in Hunderteln Grad für Jena XVI $0{,}065t + 0{,}0003t^2$; Jena 59 $0{,}049t - 0{,}00015t^2$; Verre dur $0{,}100t + 0{,}00009t^2$. (Thiesen, Scheel und Sell, ZS f. Instr. 1896, 58.) Für $t = 100^0$ bez. 0,09, 0,03 und 0,11°; mittl. Thür. Glas etwa 0,5°.

4. Aufrücken durch Erhitzen. Verweilen in sehr hoher Temperatur kann, auch ohne Einwirkung des Luftdrucks, ein dauerndes, unter Umständen erhebliches Hinaufrücken (bis + 20°) der festen Punkte zur Folge haben. Thermometer für hohe Temperaturen sind vor dem Gebrauch einige Tage lang zu erhitzen und langsam zu kühlen. Öfteres Kontrollieren des Eispunktes ist stets anzuraten.

IV. Thermometrie mit steter Nullpunktsbestimmung.

Bei der eingangs gegebenen Definition der Temperaturskale wurde, dem gewöhnlichen Gebrauch des Thermometers entsprechend, angenommen, daß dieses bei allen Messungen, auch bei der Nullpunktsbestimmung zur Ruhe kommt. Wird das Thermometer nur in mittleren Temperaturen benutzt, so variiert der Nullpunkt selbst bei Intervallen von 20° höchstens um einige Hundertel Grad. Sind dagegen die Schwankungen groß, was z. B. bei einem durch Null- und Siedepunkt in sich zu kontrollierenden Thermometer sich nicht vermeiden läßt, so führt zu einer weit höheren

Genauigkeit ein anderes, freilich für gewöhnliche Zwecke umständliches Verfahren (Pernet).

Insofern nämlich der Abstand zwischen dem Siedepunkt (100°) und dem gleich nach diesem bestimmten Nullpunkt konstanter und außerdem leichter zu bestimmen ist, als das gewöhnlich benutzte Intervall, weil man hier unter Umständen lange warten muß; weiter, da vorausgegangene andere Temperaturen die folgenden Einstellungen beeinflussen; endlich, da die Depression des Nullpunktes nicht der Temperatur proportional ist (wodurch zwischen den beiden Definitionen sogar eine kleine Differenz entsteht), so brauchen feine thermometrische Messungen die folgenden Definitionen:

1. Grad ist der 100te Teil der Strecke zwischen dem Siedepunkt und dem gleich nach dem Sieden gefundenen Eispunkt.

2. Die Temperatur t wird immer von demjenigen Nullpunkt gerechnet, welchen man unmittelbar nach der Temperaturbeobachtung findet oder finden würde. (Der Nullpunkt ist in dieser Definition also eine veränderliche Größe.) Vgl. über die Berechnung III 3.

Literatur zu III u. IV: Pernet, Thermometrie in Winkelmann, Handbuch II 2; Guillaume, Traité prat de la thermométrie, Paris 1889; Thiesen, Grunmach, Wiebe, Weinstein, metronom. Beiträge Nr. 3, 1881; Wiebe, ZS f. Instr. 1888, 373; 1890, 207; und Böttcher, ib. 1888, 409; Guillaume, Mém. du Bur. internat. des poids et mesures 5, 1886; Pernet, Jaeger u. Gumlich, Abh. d. P. T. Reichsanst. Bd. 1; ZS f. Instr. 1895, 2, 41, 81 u. 117.

V. Herausragender Faden.

Darin daß es oft nicht möglich ist, das Thermometer ganz in den Raum einzuführen, dessen Temperatur gemessen werden soll, liegt eine empfindliche, mit der Höhe der Temperatur beschleunigt steigende Fehlerquelle.

Die Thermometerskale nimmt an, daß das ganze Quecksilber die zu messende Temperatur hat. Bleibt, wie gewöhnlich, ein Teil des Fadens außerhalb, und hat die Umgebung eine andere Temperatur, so ist folgendermaßen zu korrigieren. Der „scheinbare Ausdehnungskoeffizient" des Quecksilbers im Glase, d. h. der Unterschied der Volum-Ausdehnungskoeffizienten beider Substanzen beträgt für gewöhnliches und Jenaer Thermometerglas Nr. XVI 0,000157, für Jen. Therm.-Glas Nr. 59 0,000163, für Verre dur 0,000158; also hat man zu der Ablesung t hinzuzufügen

$$0{,}000157 \text{ bez. } 0{,}00163 \text{ oder } 0{,}000158 \times a(t - t_0),$$

wenn t_0 die Mitteltemperatur, a die in Graden ausgedrückte Länge des herausragenden Fadens ist. Bezüglich t_0 muß man sich häufig mit einer Schätzung begnügen; am sichersten ist es also, herausragende Fäden zu vermeiden. Die Ermittelung von t_0 geschieht folgendermaßen:

1. Man nimmt ein kleines Hilfsthermometer, dessen Gefäß etwa in der mittleren Höhe des herausragenden Fadens angebracht ist, oder mehrere in verschiedenen Höhen angebrachte, und beurteilt die Temperatur des Fadens aus den Ablesungen am Hilfsinstrument.

Über die Anwendung einer Korrektionsröhre neben dem Thermometer vgl. Guillaume, C. R. 112, 87. 1891. Über ein Fadenthermometer hierfür s. Mahlke, ZS f. Instr. 1893, 58; 1894, 73.

2. Ein anderes Verfahren ist das folgende (Mousson, Wüllner). Man setzt für den herausragenden Faden die Temperatur des Zimmers, aber als Fadenlänge, welche sich auf dieser Temperatur befindet, nicht die ganze herausragende Länge, sondern man zieht von dieser Länge eine konstante Größe α ab, welche sich folgendermaßen bestimmt. Das Thermometer zeige in einem warmen Bade von konstanter Temperatur (etwa dem Siedegefäß S. 152) die Einstellung T, wenn es ganz eintaucht, während es, um A Grade herausgezogen, nach längerer Zeit nur t anzeige. τ_0 sei hierbei die Lufttemperatur. Den scheinb. Ausd.-K. des Quecksilbers im Glase $= 0{,}00016$ gesetzt berechnet man die Konstante dann

$$\alpha = A - \frac{1}{0{,}00016} \cdot \frac{T-t}{t-\tau_0}.$$

Das so gefundene α wird also bei dem Gebrauch dieses Thermometers immer von der herausragenden Fadenlänge a abgezogen; alsdann ist die Korrektion nach der ersten Formel, und zwar mit t_0 als Lufttemperatur zu berechnen.

Tabellen für gebräuchliche Thermometerformen s. in Landolt-Börnstein Tab. 3. Aufl. 1904.

VI. Korrektion des Quecksilberthermometers auf das Gasthermometer (42).

Das Quecksilber dehnt sich, verglichen mit vollkommenen Gasen, nicht genau gleichförmig, sondern etwas beschleunigt aus.

Sein Volumen bei t^0 Wasserstofftemperatur ist zwischen 0 und 100° nach Thiesen, Scheel und Sell

$$v_t = v_0 (1 + 0{,}0001816\,t + 0{,}0_7 078\,t^2),$$

nach Chappuis

$$v_t = v_0 (1 + 0{,}00018169\,t - 0{,}0_8 2951\,t^2 + 0{,}0_9 11456\,t^3).$$

Dasselbe gilt vom Glase, aber nach den Sorten in verschiedenem Maße. Offenbar würde eine Glassorte, die eine ebenso starke (absolute) Ungleichmäßigkeit der Volumausdehnung zeigte, wie das Quecksilber, ein Thermometer ergeben, dessen Angaben mit dem Gasthermometer übereinstimmen. In Wirklichkeit aber zeigen die Quecksilberthermometer aus den meisten Glassorten, wenn Eispunkt, Siedepunkt und Kaliber richtig sind, zwischen 0 und 100 etwas zu hoch, darüber hinaus verhalten sie sich verschieden. Die Abweichungen können bei ungünstigen Glassorten bis 150 0,5°, bis 250 4°, bis 350 10° erreichen.

Die Korrektionen der modernen Thermometergläser bis 100° auf Wasserstoff, oberhalb 100° auf Luft, die aber von Wasserstoff nur wenig abweicht, s. in Tab. 16.

Im Prüfungsschein ist diese Korrektion bereits berücksichtigt!

Zahlenzusammenstellungen nach den Beobachtungen von Chappuis, Grützmacher, Lemke, Thiesen, Scheel und Sell, Wiebe und Böttcher s. bei Scheel, Wied. Ann. 58, 168, 1896; Vereinsbl. d. Deutsch. Ges. f. Mech. u. Opt. 1897, S. 91, 97 u. 105; Grützmacher, Wied. Ann. 68, 769. 1899. — Über das relative Verhalten von Stickstoff und Wasserstoff Chappuis, Trav. et Mém. du Bur. int. des poids et mes. 13, 1903.

41. Kalibrierung eines Thermometers.

Ein Thermometer ist in sich richtig, wenn die Fixpunkte stimmen und das Volumen aller Skalenteile gleich groß, d. h. bei linearer Einteilung, wenn der Querschnitt konstant ist. Wegen der Abweichungen von der letzteren Bedingung sind käufliche Thermometer in hohen Temperaturen zuweilen sehr unrichtig.

Eine Korrektionstabelle wird durch Kalibrierung in Verbindung mit der Bestimmung der Fixpunkte folgendermaßen erhalten. Zur Kalibrierung dient ein von der übrigen Masse abgetrennter Quecksilberfaden. Über die Korrektion auf die Gasskale vgl. 40 VI.

Ablösen eines Fadens. Man hält das, als luftleer vorausgesetzte, Thermometer verkehrt und führt einen leichten Stoß gegen das Ende aus. Bei einem Einschlußthermometer muß man, damit nicht die Kapillare bricht, vorsichtig sein und statt des Stoßens mit einem plötzlichen Schnellen auszukommen suchen. Es löst sich entweder ein Faden ab oder es fließt das ganze Quecksilber, indem es sich in der Kugel von der Wandung löst. Das Abreißen wird meistens durch ein irgendwo dem Glase anhaftendes mikroskopisches Luftbläschen bewirkt, welches sich zu einer größeren Blase ausdehnt. Reißt das Quecksilber in der Kugel, so läßt man durch rasches Aufrichten des Thermometers die dort gebildete Blase in den Eingang der Röhre aufsteigen, was mit einiger Geduld immer gelingt. Dann reißt die Säule im Eingang der Röhre ab

Wenn dieser Faden um p Grade länger ist, als gewünscht wird, so erwärmt man, während der Faden abgetrennt ist, die Kugel; die Luft wird vor dem ansteigenden Quecksilber fortgeschoben. Darauf läßt man den Faden rasch zu dem übrigen Quecksilber zurückfließen und merkt sich die Einstellung im Augenblick des Zusammenfließens. Das Luftbläschen bleibt, wenn die beiden Quecksilbermassen in Berührung getreten sind, an dem Punkte der Glasröhre haften, wo der Zusammenstoß erfolgte. Läßt man also um p Grade abkühlen und wiederholt die Neigung und Erschütterung, so reißt jetzt ein Faden von der verlangten Länge ab.

Ist umgekehrt ein Faden um p zu kurz, so vereinigt man ihn mit der übrigen Masse, erwärmt nach der Vereinigung um p, dann reißt beim Abkühlen die gewünschte Länge ab.

Nach einigen Wiederholungen wird es gelingen, bis auf Bruchteile eines Grades genau Fäden von willkürlicher Länge zu erhalten. Nur für sehr kurze Fäden versagt das Verfahren wohl, so daß man kombinierte Beobachtungen mit verschiedenen Fäden anwenden muß; vgl. unten.

Einstellung und Ablesung des Fadens. Durch gelindes Neigen und Erschüttern läßt sich das eine Ende des Fadens auf einen beliebigen Teilstrich einstellen. Es genügt aber auch, genähert einzustellen und die Zehntel Grade an beiden Enden des Fadens abzulesen. Man mache mindestens zwei Reihen von Beobachtungen im Hin- und Rückgang, um den Temperaturgang zu eliminieren.

Zur Vermeidung der Parallaxe legt man eine Spiegelplatte unter und hält das Auge so, daß sein Bild mit dem abgelesenen Teilstrich zusammenfällt; liegt das Thermometer hierbei senkrecht zur Verbindungslinie der beiden Augen, so braucht man kein Auge bei dem Ablesen zu schließen. Oder man stellt eine Lupe oder ein Fernrohr fest auf und verschiebt das Thermometer parallel mit sich selbst. Stabthermometer werden mit Teilung vorn und Teilung hinten beobachtet.

Beobachtung und Berechnung. Die Kalibrierung kann man verschieden ausführen. Um nicht nachher auf verwickelte Rechnungen angewiesen zu sein, stellt man den Plan vorher fest. Eis- und Siedepunkt sollen jedenfalls Endpunkte verglichener Volumina bilden. Beobachtungen nach dem folgenden Schema, mit Fäden von 20^0 für eine von 0 bis 100 reichende Skale oder auch von 50^0 für höhere Temperaturen, bei denen ohnehin die Fehlerquellen beträchtlich sind, werden für gewöhnliche Zwecke genügen, vorausgesetzt, daß die Teilung an sich gut und daß das Rohr nicht in besonders hohem Grade unkalibrisch ist.

Die Fadenlänge a, mit welcher kalibriert wird, sei in 100 teilbar, also $n = 100/a$ eine ganze Zahl. Der Faden wird folgeweise auf die Strecken von nahe 0 bis a, a bis $2a$ usw. gelegt; er nehme die Anzahl Teilstriche ein:

	$a + \delta_1$	$a + \delta_2$ ·······	$a + \delta_n$	usw.
auf der Strecke	0 bis a	a bis $2a$ ···	$(n-1)a$ bis 100.	

Der Nullpunkt liege bei dem T.-Str. p_0, der 100°-Punkt bei $100+p_1$ (man nennt $(p_0-p_1)/100$ die Gradwert-Korrektion). δ_1 δ_2 ... sowie p_0 und p_1 sind also kleine, positive oder negative Zahlen, in Skalenteilen und deren Bruchteilen ausgedrückt. Setzen wir nun zur Abkürzung

$$s = \frac{1}{n} \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n),$$

(die Summe der δ nur zwischen 0 und 100 genommen!) so ist

für den Teilstrich	die Korrektion
0	$-p_0$
a	$s - p_0 - \delta_1$
$2a$	$2s - p_0 - \delta_1 - \delta_2$
.	. . . .
ma	$ms - p_0 - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_m$.

Oder auch: für den Teilstrich ma ist die Korrektion Δ_m, wenn Δ_{m-1} diejenige für den Teilstrich $(m-1)a$ war,

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m.$$

Die unter „Korrektion" enthaltenen Größen geben also, der danebenstehenden Ablesung hinzugefügt, resp. wenn negativ von ihr abgezogen, den Stand, welchen das Thermometer mit richtigem Kaliber, Nullpunkt und Siedepunkt zeigen würde. Vgl. aber noch **40** VI u. Tab. 16.

Für die zwischenliegenden Grade interpoliert man eine Tabelle auf gewöhnlichem Wege, am besten graphisch (**6**).

Beweis. Der Faden, $n$mal aneinandergelegt, nimmt das Volumen von Teilstrich 0 bis 100, vermehrt um $\delta_1 + \cdots + \delta_n$ ein. Da aber 0° bei p_0, 100° bei $100+p_1$ liegt, also der Vermehrung des Quecksilbervolumens von Teilstrich 0 und 100 eine Temperaturzunahme von $100+p_0-p_1$ Graden entspricht, so bedeutet das Volumen des Fadens die Temperaturzunahme

$$1/n \cdot (100 + p_0 - p_1 + \delta_1 + \cdots + \delta_n) = a + s \text{ (s. oben).}$$

Also entspricht einem Steigen des Quecksilbers

vom T.-Str. 0 bis a die Temperatur-Zunahme $a + s - \delta_1$,

„ „ a „ $2a$ „ „ „ $a + s - \delta_2$ usw.

oder vom T.-Str. 0 die Temperatur-Zunahme

bis a	$a +$	$s - \delta_1$
„ $2a$	$2a +$	$2s - \delta_1 - \delta_2$
. .	. .	. . . . . .
„ ma	$ma +$	$ms - \delta_1 - \delta_2 - \cdots - \delta_m$.

Die Ausdrücke hinter dem Strich würden die Thermometer-Korrektionen sein, wenn der T.-Str 0 richtig wäre. Da ihm die Temperatur $-p_0$ entspricht, so ist überall noch p_0 abzuziehen.

Beispiel. Ein Thermometer für höhere Temperaturen soll, was für gewöhnliche Zwecke genügt, von 50° zu 50° kalibriert werden; also $n = 100 : 50 = 2$. Ein Faden nahm die Strecken ein

von T.-Str.	0,0	bis	50,9	$\delta_1 = +0,9$
	50,0	„	100,4	$\delta_2 = +0,4$
	100,1	„	150,8	$\delta_3 = +0,2$
	149,8	„	199,6	$\delta_4 = -0,2$ usw.

Der Eispunkt war auf T.-Str. $+0,6$, die Temperatur 100° auf T.-Str 99,7 gefunden; also $p_0 = +0,6$, $p_1 = -0,3$ und

$$s = 1/n \cdot (p_0 - p_1 + \delta_1 + \delta_2) = \tfrac{1}{2}(+0,6 + 0,3 + 0,9 + 0,4) = +1,1.$$

Also für Teilstrich	beträgt die Korrektion	
0	$-0,6$	$= -0,6$
50	$1,1 - 0,6 - 0,9$	$= -0,4$
100	$2,2 - 0,6 - 0,9 - 0,4$	$= +0,3$
150	$3,3 - 0,6 - 0,9 - 0,4 - 0,2$	$= +1,2$
200	$+1,2 + 1,1 + 0,2$	$= +2,5$ usw.

Die für 100 berechnete Korrektion liefert teilweise eine Probe der Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer mit größeren Korrektionen. Die obige Anweisung setzt voraus, daß das Thermometer nicht etwa in hohem Grade unkalibrisch ist. Denn es wurde nicht berücksichtigt, daß $\delta_1\ \delta_2 \ldots$ eigentlich nicht Temperaturgrade, sondern Skalenteile bedeuten; auch nicht, daß manche Strecken von dem Faden nicht bedeckt oder doppelt bedeckt waren. Je unrichtiger das Thermometer ist, desto weniger sind die Vereinfachungen gestattet.

Es wird meist genügen, in einem solchen Falle so zu verfahren: Man wählt einen Faden, der, $n$mal aneinander gelegt, die Strecke vom Eispunkt bis zum Siedepunkt nahe ausfüllen würde, und beobachtet ihn, von dem Eispunkt anfangend, in solchen Lagen, daß die nächste sich der vorigen anschließt. Dann rechnet man gerade so wie vorhin. Die Korrektionen gelten aber nicht genau für die Teilstriche 0, a, $2a$ etc., sondern für die ihnen benachbarten Grenzpunkte der Teilstrecken. Eine handliche Korrektionstabelle wird graphisch abgeleitet.

Kalibrierung durch mehrere abgelöste Fäden. Der Faden von der Länge a läßt sich durch mehrere längere Fäden ersetzen, die verschiedene Vielfache von a sind. Durch den Faden ka kann man das Volumen 0 bis a mit ka bis $(k+1)a$ vergleichen, indem man ihn zwischen 0 und ka und zwischen

a und $(k+1)a$ bringt usw.; denn das Volumen, welches bei der Verschiebung auf der einen Seite frei wird, ist gleich dem auf der anderen Seite neu eingenommenen.

Um aber alle Teile auf dasselbe Maß zurückzuführen, müssen mehrere Fäden genommen werden, z. B. von der Länge $2a$ und $3a$. Mit denselben führt man die zu vergleichenden Volumina alle auf möglichst kurzem Wege auf ein und dasselbe Vergleichsintervall zurück, z. B. auf das mittelste. Ein Beispiel wird genügen.

Beispiel. Die Strecke 0 bis 100 soll von 20 zu 20° mittels zweier Fäden von 40° und 60° Länge kalibriert werden. Als Vergleichsintervall betrachten wir die Strecke 40 bis 60, reduzieren also die Beobachtungen auf die Zahlen, welche ein Faden F geliefert haben würde, der das Volumen von T.-Str. 40 bis 60 gerade ausfüllt. Nach früherer Bezeichnung (S. 158) ist also $\delta_3 = 0$.

Der 40°-Faden reiche von T.-Str. $+0,3$ bis 40,0 20,7 bis 60,0. Der Faden F würde also gereicht haben von T.-Str. $+0,3$ bis 20,7; also $\delta_1 = +0,4$.

Ebenso führt man durch Beobachtung von 40 bis 80 und 60 bis 100 die Strecke 80 bis 100 auf F zurück. Man finde $\delta_5 = -0,7$.

Dann legen wir einen 60°-Faden zwischen 0 und 60, sowie 20 und 80. Dadurch wird 60 bis 80 auf 0 bis 20 reduziert, und da letzteres bereits mit 40 bis 60 verglichen worden ist, auch auf den Faden F. Die eingenommenen Strecken seien T.-Str. 0,0 bis 60,2 und 20,0 bis 79,6; so ist 0 bis 20 gleich 60,2 bis 79,6. Der Faden F aber ist um 0,4 länger als 0 bis 20, würde also von 60,2 bis 80,0 gereicht haben; also $\delta_4 = -0,2$.

Endlich sei ebenso durch Beobachtungen zwischen 20 bis 80 und 40 bis 100 gefunden $\delta_2 = +0,3$.

Ferner sei $p_0 = +0,1$, $p_1 = +0,8$, die Anzahl der Teilstrecken zwischen 0 und 100 ist $n = 5$, also (S. 160)

$$s = \tfrac{1}{5}(+0,1 - 0,8 + 0,4 + 0,3 + 0,0 - 0,2 - 0,7) = -0,18.$$

Die Korrektionstabelle wird unter Benutzung der Formel S. 160

$$\Delta_m = \Delta_{m-1} + s - \delta_m$$

Teilstrich	Korrektion
0	$-0,10$
20	$-0,10 - 0,18 - 0,4 = -0,68$
40	$-0,68 - 0,18 - 0,3 = -1,16$
60	$-1,16 - 0,18 + 0,0 = -1,34$
80	$-1,34 - 0,18 + 0,2 = -1,32$
100	$-1,32 - 0,18 + 0,7 = -0,80.$

Die letzte Zahl ist eine Probe für die Richtigkeit der Rechnung.

Thermometer für Kalorimeter. Bei diesen kommt höchstens die Strecke 11° bis 28° in Betracht. Um diese einfach zu erhalten, be-

stimmt man an einem Normalthermometer mit Fäden von 50° bez. 33,3°, deren Länge durch zwei-, bez. dreimaliges Ansetzen zwischen 0 und 100 ermittelt ist, die Punkte 50, 33,3 und 16,7°. Mit diesen Punkten wird dann das kalorimetrische Thermometer im Bade verglichen. Durch einen Faden von 11,1° ermittelt man an ihm selbst noch die Punkte 11,1, 22,2 und 27,8. Die meisten kalorimetrischen Versuche kann man so leiten, daß die Temperaturen den eben bestimmten Punkten nahe liegen.

Über feinere Kalibrierungsmethoden vgl. z. B. v. Oettingen, Über die Korrektion des Thermometers, Dorpat 1865; Thiesen, Carl Rep. 15, 285. 1879; Marek, ib. S. 300.

Vergleichung zweier Thermometer. Die gewöhnliche Rektifikation eines Thermometers geschieht durch Vergleichung mit einem Normalthermometer. Beide Instrumente werden, die Kugeln dicht nebeneinander, in ein Bad, und zwar wenn die Temperatur von der Umgebung abweicht, in ein reichlich großes Bad gebracht, welches mit Filz und Deckel gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist. Den Gang der Temperatur eliminiert man durch Wiederholung jeder Gruppe von Ablesungen in umgekehrter Reihenfolge. Vor jeder Ablesung wird gerührt. In hohen Temperaturen ist anzuraten, daß ein Beobachter die Ablesungen in regelmäßiger Reihenfolge nach der Uhr macht und ein zweiter, der zugleich beständig rührt, sie aufschreibt.

Schema:	Therm. A	68,43	68,47	68,49	68,50
	„ B		67,92	67,94	67,96
	Mittel A		68,45	68,48	68,49
	Also $A-B=$		+0,53	+0,54	+0,53

42. Gas- oder Luftthermometer.

Die jetzt allgemein angenommene Temperaturskale ist dadurch definiert, daß ein vollkommenes Gas auf jeden Grad Temperaturzuwachs bei konstantem Druck eine gleiche Volumzunahme oder bei konstantem Volumen eine gleiche Druckzunahme erfährt. Das Ansteigen beträgt je 1/273 des für 0° geltenden Betrages Vgl. S. 78 u. 161. Als Normalgas gilt bis jetzt Wasserstoff In hoher Temperatur bereitet die starke Diffusion und chemische Aktivität des Wasserstoffs Schwierigkeiten, so daß man dann auf ein anderes Gas angewiesen ist; gebräuchlich ist Stickstoff. Voraussichtlich wird Helium allgemein brauchbar sein, welches zugleich den Vorteil bietet, daß es als einatomiges Gas von dem Verdachte etwaiger Dissoziation frei ist.

Um alle Verhältnisse festzulegen, ist als Normalgas Wasserstoff von 1000 mm Druck bei 0° vereinbart worden; andere Dichtigkeit hat übrigens keinen sicher nachweisbaren Einfluß. Der Unterschied der Angaben

von Wasserstoff ($\alpha = 0{,}003668$) und Stickstoff ($\alpha = 0{,}003675$ zwischen 0° und 100° für $p_0 = 1000$ mm) beträgt zwischen 0 und 100 höchstens 0,01°. In tiefer Temperatur wächst er, erreicht aber selbst bei — 190° (siedende Luft) nur etwa 0,5°. Die Helium- und Wasserstoffskale unterscheiden sich hier nur um 0,1°.

Gasthermometer können für konstanten Druck oder in einfacherer Anordnung für konstantes Volumen angeordnet sein. Wasserstoff zeigt dabei keine merklichen Unterschiede. Stickstoff ($p_0 = 1000$ mm) zeigt bei konstantem Druck bei 20° um 0,014°, bei 40° um 0,010° höher als bei konstantem Volumen. — Chappuis, Trav. et Mém. du Bur. intern. des poids et mes. XIII. 1903; daselbst Temp.-Koeffizienten der Ausdehnung und der Spannung für Wasserstoff, Stickstoff, Luft, Kohlensäure.

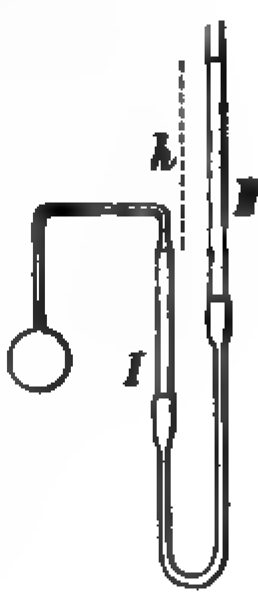
Die Beziehungen zwischen Gas- und Quecksilberthermometer s. in 40 VI.

Gasthermometer mit Druckänderung bei konstantem Volumen.

Wir behandeln nur diese fast immer gebrauchte Anordnung.

Der Druck H ist bestimmt durch die Formel $H_t = H_0(1 + \alpha t)$. Wenn also das auf konstantem Volumen gehaltene Gas bei 0° den Druck H_0 hat, so zeigt der Druck H die Temperatur $t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}$ oder $\frac{1}{\alpha} = 273$ gesetzt, $t = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0} - 273$. Am einfachsten drückt sich die absolute Temperatur $T = 273 + t$ aus, nämlich $T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0}$.

Bei der Messung treten zwei unvermeidliche, mit der Temperatur beschleunigt wachsende Korrektionen auf, nämlich wegen der Gefäßausdehnung und wegen des „schädlichen Raumes", d. h. des nicht mitgeheizten Raumes, der das Meßvolumen mit dem Manometer verbindet. Daß dieser Raum möglichst klein werde, ist besonders für hohe Temperaturen wichtig. Eine Anordnung zu diesem Zwecke von Chappuis zeigt die Figur. Die kurze Einstellspitze sitzt unter einem eingekitteten ebenen Stahldeckel. Die Verbindung mit dem Thermometergefäß geschieht durch eine in den Deckel eingekittete Platinkapillare.



Die einfachste Anordnung (Modell von Jolly) für mäßige Temperaturen besteht in folgendem. Ein mit trockenem Gas gefüllter Glasballon von etwa 50 ccm Inhalt steht durch ein Kapillarrohr mit einer vertikalen Glasröhre I in Verbindung, in welcher die Luft über Quecksilber abgegrenzt wird. Durch die Erhöhung oder Vertiefung des Quecksilberstandes in einem mit I kommunizierenden Rohre II kann man die Oberfläche in I bis zu einer nahe an der Mündung des Kapillarrohres befindlichen Marke (meist eingeschmolzene Glasspitze) „einstellen". Die Verhältnisse sind so zu wählen, daß an Dichtungsstellen oder Kautschukverbindungen das Queck-

silber auch bei den niedrigsten Temperaturen überall unter innerem Überdruck steht, weil anderenfalls leicht Luft einsickert.

Erstes Verfahren. Um irgend einen beobachteten Druck auf die ihm entsprechende Temperatur umrechnen zu können, genügt es, den Druck bei einer bekannten Temperatur bestimmt zu haben. Wir wählen hierzu den Eispunkt. Man umgibt also die Kugel mit schmelzendem Eise (40 I), stellt das Quecksilber ein und beobachtet den Barometerstand b_0 und die Höhe h_0 der Kuppe in II über derjenigen in I. Wir setzen $b_0 + h_0 = H_0$, wo h_0 negativ ist, wenn das Quecksilber in II tiefer steht. Alle b und h werden auf dieselbe Temperatur, z. B. auf 0^0 reduziert (37).

Um eine andere Temperatur zu messen, wird diese der Kugel mitgeteilt, die Luft wieder auf ihr Normalvolumen gebracht und die jetzige Quecksilberhöhe h und der Barometerstand b beobachtet. Dann ist, wenn $b + h = H$ gesetzt wird und α den Gasausdehnungs-Koeffizienten bedeutet, von Korrektionen einstweilen abgesehen,

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0} \quad \text{und} \quad t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}. \qquad 1.$$

Korrektion wegen der Gefäßausdehnung. Der kubische Ausdehnungskoeffizient der Kugel heiße γ. Dann ist

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{H(\alpha - \gamma)}{\alpha H_0 - \gamma H} \quad \text{und} \quad t = \frac{H - H_0}{\alpha H_0 - \gamma H}, \qquad 2.$$

oder nahe

$$T = \frac{1}{\alpha}\frac{H}{H_0}\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}\right) \qquad t = \frac{1}{\alpha}\frac{H - H_0}{H_0}\left(1 + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{H}{H_0}\right).$$

Korrektion wegen des schädlichen Raumes. v sei das Volumen des Gefäßes, v' das Luftvolumen, welches nicht auf die zu messende Temperatur t gebracht werden kann, sondern auf der Zimmertemperatur t' bleibt. Beide Volumina sind durch Auswägen mit Quecksilber oder Wasser bestimmt worden. Ihr Verhältnis sei $v'/v = k$. Dann ist obiger Ausdruck Nr. 2 für t noch zu multiplizieren mit $\frac{1 + \alpha t' + k}{1 + \alpha t' - k\alpha t'}$, oder man rechnet nach Formel 3, unten.

Als Probe der Formel für t dient die Messung der Siedetemperatur des Wassers (Tab. 14a).

Beweis. Die Luftmenge bleibt konstant. Ist v das Volumen des Ballons bei 0°, s_0 die Dichtigkeit der Luft für 0° und 760 mm, so berechnet sich die Luftmenge, wenn wir die Temperatur t' des schädlichen Raumes als konstant annehmen,

bei 0° und H_0 $\qquad$ bei t und H

$$\frac{s_0 H_0}{760}\left(v + \frac{v'}{1+\alpha t'}\right), \qquad \frac{s_0 H}{760}\left(\frac{v(1+\gamma t)}{1+\alpha t} + \frac{v'}{1+\alpha t'}\right).$$

Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke und Multiplikation beider Seiten mit $(1+\alpha t)/v$ kommt

$$H_0(1+\alpha t)\left(1+\frac{k}{1+\alpha t'}\right) = H\left(1+\gamma t + k\frac{1+\alpha t}{1+\alpha t'}\right),$$

oder
$$t\left(\alpha H_0 - \gamma H - k\frac{\alpha}{1+\alpha t'}(H-H_0)\right) = (H-H_0)\left(1+\frac{k}{1+\alpha t'}\right). \quad 3.$$

Hieraus entstehen, wenn man k und γ bez. nur k gleich Null setzt, die Ausdrücke 1 bez. 2. — Die Ausdrücke für T werden aus denen für t leicht durch Addition von $1/\alpha$ gefunden.

Fehlerrechnung. Enthält eine der Größen H, H_0, α usw. einen Fehler ΔH, ΔH_0, $\Delta\alpha$ usw., so wird die berechnete Temperatur t unter Vernachlässigung kleinerer Fehler um einen relativen Betrag fehlerhaft:

$$\frac{\Delta H}{H-H_0}, \quad -\alpha T\frac{\Delta H_0}{H-H_0}, \quad -\frac{\Delta\alpha}{\alpha}, \quad T\Delta\gamma, \quad \alpha T\Delta k, \quad -\alpha^2 Tk\Delta t'.$$

Man sieht, daß die drei letzten, von der Ausdehnung des Gefäßes und von Größe und Temperatur des schädlichen Raumes herrührenden Fehler mit der Höhe der zu messenden Temperatur wachsen. Es muß also in der Pyrometrie der Ausdehnungskoeffizient des Gefäßes, sowie der schädliche Raum und seine Temperatur gut bekannt sein. Bei der Eispunktsbestimmung kommt es hierauf weniger genau an, so daß die der Formel 3 zugrunde liegende Annahme, daß die Temperatur des schädlichen Raumes dieselbe sei, wie bei der anderen Messung, im allgemeinen gestattet sein wird.

Zweites Verfahren. Dieses wird von den Werten für die Ausdehnungskoeffizienten und den schädlichen Raum weniger beeinflußt. Man bestimmt Eispunkt und Siedepunkt des Instrumentes. Werden H_0 und H_1 als Druckhöhen für 0° und für die Temperatur t_1 des siedenden Wassers gefunden, so entspricht einer Druckhöhe H die Temperatur t

$$t = t_1\frac{H-H_0}{H_1-H_0}\left[1-\frac{H_1-H}{H_0}\left(\frac{\gamma}{\alpha}+\frac{k}{1+\alpha t'}\right)\right].$$

Über sehr hohe oder tiefe Temperaturen vgl. noch **43a.**

Über die Behandlung des Luftthermometers s. u. a. Chappuis, Trav. et Mém. du Bur. internat. 6, 1888; 13, 1903; Wiebe und Böttcher, ZS f. Instr. 1890, 16 u. 233; Holborn u. A. Day, Wied. Ann. 68, 187. 1899;

Ann. der Ph. 2, 505. 1900; Travers, Senter u. Jaquerod, Phil. Trans. 200, 105. 1902; Proc. R. S. 70, 464 1902.

43. Elektrische Temperaturmessung.

Diese ist von Bedeutung erstens, wenn die große Masse oder der Umfang eines Quecksilberthermometers hinderlich ist; außerdem in den höchsten und niedrigsten Temperaturen, wo die übrigen einfachen Mittel versagen (43a). Die Empfindlichkeit der elektrischen Methoden kann sehr weit getrieben werden. Fehler aber entstehen leicht durch Thermokräfte in den Leitungen, z. B. zwischen Kupferdrähten und messingnen Klemmen.

I. Thermo-Element (Th. J. Seebeck, 1822).

Benutzt wird die durch Temperaturdifferenz an den Kontaktstellen zweier Metalle auftretende elektromotorische Kraft. Man lötet zwei gleich lange thermoelektrisch wirksame Drähte, für niedere Temperaturen z. B. Eisen und Neusilber, oder noch wirksamer Eisen-Konstantan, für hohe Temperaturen Platin-Platinrhodium (Le Chatelier) aneinander und mit den anderen Enden an Kupferdrähte. Bringt man die erstere Lötstelle an den Punkt, dessen Temperatur gesucht wird, und erhält die beiden anderen Lötstellen zusammen auf einer bekannten Temperatur (etwa durch Eis auf 0°), so entsteht eine elektromotorische Kraft. Diese wird entweder selbst durch Kompensation gegen ein Normalelement (**99** bis **103**) gemessen, oder aus ihrer Proportionalität mit der Stromstärke beurteilt, die sie in einem Galvanometer hervorbringt.

Für kleinere Temperaturdifferenzen kann Proportionalität der Stromstärke mit der Temperaturdifferenz angenommen werden. Man braucht also nur einmal die Stromstärke bei bekannter Differenz zu messen, um aus jeder Beobachtung die Temperatur abzuleiten. Man nimmt ein Spiegelgalvanometer (**83**) von mäßigem Widerstande.

Für größere Differenzen wird empirisch eine Tabelle abgeleitet, indem die Ausschläge für einige Temperaturen beobachtet werden. Hieraus interpoliert man durch Rechnung oder auf graphischem Wege eine Tabelle zum Gebrauch.

Bei den folgenden Thermoelementen beträgt für 1° Temp.-Differenz im Mittel zwischen 0 und 100° die el. Kraft in Mikrovolt (80 I) etwa: Bi-Sb 100; Konstantan-Fe 53; „Patentnickel" (d. h. die Legierung der

deutschen Nickelmünzen)-Fe 45; Konstantan-Cu 40; Ni-Fe 32; Patentnickel-Pt 28; Neusilber-Fe 25; Ni-Cu 22; Pt-Fe 17; 10% Rhod-Pt oder 10% IrPt oder 10% RuPt gegen Pt 5, in höherer Temperatur 10.

Über PtRhod-Pt in hoher Temperatur s. d. Tab. S. 169.

Thermoelemente mit einer von der P. T Reichsanstalt beigegebenen Tabelle ihrer Spannung als Funktion der Temperatur sind im Handel. —

II. Widerstands-Thermometer (Svanberg, Siemens).

Von der Anwendung auf strahlende Wärme stammend wird häufig die Bezeichnung „Bolometer" gebraucht.

Der elektrische Widerstand von Metallen wächst mit der Temperatur, am stärksten bei reinen Metallen. Bei reinem Platin kann der Temperaturkoeffizient (relative Änderung für 1°) 0,0039 erreichen, bei Eisen und bei Nickel 0,006. Wegen der Schärfe und Einfachheit der elektrischen Meßmethoden hat das Verfahren große Vorteile.

Man schaltet den Meßdraht mit einem gleichen Draht oder mit einem gleichen Rheostatenwiderstand in die Wheatstone'sche Brücke oder das Differentialgalvanometer (93 oder 92).

Der Widerstand werde gefunden bei den bekannten Temperaturen t_0 und t_1 (z. B. 0 und 100°) gleich w_0 und w_1, bei einer zu messenden Temperatur t gleich w, dann ist in den Grenzen eines merklich konstanten Temp.-Koeffizienten

$$t = t_0 + (t_1 - t_0) \cdot (w - w_0)/(w_1 - w_0).$$

Für weitere Grenzen bestimme man zunächst bei den bekannten Temperaturen t_0 t_1 t_2 die Widerstände w_0 w_1 w_2. Schreiben wir

$$w_1 - w_0 = \gamma_1 \quad w_2 - w_0 = \gamma_2 \quad t_1 - t_0 = \tau_1 \quad t_2 - t_0 = \tau_2 \text{ und}$$

$$a = \frac{\tau_1 \gamma_2^2 - \tau_2 \gamma_1^2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)} \qquad b = \frac{\tau_2 \gamma_1 - \tau_1 \gamma_2}{\gamma_1 \gamma_2 (\gamma_2 - \gamma_1)},$$

so bedeutet der Widerstand w die Temperatur

$$t = t_0 + a(w - w_0) + b(w - w_0)^2.$$

In noch weiteren Grenzen, wenn auch diese Formel nicht genügt, stellt man durch Beobachtung bei einer Anzahl von Temperaturen die letzteren als Funktion der Widerstände in einer Kurve dar, welcher die zu irgend einem Widerstande gehörige Temperatur entnommen werden kann (6).

Wenn die Temperatur t_v eines Vergleichsdrahtes aus demselben Material wie der Meßdraht wenig schwankt, so zählt man am einfachsten alle Temperaturen stets von dem gleich-

zeitig geltenden t_e an und addiert zum Schluß t_e zu den so berechneten Temperaturen. Den jedesmaligen Widerstand des Vergleichsdrahtes nimmt man als Einheit an.

Für das Temperaturbad kann bei kleinen Widerständen und kleinen Stromstärken, wenn Platin gebraucht wird, reines Wasser dienen. Sicherer ist eine nicht leitende Flüssigkeit (Petroleum). Schwach werden die Ströme schon zu dem Zwecke genommen, Stromwärme zu vermeiden, welche besonders bei unsymmetrischen Verhältnissen beider Drähte Fehler bringt.

Die Meßwiderstände werden z. B. auf Glimmerplättchen aufgewickelt; besonders geringe Trägheit bietet dünner Platindraht in feiner Kapillarröhre. Zuleitungsdrähte nimmt man, soweit sie mit erwärmt werden, am besten aus demselben Metall, nur dicker.

S. u. a. Jaeger u. v. Steinwehr, Verh. d. D. Phys. Ges. 5, 353 1903. Hohe Temperaturen s. 43a, Wärmestrahlung 72a.

43a. Messung hoher und tiefer Temperaturen; Pyrometrie.

Siehe auch die auf Messung von Schallwellenlängen (56 III) und Lichtwellenlängen (68a) beruhenden Methoden

I. Luft-Pyrometer.

Hierüber vgl. 42, besonders auch das über Wasserstoff, schädlichen Raum und Gefäß-Ausdehnung Gesagte.

Elektrische Heizung s. 8, 29

Für Gefäße mit Stickstoff als Meßgas ist verwendbar bis 500° Jenaer Glas 59, bis 1100° innen und außen glasiertes Porzellan. Höher hinauf ist Innenglasur wegen Verdampfung unzulässig, Außenglasur wird durch Überdruck von innen leicht durchbrochen. Außenglasierte Gefäße, bis etwa 1400° brauchbar, sind daher unter äußerem Überdruck zu halten.

Den genannten Stoffen ist Platin oder Platiniridium (vielleicht bis 1700° brauchbar) überlegen, falls jede Art von Heizgasen ausgeschlossen wird. Iridium reicht bis 2000°. Quarzglas hat den Vorzug kleiner Eigenausdehnung; in höherer Temperatur ist es für Wasserstoff ebenfalls durchlässig.

Die Temperatur des schädlichen Raumes kann mit einem längs der Kapillare verschiebbaren Thermoelement bestimmt werden. Läßt ein größerer schädlicher Raum sich nicht vermeiden, so verwendet man vorteilhaft einen Kompensator, d. h. ein Luftthermometer ohne Ballon (Deville und Troost), welches dicht neben dem eigentlichen Thermometer im gleichen Raume geheizt wird. Die Angaben dieses Hilfsthermometers sind dann stets von denen des Hauptthermometers abzuziehen.

Verdrängungsverfahren (Crafts, V. Meyer). Aus einem Gefäß mit zwei Kapillaren wird die Luft bei der zu messenden Temperatur durch ein Gas (Kohlensäure, Chlorwasserstoff) verdrängt und über einer Flüssigkeit, welche das verdrängende Gas absorbiert, aufgefangen und gemessen. Ist das auf Trockenheit, auf 0° und den atmosphärischen Druck umgerechnete (18) Volumen der ausgetretenen Luft $= v_0$, das Volumen des Gefäßes $= v$, so war die Temperatur des letzteren $= 273\,(v - v_0)/v_0$.

II. Elektrische Pyrometer.

a. Thermoelement (vgl. 43 I).

Besonders ist Platin gegen Platin-Rhodium (10% Rh; Le Chatelier) bis gegen den Schmelzpunkt des Platins brauchbar. Die Legierungen von Pt mit Ir und Ru sind in hoher Temperatur weniger beständig. Man isoliert elektrisch durch ein über den einen Draht geschobenes unglasiertes Porzellan- oder Tonrohr und gegen Flammengase durch ein über das Ganze geschobenes glasiertes Porzellanrohr.

Für die von Heraeus zur Zeit ausgegebenen Elemente PtRh-Pt gilt im Mittel, die eine Lötstelle auf 0°, die andere auf $t°$ C. gehalten:

$t =$	300	400	500	600	700	800	900°
$E =$	2,26	3,19	4,15	5,14	6,17	7,23	8,33 Milli-V

$t =$	1000	1100	1200	1300	1400	1500°
$E =$	9,46	10,63	11,83	13,06	14,33	15,64 Milli-V.

Die Eichung geschieht mit bekannten Schmelz- oder Siedepunkten (Cd, Zn, Ag, Au, Cu, Pd; Tab. 11), bei nicht oxydierenden Metallen am einfachsten durch Einfügung eines 5 mm langen Drahtstücks in die Lötstelle; die thermoelektrische Kraft im letzten Augenblick vor dem Durchschmelzen wird beobachtet. Oxydierbare Metalle schmelzt man besser im Tiegel und steckt die heiße Lötstelle isoliert hinein. Bei Silber und Kupfer ist der Einfluß des Sauerstoffs der Luft zu beachten, der die Schmelztemperatur um 8° bez. 20° erniedrigen kann. Vgl. auch 45.

b. Widerstand (vgl. 43 II).

„Platintemperatur" t_p nennt man wohl (Callendar) den Ausdruck $t_p = 100\,(w_t - w_0)/(w_{100} - w_0)$, wenn w_0, w_{100}, w_t den Widerstand bei 0, 100 und t bedeuten. Gegen die wirkliche Temperatur t besteht, bis 1000° geprüft, die Differenz

$$t - t_p = \delta\left[\left(\frac{t}{100}\right)^2 - \frac{t}{100}\right].$$

δ wird durch eine Beobachtung in bekannter höherer Temperatur (siedender Schwefel 445°, schmelzendes Zink 419°; Tab. 11) bestimmt. Für reines Platin wird $\delta = 1{,}5°$ angegeben; die Differenz ist also in hoher Temperatur beträchtlich.

Widerstandsänderungen der Zuleitung können durch eine entsprechende Drahtschleife im anderen Brückenzweig oder dadurch eliminiert werden, daß der Widerstand durch eine Spannungsmessung bestimmt wird (**91** II, **101**, **103**).

Als Widerstand kommt nur reines Platin in Frage.

Der Draht wird so angeordnet, z. B durch Aufwickeln auf ein Glimmerkreuz, daß er sich möglichst frei in der Luft befindet. Der Verwendbarkeit setzt die Abnahme der Isolation aller bekannten Körper und die Sublimation des Platins eine Grenze (etwa 1200°). Flammengase ändern den Widerstand dauernd; sie müssen durch glasierte Porzellanröhren ferngehalten werden.

III. Optische Pyrometer.

Man bestimmt die Temperatur glühender Körper, indem man einen homogenen Teil ihrer Strahlung unter Benutzung eines konstanten Vergleichslichts photometriert (E. Becquerel). Das Verfahren ist empfindlich, weil die Helligkeit mit der Temperatur sehr stark wächst. Vgl. **72** u. **72a**.

Pyrometer von Wanner. Zur Messung dient ein König'sches Spektralphotometer (**72** V), dessen Okularblende auf die Wellenlänge 0,656 μ der roten Wasserstofflinie eingestellt ist. Die konstante Lichtquelle besteht aus einer durch eine Glühlampe von 6 V beleuchteten mattierten Prismenfläche, deren Helligkeit zeitweilig bei derselben Stellung des Okularnicols mit einer durch eine Amylacetatlampe (**72** I 1) beleuchteten Mattscheibe verglichen und durch Änderung eines Regulierwiderstandes konstant gehalten wird. Bei der Photometrie einer zu messenden Strahlung stellt man beide Hälften des Gesichtsfeldes durch Drehung des Okularnicols auf gleiche Helligkeit ein. Für die an einem Teilkreis abgelesenen Drehungswinkel gibt eine Eichtabelle die Temperaturen. Strahlungen unter 1000° sind zu lichtschwach für den Apparat.

Pyrometer von Holborn und Kurlbaum. Hier wird ein veränderliches Vergleichslicht benutzt, und zwar eine Glühlampe von 4 V,

deren Helligkeit durch Widerstandsänderung ihres Stromkreises so reguliert wird, daß die Spitze ihres Kohlenbügels auf der zu photometrierenden glühenden Fläche verschwindet. Das Glühlämpchen befindet sich in einem Fernrohr, dessen Objektiv ein Bild der glühenden Fläche entwirft, während das Okular scharf auf den Kohlenbügel eingestellt ist; homogenes Licht wird durch ein dem Okular vorgeschobenes Kupferoxydulglas (0,64 μ) erzielt. Als Kriterium der Lampentemperatur gilt ihre an einem eingeschalteten Strommesser abgelesene Stromstärke. Das Instrument ist für Temperaturen von 600° aufwärts brauchbar.

Eichung der optischen Pyrometer. Als Norm dient die Strahlung eines schwarzen Körpers (**72a**), dessen Temperatur mit einem Thermoelement gemessen wird. Es ist nun zu beachten, daß ein auf diese Weise geeichtes Pyrometer nur bei der Messung von schwarzen Strahlungen wahre Temperaturen (in der Celsius-Skale) liefert, an einem Körper mit geringerem Strahlungsvermögen dagegen kleinere Werte, die man die schwarze Temperatur des Körpers nennt. Dies ist diejenige Temperatur, die der schwarze Körper besitzen muß, um für die beobachtete Wellenlänge die gemessene Helligkeit auszustrahlen.

Am meisten unterscheidet sich die schwarze Temperatur von der wahren bei Flächen mit starkem Reflexions-, also geringem Strahlungsvermögen, z. B. blanken Metallflächen. Für blankes Platin steigt der Unterschied, der in dunkler Rotglut nur einige Grad beträgt, merklich linear an; bei 1500° beträgt er für rotes Licht etwa 150°.

Die Beobachtung der gleichmäßig glühenden Innenfläche eines Ofens durch eine mäßig große Öffnung liefert nahe die richtige Temperatur.

Ist die zu messende Strahlung heller als das Vergleichslicht, so wird sie durch Reflexion an Glasflächen oder durch Absorption mit Rauchgläsern geschwächt. Die Temperatur der in bekanntem Verhältnis geschwächten Strahlung wird nach der Wien-Planck'schen Formel berechnet (**72a** III). Bei den obengenannten Pyrometern greift man zu diesem Mittel, wenn die zu messende Temperatur über 1500 bis 2000°, die Temperatur der normal brennenden Glühlampe, hinausgeht.

Das Schwächungsverhältnis φ kann mit dem optischen Pyrometer selbst bestimmt werden. Wird eine noch ungeschwächt zu messende schwarze Strahlung von der Temperatur t_1 durch

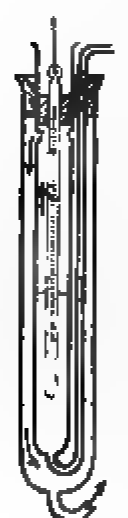
die Schwächung scheinbar auf die Temperatur t_2 heruntergedrückt, so ist für die benutzte, in μ ausgedrückte Wellenlänge λ

$$\log \text{nat}\, \varphi = \frac{14500}{\lambda} \frac{t_1 - t_2}{(t_1 + 273)(t_2 + 273)}.$$

Lit. zu Pyrometrie. Barus, physik. Behandl. u. Mess. hoher Temp., Leipzig 1892 (enthält eine vollständige Übersicht und die damalige Literatur). — Über Luftthermometer und besonders Thermoelemente: Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. 47, 107. 1892; Holb. u. A. Day, ib. 68, 817. 1899; Ann. der Ph. 2, 505. 1900. — Über Widerstandspyrometer: Callendar, Phil. Trans 178, 161. 1887; 182, 119. 1891; Ph. Mag. (5) 48, 519. 1899; Chappuis u. Harker, Trav. et Mém. du Bureau internat. 12, 1900; Phil. Trans. A. 194, 37. 1900; Harker, Proc. R. S. 78, 217. 1904. — Über optische Pyrometer: Wanner, Phys. ZS 3, 112. 1901; Holborn u. Kurlbaum, Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1901, 712; Ann. der Ph. 10, 225. 1903. — Ferner Lummer, Interferenz-Photo- u. Pyrometer, Verh. d. D. Phys. Ges. 1901, 131. — Eine optische Temperaturmessung mit dem Interferenzrefraktor s. **68a**.

IV. Tiefe Temperaturen.

Die Grundlage der Messung bildet das mit Wasserstoff oder Helium gefüllte Gasthermometer (**42**). Von Flüssigkeiten bleiben flüssig bis etwa — 100° Alkohol oder besser Toluol; bis zur siedenden Luft abwärts bleibt der durch Fraktionieren auf etwa 15° Siedepunkt rektifizierte Petroläther oder besser „technisches Pentan" hinreichend beweglich. Man taucht anfangs nur die Thermometerkugel ein, so daß die Flüssigkeitssäule im Rohr nicht zähe wird, ehe sie ihrem tiefsten Stand nahe gekommen ist. Vgl. z. B. Holborn u. Wien, Wied. Ann. 59, 213. 1896; F. K., ib. 60, 463. 1897; Rothe, ZS f. Instr. 1904, 47.



Zur Prüfung tiefer Skalenpunkte kann z. B. feste Kohlensäure (— 78,2°), Sauerstoff (— 182,8°) oder Stickstoff (— 195,7°) dienen. Über andere verflüssigte Gase s. Tab. 12a. Sauerstoff entwickelt man aus chlorsaurem Kali und kondensiert ihn im Bade von flüssiger Luft. Das Kondensiergefäß kann nach Umhüllen mit einem engen, außen etwa noch durch einen schlechten Wärmeleiter geschützten Mantelrohr (Fig.) später als Siedegefäß dienen, wobei der entweichende Sauerstoff einen Temperaturschutz bildet. Stetiges Sieden erreicht man durch Einleiten von Sauerstoffgas.

Als Messungsmittel kommen hauptsächlich in Betracht das Thermoelement Konstantan-Eisen oder Konstantan-Kupfer (PtRh-Pt wird in der Kälte unempfindlich), die obengenannten Flüssigkeits-

Thermometer und der Platinwiderstand. Unterhalb — 100° trifft die Formel unter IIb nicht mehr zu.

Vgl. hierüber Holborn, Ann. der Ph. 6, 242. 1901 und bis zum Siedepunkt des Wasserstoffs (— 252°) Dewar, Proc. R. S. 76, 244. 1904; ebenda auch über Au, Ag, Cu, Pd, Ni.

Die Temperatur siedender flüssiger Luft läßt sich mit Schwimmern aus Duraxglas oder Quarz nach der Dichte beurteilen, die, zwischen 0,791 (N) und 1,131 (O) liegend, das Mischungsverhältnis und also auch den Siedepunkt bestimmt. Behn u. Kiebitz, Ann. der Ph. 12, 421. 1903.

44. Wärme-Ausdehnungskoeffizient.

Linearen Ausdehnungskoeffizienten β eines festen Körpers nennt man die Verlängerung seiner Längeneinheit, kubischen oder Volum-Ausdehnungskoeffizienten 3β (vgl. S. 29) die Volumzunahme seiner Volumeinheit bei der Temperaturerhöhung um 1°.

Wird eine Länge l oder ein Volumen v um t Grad erwärmt, so sind die neuen Größen also

$$L = l(1 + \beta t) \qquad V = v(1 + 3\beta t).$$

Der (Volum-) A.-K α einer Flüssigkeit nimmt, vom Quecksilber abgesehen, mit wachsender Temperatur stark zu. Wächst bei der Erwärmung von t auf t' ein Volumen v zu v', so nennt man $\alpha = (1/v)(v' - v)/(t' - t)$ den mittleren A.-K. von t auf t'.

I. Durch Längenmessung.

Wenn ein Stab von der Länge l sich bei der Temperaturerhöhung t um λ verlängert, so ist $\beta = \lambda/lt$.

Die Verlängerungen können mit dem Komparator (21) gemessen werden. Gewöhnlich werden die geringen Ausdehnungen auf einen Kontakthebel übertragen. r sei der Abstand des Kontaktpunktes von der Drehaxe, φ der Drehungswinkel, dann ist $\lambda = r \sin\varphi$, vorausgesetzt, daß bei einer der beiden Temperaturen der Hebelarm zur Stabrichtung senkrecht ist.

Der Drehungswinkel wird mit Spiegel und Skale (z. B. Anordnung von Edelmann) gemessen. Man stellt den Faden des Fernrohrs auf den Fußpunkt der vom Spiegel S auf die Skale gefällten Senkrechten



ein, deren Länge $= A$ Sk.-T. sei. Der Ausschlag durch die Temperaturänderung betrage e Skalenteile, dann ist (25) $e/A = \mathrm{tg}\, 2\varphi$.

Für ein kleines φ kann man setzen $\sin\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\varphi$, also ist in diesem Falle $\lambda = \frac{e}{2}\frac{r}{A}$. Vgl. auch das Beispiel in 3.

Größeren Temperaturunterschieden ist die Ausdehnung nicht mehr genau proportional. Man pflegt dann die Länge bei der Temperatur t auszudrücken als

$$l = l_0(1 + \beta t + \beta' t^2)$$

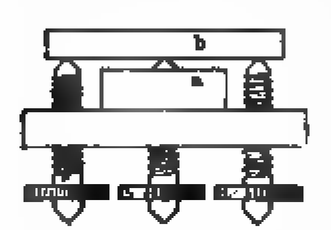
und bestimmt die beiden Koeffizienten β und β' aus mindestens drei Beobachtungen. Vgl. 3.

Zur Messung in hoher Temperatur erhitzt man den Stab ($\frac{1}{2}$ m lang) in einem längeren Porzellanrohr elektrisch (8, 29). Durch zwei feststehende Mikroskope mit Okularmikrometern werden kurze Teilungen an den Stabenden anvisiert; die Temperatur wird längs des Stabes mit einem Thermoelement abgetastet.

Vgl. Holborn u. Day, Ann. der Ph. 2, 505. 1900; 4, 104. 1901.

II. Durch Lichtinterferenz (Fizeau 1868).

Die Ausdehnung wird in Lichtwellenlängen gemessen; man untersucht Platten von mäßiger Dicke, welche zwei parallele Flächen haben, von denen die obere a poliert sein muß. Diese liegt auf einer von Stahlschrauben getragenen Stahlplatte und



verschiebt sich bei der Ausdehnung nach einer fast parallelen, in kleinem Abstande darüber befindlichen ebenfalls planen Unterfläche b einer Glasplatte hin. Homogenes Licht, welches an a und b gespiegelt wird, erscheint dem darüber befindlichen Auge mit Newton'schen Interferenzstreifen, welche sich bei der Verkürzung der Zwischenschicht um p Wellenlängen um $2p$ Streifenbreiten verschieben. Die Verschiebung wird mikroskopisch an Marken auf der Unterfläche der Deckplatte gemessen.

Natriumlicht ist wegen seiner zweifachen Wellenlänge, welche die Streifen periodisch undeutlich macht, nicht bei allen Distanzen anwendbar. Das brauchbarste Licht liefert eine längsdurchsichtige Geißler'sche Röhre (**59a**) mit Wasserstoff und etwas Quecksilber. Neben den Wasserstofflinien $H\alpha$ ($10^6\lambda = 656{,}3$ mm) und $H\beta$ (486,1) entstehen beim Anwärmen die Quecksilberlinien, von denen besonders die grüne (546,1) und die blaue (435,8) bei

sehr großen Gangunterschieden noch scharfe Interferenzen zeigen. Weitere Wellenlängen siehe in Tab. 23.

Die Änderung der Wellenlänge in der Luftschicht durch die Erwärmung und etwa durch Luftdruck-Schwankungen wird nach den Sätzen in Rechnung gezogen: 1) Wenn λ_0 und λ die Wellenlängen im Vakuum und in einem Mittel vom Brechungsverhältnis n (aus Vak.) bedeuten, so ist $\lambda = \lambda_0/n$, und 2) In einem Gase wächst $n - 1$ der Dichtigkeit proportional. Eine Formel für Luft s. Tab. 23.

Die Ausdehnung der Stahlschrauben, welche die obere Platte tragen, muß bekannt sein und in Rechnung gesetzt werden. Man bestimmt sie nach der nämlichen Methode, entweder an der polierten Fläche des Stahl-Tischchens selbst oder mit Hilfe einer darauf gelegten Quarzplatte.

Anstatt der Stahlschrauben kann ein hohler Quarzcylinder (Zeiß'sche Werkstätte) dienen, dessen Ausdehnung (s. unten) zuverlässig bekannt ist. Mit je drei vorragenden Punkten ruht er auf einer Bodenplatte und trägt die Deckplatte Der ebenfalls auf der Bodenplatte stehende zu untersuchende Körper wird vorteilhaft von einer Höhe gewählt, welche die Höhe des Quarzcylinders fast erreicht. Die wirkliche Ausdehnung des Körpers ist gleich der bekannten des Quarzcylinders, vermehrt oder vermindert um die aus der Verschiebung der Streifen sich ergebende Differenz beider Ausdehnungen.

Einen Körper ohne spiegelnde Fläche kann man untersuchen, wenn man auf ihm eine spiegelnde dünne Platte von bekannter Ausdehnung (Quarz) befestigt hat.

Der Ausd.-K. des Quarzes für die Temperatur t zwischen 0 und 100° ist in der Richtung der Axe $= 0{,}0_4 0716 + 0{,}0_7 080 \cdot t$ nach Benoît,
$= 0{,}0_4 0714 + 0{,}0_7 082 \cdot t$ nach Scheel,
senkrecht dazu $= 0{,}0_4 1325 + 0{,}0_7 116 \cdot t$ nach Benoît.

Fizeau, Pogg. Ann. 119, 87. 1863; 123, 515. 1864; 128, 564. 1866. Benoît, Trav. et Mém. du Bur. internat. I 1881 u. VI. 1888; Scheel, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. IV, 33. 1904; Pulfrich, ZS f. Instr. 1893, 365, 401 u. 437; vgl. besonders daselbst auch die Bemerkungen über die Ermittelung der gewanderten Streifenzahl durch gleichzeitige Messungen an mehreren Wellenlängen und über die Korrektionen wegen der schwankenden Luftdichtigkeit. — Vgl. auch 65 IV.

III. Durch Wägung.

Mit Quecksilber. Oft liegt für Glassorten das Bedürfnis einer Kenntnis des Ausdehnungskoeffizienten vor. Ein kleiner Ballon wird in eine Spitze ausgezogen, oder besser, es wird, damit das Quecksilber glatt abreißt, sein abgeschmolzenes und in der Flamme abgerundetes Ende bis zu einer feinen Öffnung abgeschliffen.

Dann wägt man ihn bei zwei Temperaturen, z. B. 0 und 100°, ganz mit Quecksilber gefüllt; 8, 1 u. 23. Zur Füllung taucht man die Spitze des vorher erwärmten Ballons in Quecksilber; beim Erkalten wird Quecksilber eingesaugt. Dies wiederholt man, indem zuletzt das Quecksilber zum Sieden gebracht wird, bis zur vollständigen Füllung. Endlich läßt man den Ballon unter Quecksilber bis zu einer niedrigen Temperatur t abkühlen Die Wägung des so ganz gefüllten Ballons ergebe das Nettogewicht p des Quecksilbers. Alsdann erwärmt man bis zur Temperatur t', wobei Quecksilber ausfließt, und bestimmt wieder das Gewicht p'. Dann berechnet sich der kubische Ausd.-Koeffizient des Glases

$$3\beta = 0{,}000182\,\frac{p'}{p} - \frac{1}{t'-t}\,\frac{p-p'}{p}.$$

Beweis s. folg. S.

Mit Wasser. Wägt man bei zwei Temperaturen t und t' mit luftfreiem Wasser, so ist

$$3\beta = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\frac{Q}{Q'} - 1\right) \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{t'-t}\left(\frac{p'}{p}\frac{v'}{v} - 1\right),$$

wo die Dichtigkeiten Q und Q' oder die Volumina des Wassers v und v' zu t und t' aus Tab. 4 oder 5 genommen werden.

Um 100° herum hat im Verhältnis zu 4° das Wasser das Volumen $1{,}04343 + 0{,}00078\,(t - 100)$.

Weil die Ausdehnung des Quecksilbers und in höherer Temperatur mehr noch die des Wassers die Ausdehnung der festen Körper weit übertrifft, so wird eine sehr genaue Bestimmung der Temperatur verlangt.

Aus Dichtigkeitsbestimmungen. Sind die Dichtigkeiten s und s' eines Körpers für die Temperaturen t und t' bekannt, so ist der Ausdehnungskoeffizient

$$3\beta = \left(\frac{s}{s'} - 1\right)/(t' - t).$$

IV. Ausdehnung von Flüssigkeiten.

1. Konstantes Gefäß. Ein Glasgefäß — mit ausgezogener Spitze oder in der Form der Figuren S. 66 — halte bei der niederen Temperatur t das Flüssigkeitsgewicht p. Dann erwärme man die Flüssigkeit in einem Bade auf die höhere Temperatur t' und bringe sie, etwa durch Austupfen mit Fließpapier, auf denselben Stand im Gefäß. Erkaltet habe das Ganze nun das Gewicht p'. Wenn 3β der kubische Ausdehnungskoeffizient des Glases (s. v. S., Tab. 11 und 8, 5), so ist der mittlere Ausdehnungskoeffizient der Flüssigkeit zwischen t und t' gleich

$$\alpha = 3\beta\frac{p}{p'} + \frac{1}{t'-t}\frac{p-p'}{p'}.$$

Denn wenn v und v' das spezifische Volumen der Flüssigkeit für t und t' bezeichnen, so ist $\alpha = (v'/v - 1)/(t'-t)$ Nun ist offenbar $p'/p = [1 + 3\beta(t'-t)]v/v'$, also $v'/v = p/p' + 3\beta(t'-t)p/p'$, woraus diese Formel und auch die unter III sich leicht ergibt.

2. Auftriebsmethode. Man wäge einen Glaskörper bei zwei Temperaturen t und t' in einer Flüssigkeit. Wenn p und p' die Auftriebe, so gilt dieselbe Formel.

3. Dilatometer. Ein Glasgefäß, nach Art eines Thermometers mit einem angeblasenen engen, geteilten Rohr, wird bis in das Rohr mit der Flüssigkeit gefüllt; man beobachtet die Einstellung der Säule bei den Temperaturen t bez. t'. Sind die abgelesenen Volumina v bez. v', so hat man als mittleren Ausdehnungskoeffizienten

$$\alpha = 3\beta\frac{v'}{v} + \frac{1}{t'-t}\frac{v'-v}{v}.$$

Das Gefäß kalibriert man mit Quecksilber oder Wasser, die Strecken des Rohres mit Quecksilberfäden, die man wägt (vgl. **23** und **24**; auch daselbst das Verfahren beim Einfüllen). Anstatt zu kalibrieren kann man auch zuerst eine Flüssigkeit von bekannter Ausdehnung in dem Apparat untersuchen und daraus die Volumenverhältnisse ableiten. — Sehr geeignet ist auch das Pyknometer Fig. 4 S. 66, wenn die Steigrohre geteilt und kalibriert sind.

Bei Flüssigkeiten von großer Dampfspannung wird man das Verdampfen auch innerhalb des Dilatometers beachten.

4. Kommunizierende Röhren. Wenn eine Flüssigkeitssäule von der Höhe h und der Temperatur t mit einer andern von h' und t' im Gleichgewicht (15 A 6) steht, so ist $1 + \alpha(t' - t) = \frac{h'}{h}$ oder $\alpha = \frac{1}{t' - t} \frac{h' - h}{h}$. Durch ihre Unabhängigkeit von der Glasausdehnung ist die Methode fundamental (Dulong). Sie verlangt aber zur genauen Ausführung große Mittel.

Über Ausführung am Quecksilber vgl. Regnault, Mém. de l'Acad. franç. XXI, 1847; am Wasser Thiesen, Scheel u Diesselhorst, Wied. Ann. 60, 340. 1897; Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III 1. 1900 u. IV 1. 1904.

V. Gase. (Vgl. 18 u. 42.)

Bekannte Zahlen s. Tab. 12a.

1. Druckänderung bei konstantem Volumen (Spannungskoeffizient). Die Messung mit dem Gasthermometer ergibt sich aus 42. Am einfachsten ist sie zwischen 0 und 100°. Wenn zu den Temperaturen 0 und t bei konstantem Volumen die Drucke H_0 und H beobachtet werden, so ist $\alpha = (H - H_0)/H_0 t + \gamma H/H_0$; γ bedeutet den kubischen Ausdehnungskoeffizienten des Gefäßes (vgl. Gl. 2, S. 164). Mit Rücksicht auf den schädlichen Raum von der relativen Größe k und der Temperatur t' wird der vollständige Ausdruck

$$\alpha = \frac{1}{t} \frac{H - H_0}{H_0} \left(1 + k \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'}\right) + \gamma \frac{H}{H_0}.$$

Anstatt diesen vollständig auf α aufzulösen, wird man rechts meist ausreichend genau $(1 + \alpha t)/(1 + \alpha t') = (273 + t)/(273 + t')$ schreiben dürfen.

2. Bei konstantem Druck durch Wägung. Ein Ballon mit abgrenzbarem Volumen (Hahn, ausgezogene zuschmelzbare Spitze) wird mit dem Gase gefüllt zur Temp. t erwärmt, verschlossen, in diesem Zustand unter Quecksilber von der Temperatur t_0 geöffnet, so daß Quecksilber eintritt, und abgesperrt, während das innere und äußere Niveau gleich steht. Das eingetretene Quecksilbergewicht sei $= m'$, während die ganze Füllung mit Quecksilber von derselben Temperatur m betrage. Es werde $m'/m = p$ bezeichnet. Dann ist

$$\alpha = \frac{p + \gamma(t - t_0)}{t - t_0 - pt - \gamma(t - t_0)t_0}.$$

Beweis. Die Dichtigkeiten des Gases bei t_0 und t gleich s_0 und s gesetzt, so daß $(1+\alpha t)/(1+\alpha t_0) = s_0/s$ ist, erhält man $s_0(m - m')/13,6 = s[1+\gamma(t-t_0)]m/13,6$, oder $\frac{s_0}{s} = \frac{1+\alpha t}{1+\alpha t_0} = \frac{1+\gamma(t-t_0)}{1-p}$, woraus der Ausdruck folgt.

3. Bei konstantem Druck mit dem Gasthermometer. Vgl. hierüber Chappuis, Trav. et. Mém. du Bur. internat. XIII, 1903.

45. Schmelzpunkt; Gefrierpunkt.

So heißt die Temperatur, bei welcher feste und flüssige Teile des Körpers nebeneinander bestehen können (Tab. 11 bis 12a) Gemische mehrerer Körper, wie die meisten Fette, Paraffin, Glas, haben im allgemeinen keinen scharfen Schmelzpunkt, sondern ein Temperaturintervall, innerhalb dessen sie erweichen. — Die Temperatur beginnender Erstarrung kann beträchtlich unter dem Schmelzpunkt liegen

Schmelzpunkt eines Körpers. Die Bestimmung wird nach der Natur des Körpers, besonders nach der Höhe des Schmelzpunktes sehr verschieden angeordnet. Z. B. kann man in einem ausgezogenen Glasröhrchen eine kleine Menge geschmolzener Substanz aufsaugen und darin erstarren lassen. Der starre Zustand wird sich von dem flüssigen meist durch eine Trübung des Tropfens unterscheiden. Man bringt das Röhrchen mit einem Thermometer in ein Bad (Becherglas mit Wasser, Petroleum, Paraffin usw.), welches man unter Umrühren langsam erwärmt, und beobachtet die Temperatur, bei welcher der Tropfen sich klärt oder beweglich wird. Die erste Beobachtung wird nur zur Orientierung dienen.

Sicherer ist die Anwendung größerer Mengen. Diese erwärmt man allmählich zusammen mit einem Thermometer. Den Schmelzpunkt erkennt man daran, daß die Temperatur einige Zeit lang stationär bleibt.

Hohe Schmelztemperaturen.

Tiegelmethode Der Körper wird in ausreichender Menge im bedeckten Tiegel aus Porzellan oder, wenn eine reduzierende Atmosphäre gewünscht wird, aus Graphit, mittels Flamme, Gebläseofen oder elektrischer Heizung (8, 29) geschmolzen. Durch den Deckel ist ein mit einem Porzellanröhrchen umhülltes Thermoelement (43a II) eingeführt. Bei richtig regulierter Heizung

erkennt man das Schmelzen oder Erstarren daran, daß die Thermokraft eine Zeit lang stationär bleibt.

Drahtmethode. Man fügt in die eine Lötstelle eines Thermoelements das zu untersuchende Metall in Gestalt eines etwa $\frac{1}{2}$ cm-langen Drahtstückchens ein, erhitzt allmählich und beobachtet die Thermokraft im Augenblick des Durchschmelzens.

Näheres über diese Methoden z. B. bei Holborn u. Day, Ann. der Ph. 2, 523 1900.

Meldometer (Joly). Ein etwa 10 cm langes, 1 mm breites Platinband wird elektrisch regulierbar geheizt; sein Temperaturzustand wird mikrometrisch nach der Verlängerung beurteilt. Benutzt wird nur der mittlere Teil von gleichmäßiger Temperatur. Eine ganz kleine Menge der zu untersuchenden Substanz wird aufgebracht und ihr Aggregatzustand, in allmählich engere Temperatur-Grenzen eingeschlossen, mit einem schwachen Mikroskop beobachtet. Geeicht wird das Instrument empirisch mit Körpern von bekanntem Schmelzpunkt (Tab. 11).

Joly, Chem. News 65, 1. 1892; Ramsay u. Eumorfopoulos, Phil. Mag. 41, 360. 1896

Gefrierpunkt von Lösungen.

Die Bedeutung dieser Aufgabe besteht hauptsächlich in der Bestimmung der Molekulargröße eines gelösten Stoffes. Der Gefrierpunkt eines Lösungsmittels erniedrigt sich durch Auflösung eines Stoffes proportional der molekularen Konzentration der Lösung, solange die letztere nicht zu stark wird (Rüdorff, de Coppet, Raoult). Ist p die in Grammen gemessene gelöste Menge in 1000 gr des Lösungsmittels, M das chemische Molekulargewicht des gelösten Stoffes, so nennt man $p/M = \mu$ die in 1000 gr gelöste Anzahl von Gramm-Molekülen („Molen"). Die Erniedrigung τ des Gefrierpunkts ist dann

$$\tau = G \cdot \mu = G \cdot p/M,$$

G ist von der Art des gelösten Stoffes unabhängig, hat jedoch für jedes Lösungsmittel einen besonderen Wert. G ist nach Betrachtungen über die osmotische Arbeit beim Auflösen (van't Hoff) durch die Schmelztemperatur t und die Schmelzwärme ϱ (Tab. 12) des Lösungsmittels gegeben als

$$G = 0{,}00198 (273 + t)^2/\varrho,$$

z. B. für Wasser $= 0{,}00198 \cdot 273^2 : 80 = 1{,}85$. Außerdem ist G empirisch bestimmt. Einige Werte sind

	für Wasser	Benzol	Essigsäure	Nitrobenzol	Phenol
Gefrierpunkt	$t = 0{,}0°$	5,0°	17°	5°	39°
Schmelzwärme	$\varrho = 80$	30	46	22	26
	$G = 1{,}85$	5,1	3,8	7,0	7,5

Man kann also nach der Formel (vgl. v. S.)

$$M = G \cdot \frac{p}{\tau}$$

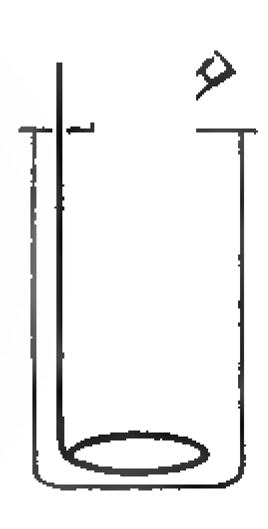
aus der Gefrierpunktserniedrigung τ ein Molekulargewicht M ableiten Es ist aber zu beachten, daß viele Körper, worunter insbesondere die Elektrolyte (Salze, Alkalien, Säuren), von diesem Gesetz ausgeschlossen sind. Die wirkliche Erniedrigung τ ist bei wässrigen Lösungen von Elektrolyten größer als die aus der Formel mit dem chemischen Molekulargewicht berechnete τ_0. Dies bestätigt die Annahme, daß solche Moleküle in der Lösung zerfallen, „dissoziiert" sind (Arrhenius). Den „Dissoziationsgrad" (vgl. S. 82) berechnet man für eine Spaltung:

in 2 Moleküle als $\frac{\tau}{\tau_0} - 1$, in n Moleküle als $\frac{1}{n-1}\left(\frac{\tau}{\tau_0} - 1\right)$

Da es nach dem vorigen darauf ankommt, die Gefrierpunkts-Erniedrigung einer Lösung gegen ihr Lösungsmittel mit beträchtlicher Genauigkeit zu bestimmen, und da der Druck das empfindliche Thermometer beeinflußt, da auch der Gefrierpunkt des Lösungsmittels durch geringfügige Eigenschaften etwas geändert werden kann, so ermittelt man die Gefrierpunkte des Lösungsmittels und der Lösung mit dem nämlichen Thermometer mit gleicher Eintauchtiefe kurz nacheinander.

Eine genaue Messung verlangt trotzdem beträchtliche Vorsichtsmaßregeln, besonders in Wasser als Lösungsmittel. Man bestimmt den Gefrierpunkt durch allmähliches Abkühlen der Lösung mit einem empfindlichen Thermometer unter stetem Umrühren. Die Temperatur pflegt zunächst ohne Erstarrung unter den Gefrierpunkt zu sinken; beginnt die Ausscheidung, so steigt die Temperatur plötzlich auf den Gefrierpunkt, der nun abgelesen wird. Das Gefrieren wird zweckmäßig durch Impfen mit einer Spur von gefrorenem Lösungsmittel eingeleitet.

Die nebengezeichnete Anordnung von Beckmann erleichtert die Messung. Ein innerer Cylinder enthält die durch einen Seitenansatz eingegossene Lösung, das Thermometer und einen Rührer, der auch durch ein Uhrwerk oder elektromagnetisch bewegt werden kann. Von dem Quecksilberfaden des Thermometers kann man je nach dem Gefrierpunkt des angewandten Lösungsmittels geeignete



Mengen abtrennen (39). Die Erniedrigung wird von der Einstellung des Quecksilberfadens in dem gefrierenden reinen Lösungsmittel gezählt. Jener Cylinder ist durch eine Luftschicht in einem etwas weiteren umgebenden Cylinder von der Kältemischung usw. getrennt, in welche man den weiteren Cylinder einsetzt. Die durch das Verhältnis von Eis und Kochsalz regulierbare Temperatur der Kältemischung soll nicht zu weit (3°) unter der Gefriertemperatur liegen, da man die letztere sonst im allgemeinen zu tief, aber wenn sich ein Eiscylinder an den Wänden bildet, auch wohl zu hoch findet.

Der Cylinder wird mit einer gewogenen Menge (vielleicht 20 gr) des Lösungsmittels beschickt und dessen Gefrierpunkt nach der oben gegebenen Anweisung wiederholt bestimmt. Ebenso der erniedrigte Gefrierpunkt, nachdem man eine gewogene Menge des aufzulösenden Körpers durch den Seitenansatz eingeführt hat. Man arbeitet mit Erniedrigungen um einige Zehntel Grad, setzt also etwa $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{2}{1000}$ gr-Molekül zu 10 gr des Lösungsmittels.

Beispiel 1) 20 gr Wasser. Nachdem das in 1/100 geteilte Thermometer auf $-0,8$ gesunken war, wurde das Gefrieren eingeleitet. Das Thermometer stieg auf $+0,016$. 2) 1,00 gr Rohrzucker in diesem Wasser gelöst und bis zu $-0,6$ gekühlt. Nach Einbringen einer Spur Eis stieg das Thermometer auf $-0,259$. Also Gefrierpunkts-Erniedrigung $\tau = 0,016 - (-0,259) = 0,275°$.

Das Molekulargewicht M berechnet sich hieraus, da $p = 1,00 \cdot 1000/20 = 50$ und die Konstante für Wasser $G = 1,85$ ist, $M = G \cdot p/\tau = 1,85 \cdot 50/0,275 = 336$. ($C_{12}H_{22}O_{11}$ gibt $M = 342$.)

Das Ausfrieren des Lösungsmittels erhöht die Konzentration der Lösung, also soll die dem Gefrieren vorausgegangene Unterkühlung nicht zu beträchtlich sein und das Ausfrieren nicht lange dauern. Die durch Ausfrieren entstandene Erhöhung der Konzentration läßt sich aus der dem Gefrieren vorausgegangenen Unterkühlung Δ unter den Gefrierpunkt schätzen. Ist ϱ die Schmelzwärme, c die spezifische Wärme des Lösungsmittels, so ist durch das Ausfrieren die Lösung nahe im Verhältnis $1 + c\Delta/\varrho$ konzentrierter geworden. Dauerte das Ausfrieren bis zur Beobachtung längere Zeit, so wird die Korrektion größer. Man kann dann den Gang des allmählichen Niedergangs des Gefrierpunkts noch eine Zeit lang beobachten und auf den ersten Augenblick zurückrechnen.

Literatur u. a.: Beckmann, ZS f. phys. Ch. 2, 638 u. 715. 1888; 21, 239. 1896; 44, 170. 1903. Über Vorsichtsmaßregeln: Loomis, Wied. Ann. 51, 500. 1894; ZS f. phys. Ch. 32, 578. 1900; 37, 407 1901; Nernst u. Abegg, ZS f. phys. Ch. 15, 681. 1894; Abegg, Wied. Ann 64, 486 1898. Über Beobachtung mit einem Differenz-Thermoelement s. Hausrath, Ann. der Ph. 9, 522. 1902. — Über den Gang der Depression in konzentrierteren Lösungen, Abegg, ZS f. phys. Ch. 15, 209. 1894; Jones u. Getmann, Phys. Review 18, 146. 1904. Eine eingehende zusammenfassende Behandlung: Raoult, ZS f. phys. Ch. 27, 618. 1898. Auch Ostwald-Luther S. 288 ff.

Im Gegensatz zum vorigen findet Richards für die Genauigkeit eine Lösung mit reichlicher Eismenge vorteilhaft; die Konzentration wird an einer, während der Temperaturablesung herauspipettierten Menge der Lösung hinterher ermittelt. ZS f. phys. Ch. 44, 563. 1903.

46. Siedepunkt.

Siedepunkt heißt die Temperatur, bei der eine Flüssigkeit unter Atmosphärendruck, d. h. unter dem Druck von 760 mm Quecksilber von 0° siedet, oder bei welcher ihre gesättigte Dampfspannung 760 mm beträgt.

Die Dampfentwicklung pflegt von der Wand aus stattzufinden, nicht nur weil in der Regel von hier aus geheizt wird, sondern auch weil die Dampfblasenbildung im Innern der Flüssigkeit durch die Kohäsion erschwert wird, während an der Wand eine Gasschicht zu haften pflegt, welche die Kohäsion vermindert. Im Laufe der Zeit vermehrt sich die Kohäsion zwischen Wand und Flüssigkeit und es entsteht ein „Siedeverzug", d. h. eine unter Umständen, und zwar besonders bei langsamem Sieden, beträchtliche Überhitzung über den Siedepunkt. Metallwände sind in dieser Hinsicht weniger gefährlich als Glaswände.

Bei der Messung hat man, unter möglichstem Ausschluß der Abkühlung wie besonders der Überhitzung der nicht bespülten Wandflächen, mit der Flamme oder mit einem Bade ein mäßiges gleichförmiges Sieden zu unterhalten, wobei die Siedeverzüge durch Stückchen Platinblech oder noch besser durch einen durch den Gefäßboden durchgeschmolzenen Platindraht eine Zeit lang verhindert werden können. Immerhin bringe man das Thermometer nicht in die Flüssigkeit, sondern dicht über die Oberfläche; es überzieht sich mit einer Flüssigkeitshaut und zeigt dann den richtigen Siedepunkt an. (In Lösungen dagegen muß das Thermometer eintauchen; vgl. unten.)

Über die etwaige Thermometer-Korrektion wegen herausragenden Fadens s. 40 V.

Der Siedepunkt wird von dem zufälligen Barometerstande b (37) auf 760 mm reduziert. Liegt eine Tabelle über die Siedepunkts-Änderung mit dem Druck für die Flüssigkeit oder für eine nahe liegende Mischung vor, so korrigiert man hiernach. Andernfalls benutzt man die Erfahrung, daß die Siedetemperatur vieler Flüssigkeiten um 760 mm herum sich nahe gleich stark ändert, nämlich um 0,038 oder $\frac{3}{80}$ Grad auf 1 mm Hg, zu einer wahrscheinlichen Korrektion und fügt also zu dem beobachteten Siedepunkt hinzu $\frac{3}{80}\cdot(760-b)$ Grad.

Über Rückflußkühler, die z. B. für Gemische nötig sind, vgl. 8, 27.

Siedepunkt einer Lösung.

Zweck der Bestimmung ist in der Regel die Ermittelung der Molekulargröße des gelösten Körpers.

Gesetz der Siedepunktserhöhung einer Lösung. Durch Auflösung eines Stoffes, der selbst nicht verdampft, vermindert sich die Dampfspannung, also erhöht sich der Siedepunkt des Lösungsmittels. Solange die Lösung verdünnt bleibt, ist die Änderung proportional der molekularen Konzentration. In 1000 gr des Mittels seien gelöst p gr des Körpers, also $p/M=\mu$ gr-Moleküle, wenn M das Molekulargewicht des Körpers. Dann beträgt die Erhöhung τ des Siedepunktes (vgl. auch 46a)

$$\tau=S\cdot\mu \quad \text{oder} \quad \tau=S\cdot p/M.$$

S ist erfahrungsgemäß (Raoult) für jedes Lösungsmittel konstant, für Äther 2,1, Alkohol 1,16, Benzol 2,7, Chloroform 3,6, Wasser 0,52. S. auch Tab. 12. S berechnet sich (van't Hoff) nach den Anschauungen über den osmotischen Druck aus der Siedetemperatur t und der Verdampfungswärme σ des Lösungsmittels (Tab. 12)

$$S=0{,}00198(273+t)^2/\sigma,$$

z. B. für Wasser $=0{,}00198\cdot373^2:539=0{,}511$. S läßt sich empirisch bestimmen, indem man einen Stoff auflöst, über dessen Molekulargröße in dem Lösungsmittel kein Zweifel besteht.

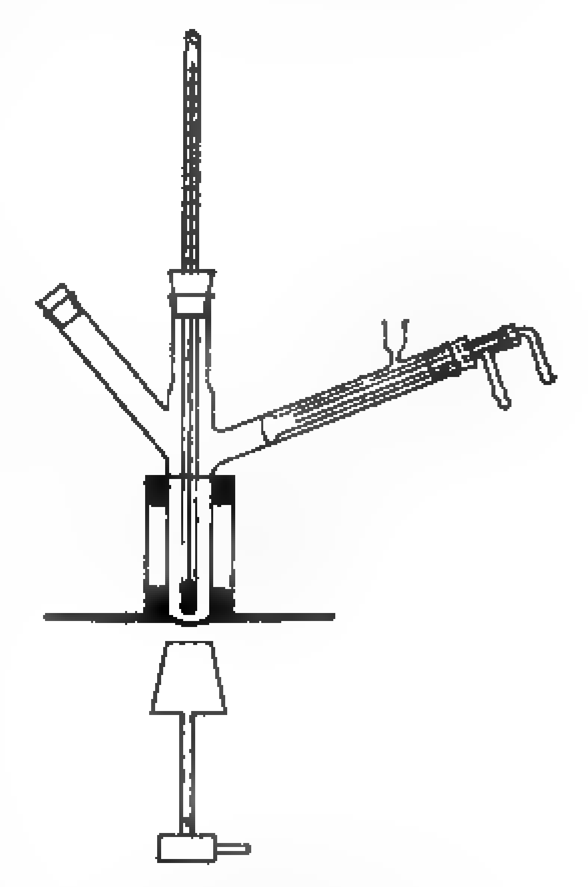
Über den Einfluß der Dissoziation, besonders in wässeriger Lösung, vgl. S. 181.

Aus der Siedepunktserhöhung τ eines Lösungsmittels von der Konstante S berechnet sich nach obigem das Molekulargewicht des gelösten Stoffes

$$M=S\cdot\frac{p}{\tau}.$$

Die besonderen Maßregeln bei der Messung richten sich hauptsächlich gegen die Fehlerquelle der Überhitzung.

Siedegefäß von Beckmann. Das Gefäß, dessen Boden durch ein mit Wasserglas angeklebtes Stück Asbestpappe gegen die direkte Wirkung des Brenners geschützt ist, steht auf dem Ausschnitt einer Asbestpappe, deren untere Seite mit einem Drahtnetz versehen ist. An den Seiten ist das Siederohr durch einen mit Glaswolle abgedichteten Luftmantel und oben durch eine Glimmerplatte geschützt. Der eine Seitenfortsatz enthält einen von Wasser durchströmten Kühler, der den Dampf kondensiert, so daß die Menge des Lösungsmittels ungeändert bleibt. — Statt des Luftmantels wird auch ein Ringgefäß mit siedendem Lösungsmittel gebraucht.



Die Lösung selbst wird so bereitet, daß eine abgewogene Menge Lösungsmittel, etwa 10 bis 20 gr, eingebracht wird, deren Siedepunkt man zuerst bestimmt. Abgewogene Mengen des Körpers werden dann mit Pipetten oder in Stücken oder zu Pastillen gepreßt durch den anderen Seitenfortsatz eingeführt. Der untere Teil des Siedegefäßes enthält Glasperlen und Platintetraeder, um das Sieden zu erleichtern und um mit wenig Flüssigkeit auszureichen.

Über Maßnahmen bei den Versuchen und verschiedene Formen von Gefäßen s. Beckmann, ZS f. phys Ch. 8, 223. 1891; 15, 661. 1894; 18, 473 1895; 21, 245. 1896; 40, 129. 1902; 44, 161. 1903.

Beispiel. Zu 20 gr Wasser wurden 8 gr Rohrzucker gesetzt, also $p = 400$ gr Zucker in 1000 gr Wasser Das Wasser zeigte den Siedepunkt 99,72°, die Lösung 100,34°; also $\tau = 100{,}34 - 99{,}72 = +0{,}62°$. Hieraus berechnet sich das Molekulargewicht des Rohrzuckers $M = S \cdot p/\tau = 0{,}52 \cdot 400/0{,}62 = 335$ (anstatt $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$).

46a. Dampfspannung.

Unter Dampfspannung eines Körpers wird der (in einer Quecksilbersäule von 0° oder in Atmosphären gemessene) Druck seines gesättigten Dampfes verstanden, welcher durch das Einbringen der Substanz im Überschuß in das Vakuum entsteht, d. h. z. B. bei Zimmertemperatur die Höhe, um welche der Meniskus einer Toricelli'schen Vakuumröhre dadurch sinkt, daß man die Flüssigkeit in einem kleinen Überschuß in das Vakuum bringt. Falls der Raum außerdem ein gegen den Körper neutrales Gas enthält, so addiert sich zu dessen Druck die Dampfspannung (Dalton).

Die Dampfspannung wächst beschleunigt mit der Temperatur. Die Temperatur, für welche sie 1 Atm. beträgt, ist gleich dem Siedepunkt des Körpers.

Man stellt ein Toricelli'sches Vakuum her, indem man ein etwa meterlanges, hinreichend weites, einseitig geschlossenes Glasrohr mit trockenem Quecksilber (8, 1) fast ganz füllt, die anhängenden Luftbläschen mittels der an der Rohrwand gleitenden größeren Luftblase oder vollkommener durch Auskochen beseitigt und das alsdann ganz gefüllte Rohr mit dem Finger verschlossen in Quecksilber umstürzt. An einer Millimeterteilung hinter oder auf dem Rohr oder mit dem Kathetometer (22; 36) liest man die Höhe der Quecksilbersäule ab, die dem Barometerstande nahe gleich sein muß. Man bringt in das Vakuum die luftfreie Substanz im Überschuß, indem man sie unten, eine Flüssigkeit mit einem Spritzchen oder in einem kleinen leichten Fläschchen, welches nötigenfalls mit aufsteigen darf, einführt und aufsteigen läßt. (Bei stark verdampfenden Substanzen das Rohr vorher neigen, bis das Quecksilber oben anstößt, sonst wird das Rohr zertrümmert!)

Besser ist bei der Untersuchung von Flüssigkeiten ein Rohr mit einer Verengung und einem Stöpsel, vielleicht einem eingeschliffenen Thermometer (Fig.). Der Stöpsel wird durch Aufgießen von ein wenig Quecksilber gedichtet, ev. auch mit einem nicht verdampfenden Schmiermittel, welches von der Flüssigkeit nicht angegriffen wird (Vaselin). Das Füllen des Rohrs mit Quecksilber wird sehr einfach, wenn das Gefäß, in dem das Rohr steht, einen so langen Fortsatz hat, daß man das Rohr ganz einsenken kann. Nach Herstellung und Ablesung des Vakuums gießt man die zu untersuchende Flüssigkeit in den Trichter und lüftet den Stöpsel vorsichtig, bis das Quecksilber und so viel Flüssigkeit eingetreten ist, daß ein Teil unverdampft bleibt, gießt aber alsbald wieder etwas Quecksilber auf.

Die Höhe der Quecksilbersäule sei jetzt $= H'$, während sie unter dem Vakuum $= H$ war. Dann ist $H - H'$, ev. gemäß dem folgenden korrigiert, die Dampfspannung des Körpers.

Zu dem abgelesenen H' ist zuzuzählen erstens $h \cdot s \cdot 13{,}6$, wo s das spezifische Gewicht und h die Höhe der nicht verdampften Flüssigkeit auf dem Quecksilber ist; zweitens in höherer Temperatur die Spannkraft des Quecksilberdampfes selbst nach Tab. 15. Außerdem sind während länger dauernder Versuche die Änderungen des Barometerstandes in leicht ersichtlicher Weise zu berücksichtigen. War bei der Trockenablesung der Barometerstand $= b$, bei der Ablesung mit Dampf aber $= b'$, so hat man H' um $b - b'$ zu vergrößern.

Man liest immer oben am Quecksilbermeniskus ab. Da die Kapillarspannung des Quecksilbers durch den Flüssigkeitstropfen geändert wird und da dieser ebenfalls eine Kapillarspannung besitzt, so verlangen genaue Messungen, besonders bei geringen Spannungen, ein Rohr, welches an den Ablesestellen 15 bis 20 mm weit ist.

Je kleiner der Raum des Vakuums ist, desto größer werden Fehler aus einem Rest Luft. — Vor der Ablesung soll man durch vorübergehendes Tieferstellen oder Neigen des Rohres neue Flüssigkeitsteile an die Oberfläche bringen.

Flüssigkeiten von größerem Dampfdruck kann man in dem geschlossenen Schenkel eines aufrecht stehenden Heberrohres untersuchen. Die Dampfspannung ist gleich dem äußeren Luftdruck $\pm$ Höhendifferenz des Quecksilbers in beiden Schenkeln. Verunreinigungen durch schwerer flüchtige Körper werden hier bedenklicher, weil der verdampfende Bruchteil groß und der Rest also stärker verunreinigt ist.

Für andere Temperaturen als Zimmertemperatur muß man den Verdampfungsraum mit einem durchsichtigen Bade (Wasser, Eis und Wasser, Dampf) umgeben und sorgfältig darauf halten, daß kein Teil eine niedrigere Temperatur hat, als die beobachtete. Es kommen dann aber auch die Temperaturänderungen der Quecksilbersäule in Betracht, insofern sie die Dichtigkeit des Quecksilbers ändern.

Über ein Verfahren mit einem Differentialmanometer, an welchem der Dampfdruck und das Vakuum ausgewechselt werden, s. Thiesen u. Scheel, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III 76. 1900.

Bestimmung im Gasstrom. Durch die Flüssigkeit wird ein in ihr wenig lösliches Gas in gemessenem Volumen geführt, z. B. Knallgas, aus Natronlauge durch einen gemessenen elektrischen Strom entwickelt; 87 u. Tab. 32. Die von dem Gase aufgenommene Dampfmenge ist dieselbe wie im Vakuum bei gleicher Temperatur im gleichen Volumen (Dalton). Diese Menge wird durch Differenzwägung der verdampfenden Flüssigkeit oder durch Absorption in einem zweiten Gefäß ermittelt. — Aus Menge, Volumen, Temperatur und Dampfdichte oder Molekulargewicht ergibt sich die Dampfspannung. Vgl. 18 u. 19.

Über Ausführung und Rechnung s. z. B. Gahl, ZS f. phys. Ch 33, 178. 1900; Gaus, ZS f. anorg. Ch. 25, 236. 1900; Ostwald-Luther S. 270.

Siedeverfahren. Aus der Siedetemperatur t (46) einer Flüssigkeit erhält man immer einen Punkt der Dampfspannungs-

kurve, nämlich die Spannkraft b (Barometerstand), welche zu t gehört. Sieden unter anderem als atmosphärischem Drucke wird durch ein an den Dampfraum angeschlossenes größeres Luftvolumen von regulierbarer Dichtigkeit („künstliche Atmosphäre") unter Anwendung eines Rückflußkühlers (8, 27) ermöglicht.

Lösungen.

Das Gesetz (Babo, Wüllner, Raoult), nach welchem die Dampfspannung einer Flüssigkeit durch die Auflösung eines Körpers verkleinert wird, der selbst keine merkliche Dampfspannung hat, lautet: Enthält die Lösung μ Moleküle des gelösten Körpers auf μ' Moleküle des Lösungsmittels, welchem an sich die Spannung e zukommt, so beträgt die Depression ε der Dampfspannung

$$\varepsilon = e \cdot \frac{\mu}{\mu + \mu'} .$$

μ und μ' berechnen sich aus der Masse des gelösten Körpers p und des Lösungsmittels p', wenn M und M' die zugehörigen Molekulargewichte bedeuten, $\mu = \frac{p}{M}$ und $\mu' = \frac{p'}{M'}$. Die Dampfdruckerniedrigung von Lösungen kann also nach folgender Regel ebenfalls zur Ermittelung von Molekülgrößen dienen: es seien p Gewichtsteile eines Körpers in p' Teilen einer Flüssigkeit gelöst. Die Dampfspannung der Flüssigkeit sei e (Tab. 13, 14b, 15), diejenige der Lösung sei um ε kleiner. Dann verhalten sich die Molekulargewichte

$$\frac{M}{M'} = \frac{p}{p'} \frac{e - \varepsilon}{\varepsilon} .$$

Für konzentriertere Lösungen entstehen Abweichungen Ferner gelten für Elektrolyte die Bemerkungen von S 180 u. 181

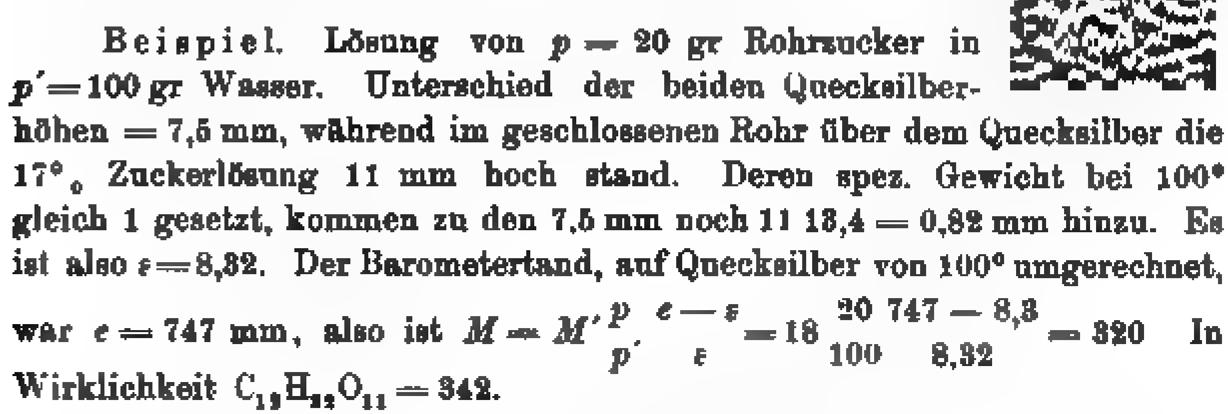
Man kann die vorige direkte Methode anwenden, allein die gesuchte Differenz ε ist hierdurch bei verdünnten Lösungen nicht leicht genug zu ermitteln.

Differenzmethode (Dieterici). Ein empfindliches Manometer (vgl. **36** I, IV, VI) wird durch Hahnverbindungen abwechselnd mit den auf derselben Temperatur gehaltenen Dampfräumen der Lösung und des Lösungsmittels verbunden und zeigt so die gesuchte Differenz an. Die übrigen Apparatenteile werden auf einer höheren Temperatur gehalten. Die Reduktionskonstante des Manometers wird empirisch ermittelt.

Dieterici, Wied. Ann 50, 47. 1893; 62, 620. 1897

Siedeverfahren. Die Änderung der Dampfspannung

einer Lösung kann man folgendermaßen bestimmen. Man füllt ein „abgekürztes Barometer“ von mindestens 10, besser 15 mm Weite mit Quecksilber, bringt in den geschlossenen Schenkel eine nicht zu kleine Menge der Lösung und hängt das Ganze in einen Raum, der durch einen starken Dampfstrom des siedenden Lösungsmittels geheizt wird. Der Höhenunterschied der Quecksilbersäule in beiden Schenkeln gibt die Änderung der Dampfspannung des Lösungsmittels an. Korrektionen s. S. 186.



Beispiel. Lösung von $p = 20$ gr Rohrzucker in $p' = 100$ gr Wasser. Unterschied der beiden Quecksilberhöhen = 7,5 mm, während im geschlossenen Rohr über dem Quecksilber die 17% Zuckerlösung 11 mm hoch stand. Deren spez. Gewicht bei 100° gleich 1 gesetzt, kommen zu den 7,5 mm noch 11/13,4 = 0,82 mm hinzu. Es ist also $\varepsilon = 8{,}32$. Der Barometertand, auf Quecksilber von 100° umgerechnet, war $e = 747$ mm, also ist $M = M' \frac{p}{p'} \frac{e - \varepsilon}{\varepsilon} = 18 \frac{20}{100} \frac{747 - 8{,}3}{8{,}32} = 320$ In Wirklichkeit $C_{12}H_{22}O_{11} = 342$.

Über die Benutzung des Siedepunktes der Lösung selbst zur Ermittelung ihrer Dampfdruck-Erniedrigung s. 46.

Über die statischen Methoden vgl. noch z. B. Lehmann, Molekularphysik II 144. 1889.

47. Bestimmung der Luftfeuchtigkeit (Hygrometrie).

Für die Meteorologie oder für physikalische Zwecke kommen folgende hygrometrische Eigenschaften der Luft in Betracht:

1. Die Dichtigkeit des Wasserdampfes in der Luft, d. h. die in 1 cm³ Luft enthaltene Wassermenge in gr Weil die Zahl sehr klein ist, pflegt man sie mit 10^6 multipliziert anzugeben, wodurch man also den Wassergehalt von 1 m³ Luft in gr ausgedrückt erhält. Diese Größe heißt in der Meteorologie die absolute Feuchtigkeit der Luft; sie werde mit f bezeichnet.

2. Die relative Feuchtigkeit oder der Sättigungsgrad, d. h. das Verhältnis des wirklich vorhandenen Wassergehaltes zu demjenigen, bei welchem die Luft mit Wasser gesättigt wäre. Diese Größe ergibt sich aus der absoluten Feuchtigkeit f und der Lufttemperatur, zu welcher man aus Tab. 13 das Maximum f_0 des möglichen Wassergehaltes entnimmt, als f/f_0.

3. Die Spannkraft e des Wasserdampfes oder der Dunstdruck.

Wird die Spannkraft in mm Quecksilber gemessen, so hängen Spannkraft e, absolute Feuchtigkeit f und Lufttemperatur t durch die Formeln zusammen:

$$e = 0{,}945(1 + 0{,}00367\,t)\cdot f, \qquad f = 1{,}058\,\frac{e}{1 + 0{,}00367\,t}, \qquad 1.$$

so daß die Bestimmung von t und e oder f immer ausreicht.

Denn die Dampfdichte des Wassers ist nach S. 81 $= 18/28{,}95 = 0{,}622$; also wiegt 1 m³ Dampf (18, 19),

$$0{,}622 \cdot \frac{1293}{1 + 0{,}00367\,t}\cdot\frac{e}{760} = \frac{1{,}058\,e}{1 + 0{,}00367\,t}\ \text{gr}.$$

Bequem für das Gedächtnis ist, daß (Tab. 13) e in mm und f in gr/m³ einander nahe gleich sind. Außerdem entfernen sich die Werte in mittlerer Temperatur (von 6 bis 30°) im Falle der Sättigung nicht weit von der in Centigraden ausgedrückten Temperatur selbst.

4. Der Taupunkt, d. h. die Temperatur τ, bei welcher die Luft mit dem vorhandenen Wasserdampf gesättigt ist.

I. Taupunkt-Hygrometer (Daniell 1820; Regnault).

In Tab. 13 findet man den zum Taupunkt τ gehörigen Wassergehalt f von 1 m³ Luft, sowie die Spannkraft e des bei der Temperatur τ gesättigten Wasserdampfes; und zwar ist die so entnommene Spannkraft ohne weiteres die in der Atmosphäre vorhandene. Die Dichtigkeit verlangt eine Korrektion, weil die Luft in der Nähe des Instrumentes abgekühlt und dadurch verdichtet worden ist. Der aus der Tabelle zu τ entnommene Wassergehalt ist also zu groß und muß mit

$$\frac{1 + 0{,}00367\,\tau}{1 + 0{,}00367\,t} = \frac{273 + \tau}{273 + t}$$

multipliziert werden, wenn t die Lufttemperatur bedeutet.

Man stellt das Instrument so auf, daß die glänzende Fläche dem Auge volles Himmelslicht oder das Licht einer Kerze spiegelt. Am Daniell'schen Hygrometer (Fig.) wird die mit dem Läppchen bewickelte Kugel durch das Verdampfen aufgetröpfelten Äthers gekühlt, worauf eine Destillation von der anderen Kugel aus und hierdurch auch die Abkühlung der letzteren eintritt. Man kühlt, bis man eine Trübung des glänzenden Ringes bemerkt. Sofort unterbricht man das Verdampfen des Äthers; die Temperatur steigt, und man beobachtet den Stand des Thermometers, bei welchem der Niederschlag zu verschwinden anfängt. Nach einigen orientierenden Versuchen gelingt es leicht, diese beiden Temperaturen ein-

ander auf einen kleinen Bruchteil eines Grades zu nähern. Das Mittel aus beiden nimmt man als Taupunkt τ der Luft. — Man sehe darauf, daß die von dem Körper, vom Atmen usw. herrührende Feuchtigkeit möglichst von der Taufläche entfernt bleibe.

Am Regnault'schen Hygrometer (Fig.) sucht man durch Regulieren des Wasserabflusses aus dem Aspirator eine solche Temperatur des durch den Luftstrom verdampften Äthers zu bewirken, daß auf der glänzenden Fläche ein Niederschlag zeitweilig entsteht und verschwindet. Diese Temperatur ist der Taupunkt.

II. Psychrometer (August 1828).

Die atmosphärische Feuchtigkeit wird aus der Geschwindigkeit bestimmt, mit welcher Wasser in der Luft verdampft, welche Geschwindigkeit wiederum aus der Abkühlung eines befeuchteten Thermometers erkannt wird.

Ist t die Lufttemperatur (Temperatur eines trockenen Thermometers),
t' die Temperatur des feuchten Thermometers,
e' die Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei t', wie dieselbe aus Tab. 13 entnommen wird,
b der Barometerstand in mm,

so erhält man nach meteorologischen Erfahrungen die wirkliche Dampfspannung e, je nachdem

t' über 0^0 oder unter 0^0 liegt,

$$e = e' - 0{,}00080\, b\, (t - t') \qquad e' - 0{,}00069\, b\, (t - t').$$

Aus e berechnet sich die absolute Feuchtigkeit f vermöge der Formel 1 Seite 190.

Obige Konstanten gelten für Beobachtungen in freier, mäßig bewegter Luft. In ruhender Luft sind größere Zahlen einzusetzen, die im geschlossenen kleinen Zimmer um 50% steigen können. Um bei Zimmerbeobachtungen die Bedingungen der Konstante 0,00080 herzustellen, bewegt man das Psychrometer, am einfachsten, indem man es an einem langen Faden pendeln läßt.

Näherungsformeln. Bei den mancherlei Fehlerquellen des Psychrometers genügt es häufig, für b einen mittleren

Barometerstand anzunehmen. Setzt man $b = 750$ mm, so wird

$$e = e' - 0{,}60(t - t') \quad \text{bez. unter } 0^0 \quad - 0{,}52(t - t'). \qquad 2.$$

Genähert kann man auch f nach der Formel

$$f = f' - 0{,}64(t - t') \qquad 3.$$

berechnen, worin man für f' den aus Tab. 13 zu t' entnommenen Wert setzt.

Beispiel. $t = 19{,}42^0$, $t' = 13{,}34^0$; $b = 739$ mm. Man findet zu t' in Tab. 13 $e' = 11{,}44$ mm. Davon ist abzuziehen $0{,}00080 \cdot 739 \cdot 6{,}08 = 3{,}59$ mm, also ist die Dampfspannung $e = 7{,}85$ mm. Hierzu berechnet sich für 19,4° nach Gl. 1 S. 190 $f = \frac{1{,}058 \cdot 7{,}85}{1 + 0{,}00367 \cdot 19{,}4} = 7{,}75 \frac{\text{gr}}{\text{m}^3}$. Die relative Feuchtigkeit ist $7{,}75/16{,}8 = 0{,}46$.

Die genaue Regnault'sche Formel $e = e' - \frac{0{,}480 b(t - t')}{610 - t'}$, bez. unter Null 689 statt 610, gibt nur in besonders hohen Temperaturen merklich andere Werte als unser Ausdruck.

Aspirations-Psychrometer (Assmann). Temperaturbeobachtungen der Luft werden durch Strahlung gefährdet, besonders im Freien. Deswegen sind die Thermometerkugeln hier von einem polierten doppelten Metallschutzrohr umgeben, durch welches mittels eines Uhrwerk-Ventilators ein Luftstrom mit etwa 2 m/sek Geschwindigkeit gesaugt wird. Man berechnet $e = e' - 0{,}00066 \cdot b(t - t')$ unter gewöhnlichen Verhältnissen nahe $= e' - 0{,}5(t - t')$. Auch für nicht meteorologische Zwecke kann die Anwendung eines Thermometers mit Ventilation wertvoll sein.

Assmann, ZS f. Instr 1892, 1.

Um die Spannkraftsdifferenz $e' - e$ direkt zu messen, kann man ein Volumen atmosphärischer Luft absperren, dann etwas Wasser dazufügen und bei konstanter Temperatur an einem empfindlichen Manometer oder an einer mit einem Petroleumtropfen versehenen, in bezug auf das abgesperrte Volumen kalibrierten Röhre, die mit dem Raume verbunden sind, die Drucksteigerung oder Volumvermehrung ablesen, welche durch das Sättigen mit Wasserdampf entsteht. Über die Ausführung und Literatur vgl. Salvioni, Atti della Acc. Peloritana 17. 1901; Nuovo Cimento (5) 3, 390. 1902; Beibl. 1902, 369.

III. Absorptionshygrometer.

Direkt erhält man den Wassergehalt, wenn man ein gemessenes Volumen der Luft durch eine mit Stückchen Chlor-

calcium, oder Bimstein mit konzentrierter Schwefelsäure, oder besser mit wasserfreier Phosphorsäure gefüllte Röhre saugt und das absorbierte Wasser wägt.

IV. Haarhygrometer usw.

Die Gestalt (Länge, Torsion, Krümmung) hygroskopischer Körper hängt von der Luftfeuchtigkeit ab. Die Einstellung s des Zeigers an der Skale soll die relative Feuchtigkeit in Prozenten geben, also $s = 100 f/f_0$, oder $f = \frac{1}{100} s \cdot f_0$, wo f_0 zu der Lufttemperatur aus Tab. 13 genommen wird. Die Spannkraft e wird aus f berechnet (vgl. oben).

Um den 100%-Punkt zu prüfen, stellt man das Instrument einige Zeit unter eine gut schließende Glocke mit Wasser. Am Koppe'schen Hygrometer wird der Zeugstoff, der sonst die durchlässige Hinterwand bildet, genäßt und der abschließende Schieber aufgesetzt. Der Nullpunkt wird unter einer Glocke mit konzentrierter Schwefelsäure kontrolliert; manche Hygrometer sollen aber durch das Austrocknen Schaden leiden. Andere Punkte der Teilung müssen durch gleichzeitige Beobachtung eines anderen Hygrometers geprüft werden.

48. Kalorimetrie. Wasser-Kalorimeter. Spezifische Wärme, Mischungsverfahren.

Einheit der Wärmemenge oder Kalorie.

Vgl. Warburg, Referat über die Wärmeeinheit, Leipzig 1900.

Als Einheit pflegt man die Wärmemenge zu setzen, welche die Masseneinheit Wasser (1 gr oder 1 kg; Gramm- oder Kilogramm-Kalorie) um 1° erwärmt. Diese Menge ist nicht ganz konstant. Da man gewöhnlich mit Wasser etwas unterhalb Zimmertemperatur mißt, so wird neuerdings bevorzugt und hier als „Kal_{15}" zugrunde gelegt:

die Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser bei 15° (von 14,5 auf 15,5°) um 1° erwärmt.

Außerdem kommen in Betracht:

die Kalorie von 0 auf 1°, die nach Regnaults Vorgang lange Zeit gebraucht worden ist. Sie wird nahe = 1,007 Kal_{15} anzunehmen sein (vgl S. 195);

die mittlere Kalorie, der 100te Teil der Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasser von 0 auf 100° erwärmt. Auf diese Menge kann man nämlich das Eisschmelzverfahren am bequemsten zurückführen. Man

wird nach den vorliegenden Bestimmungen im Mittel, aber wohl auf $\pm$ 0,002 unsicher, 1 mittl. Kal = 1,002 Kal_{15} anzunehmen haben;

die Eis-Kalorie, das ist die zum Schmelzen der Masseneinheit Eis notwendige Wärmemenge. Sie wird hier = 80,0 Kal_{15} gesetzt; (vgl. z. B. Smith, Phys. Review 17, 193. 1903).

die mechanische Kalorie. Die wissenschaftliche Einheit ist die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge. Dies ist in dem CGS-System die Arbeit, welche 1 gr an einem Orte, wo die Schwerbeschleunigung = 1 cm/sek² wäre, um 1 cm hebt. Das 10^7-fache entspricht der technischen elektrischen Arbeitseinheit Wattsekunde oder Joule. Vgl. Anh. 9. Nach den gegenwärtigen Kenntnissen gilt: 1 Wattsek = 0,239 gr-Kal_{15}; 1 CGS = $0{,}239 \cdot 10^{-7}$ gr-Kal_{15}; 1 gr-Kal_{15} = $4{,}19 \cdot 10^7$ CGS = 4,19 Wattsek.

Kalorimeter.

Die Bestimmung einer Wärmemenge beruht meist auf der Messung eines der folgenden durch Wärme erzeugten oder sie erzeugenden Vorgänge. Zu Nr. 1 bis 3 dient fast immer das Wasser.

1. Temperaturänderung eines Körpers; Wasserkalorimeter.
2. Schmelzung eines Körpers; Eiskalorimeter.
3. Verdampfung eines Körpers; Dampfkalorimeter.
4. Messung der äquivalenten mechanischen Energie; ausgeführt besonders von Rowland.
5. Messung der äquivalenten elektrischen Energie; elektrisches Kalorimeter.
6. Messung eines chemischen Vorganges von bekannter Wärmetönung.
7. Ausgleich nach bekanntem Gesetz gegen eine anders temperierte Umgebung; Erkaltungs- (Strahlungs-)Kalorimeter.

Die Methoden sind beschrieben in 48 bis 51.

Spezifische Wärme.

Spez. Wärme eines Körpers ist die Wärmemenge oder Anzahl von Kalorien, welche seine Masseneinheit (gr oder kg, je nach der Definition der Kalorie) um 1° erwärmt. Da die Wärmekapazität der Körper nicht ganz konstant ist, sondern im allgemeinen mit der Temperatur mehr oder weniger zu wachsen pflegt, so muß die Temperatur angegeben sein, für welche die Zahl gilt. Bei dem Mischungsverfahren mißt man gewöhnlich die Wärmeabgabe zwischen 100° und etwa 15°. Dann wird also die mittlere spez. Wärme zwischen diesen Temperaturen gefunden.

Bei festen und flüssigen Körpern wird stets die spez. Wärme „bei konstantem Druck" bestimmt, d. h. die aufgenommene Wärmemenge, während der Körper zugleich die seiner Erwärmung entsprechende natürliche Ausdehnung erfährt. Die spez. Wärme bei konstantem Volumen, also wenn die Ausdehnung durch gesteigerten Druck verhindert wird, ist kleiner.

Spez. Wärme des Wassers. Sie nimmt von 0° aufwärts bis etwa

30° ab, um dann wieder zu wachsen. Nach neueren Bestimmungen wird, wenn man $c_{15} = 1$ setzt, anzunehmen sein bei der Temperatur t:

$t =$	0°	5	10	15	20	25	30°	0 bis 100°
$c_t =$	1,007	1,0044	1,0017	1,0000	0,9988	0,9985	0,9986	1,002.

Literatur über Kalorien und spez. Wärme des Wassers:

Außer den von Warburg l. c. zusammengestellten neueren Arbeiten (Rowland, Dieterici, Bartoli u. Stracciati, Lüdin, Pernet, Griffiths, Joly u. a.) noch Barnes mit Callendar u. Cooke, Proc. R. S. 67, 238. 1900; Phil. Trans. (A) 199, 149. 1902. Die beobachteten Werte sind:

	$t =$ 0°	5	10	15	20	25	30°	35°
Rowland	—	1,0054	1,0019	1,0000	0,9979	0,9972	0,9969	0,9964
Bart. u. Stracc.	1,008	1,0046	1,0018	1,0000	0,9994	0,9997	1,0008	—
Lüdin (1900)	1,005	1,0027	1,0010	1,0000	0,9994	0,9993	0,9996	1,0008
Barnes	1,009	1,0050	1,0020	1,0000	0,9987	0,9978	0,9973	0,9971

Von 35° aufwärts und unterhalb 0°:

	35°	40	45	50	55	60	65	70°
Lüdin	1,0008	1,0018	1,0024	1,0037	1,0051	1,0065	1,0079	1,0092
Barnes	0,9971	0,9971	0,9973	0,9977	0,9982	0,9988	0,9994	1,0001

	75	80	85	90	95	100°	0°	—5°
Lüdin	1,0104	1,0113	1,0119	1,0121	1,0120	1,011		
Barnes	1,0007	1,0014	1,0021	1,0028	1,0034	1,004	1,009	1,015

Das Produkt aus spez. Wärme und Atom- bez. Molekulargewicht eines Körpers heißt seine Atom- bez. Molekularwärme. Die Atomwärme der festen Elemente ist, mit größeren Abweichungen z. B. für C, B, Si, ungefähr $= 6{,}3$.

Die Messung auf 1/1000 genau auszuführen, ist schwierig. Zur Rechnung genügen deswegen 4stellige Logarithmen (Tab. 53).

I. Feste Körper.

Der zu untersuchende Körper wird gewogen, auf eine gemessene Temperatur T erwärmt und mit einer gewogenen Wassermenge von der Temperatur t gemischt. τ sei die gemeinschaftliche Endtemperatur des Körpers und des Wassers. Ist dabei

m die Masse des Körpers,

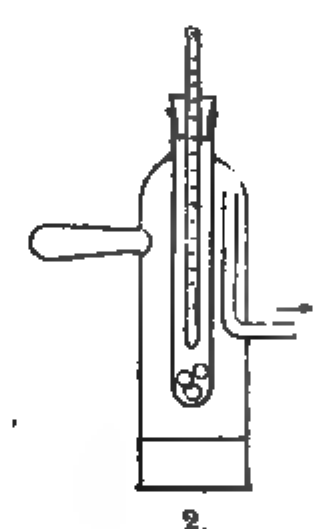
w die Masse des Wassers, vermehrt um den Wasserwert der übrigen Teile des Kalorimeters (siehe unten),

so findet sich die mittlere spezifische Wärme c des Körpers zwischen τ und T aus der Formel (vgl. noch S. 198)

$$c = \frac{w}{m}\,\frac{\tau - t}{T - \tau}. \qquad 1.$$

Denn $w(\tau - t)$ ist die Wärmemenge, welche das Wasser bekommt; $cm(T - \tau)$ ist die Menge, die der Körper abgibt; beide Mengen sind identisch.

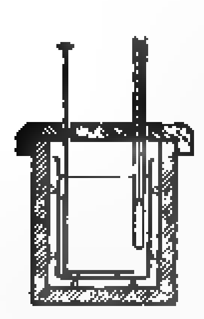
Die anfängliche Erwärmung des Körpers, meist in einem durch siedendes Wasser oder durch Dämpfe von siedendem Wasser äußerlich geheizten, gegen Luftwechsel sorgfältig geschützten Raume (nach Regnault, Neumann, Pfaundler) hervorgebracht, muß fortgesetzt werden, bis das darin befindliche Thermometer einige Zeit hindurch eine stationäre Temperatur angezeigt hat. Der erhitzte Körper wird nach Entfernung des Verschlusses aus dem ersten Apparat durch Herablassen am Faden in das untergeschobene Kalorimeter gebracht, dessen Thermometer zu diesem Zweck geeignet gebogen sein mag, aus dem zweiten durch rasches Umkehren.



1. 2.

Wasserkalorimeter.

Ein Gefäß aus poliertem, tunlichst dünnem Blech (Messing, Silber) steht auf einer die Wärme schlecht leitenden Unterlage, etwa Korkschneiden oder gekreuzten Fäden, in einer Schutzhülle, z. B. aus Holz (Fig.) oder, vollkommener, aus innen poliertem Blech, umgeben von einem konstant temperierten größeren Wasserbade. Ein Deckel dient, um Verdunstungsfehler zu vermeiden. Während der Beobachtung wird gerührt. Über Thermometer-Korrektionen s. S. 155, 156 u. 161.



Ist Wasser nicht anwendbar, so nimmt man eine andere Flüssigkeit (z. B. Anilin, Toluol) von bekannter spezifischer Wärme (Tab. 12).

Man arbeitet mit kleinen Temperaturänderungen.

Das in der Empfindlichkeit beschränkte, durch Kaliberfehler oder bei feiner Kapillare durch Unfolgsamkeit oft unzuverlässige Quecksilberthermometer kann vorteilhaft durch ein elektrisches Thermometer ersetzt werden; **43**, besonders **43** II.

Wasserwerte. Die Wärmemenge, welche einen Körper um 1° erwärmt, d. h. numerisch die ihm kalorimetrisch äquivalente Wassermenge, heißt sein Wasserwert. Zu der Masse des Wassers im Kalorimeter ist zu addieren der Wasserwert

des Gefäßes, des Rührers und des Thermometers. Die ersteren beiden werden als Masse mal spezifische Wärme berechnet (Tab. 11).

Der **Wasserwert des Thermometers** wird empirisch bestimmt. Man erwärmt es, etwa in erhitztem Quecksilber oder auch über der Flamme (um etwa 30°) zur Temp. Θ, taucht es rasch in eine gewogene, kleine Wassermenge μ, deren Temp. ϑ dadurch auf ϑ' steige. Dann ist $\mu \cdot (\vartheta' - \vartheta)/(\Theta - \vartheta')$ der Wasserwert.

Meist wird es genügen, den Wasserwert des Thermometers aus dem Volumen v cm³ des eintauchenden Teiles des Thermometers als $0{,}46 \cdot v$ zu berechnen. 1 cm³ Quecksilber hat nämlich den Wasserwert $13{,}6 \cdot 0{,}033 = 0{,}45$, und 1 cm³ Glas hat zufällig nahe denselben Wert, nämlich $2{,}5 \cdot 0{,}19 = 0{,}47$ (Tab. 11 u. 12). Man bestimmt v durch Einsenken in die Flüssigkeit eines kalibrierten Rohres oder eines auf der Wage äquilibrierten Gefäßes.

Für w ist dann in obiger Formel einzusetzen die Summe der so ein für allemal bestimmten Wasserwerte der festen Teile des Kalorimeters, vermehrt um das Nettogewicht des zur Füllung gebrauchten Wassers.

Empirische Ermittelung des Wasserwertes. Das vorige Verfahren ist nur dann genau, wenn die Wärmekapazität der Wasserfüllung relativ groß ist, besonders auch im Vergleich mit den herausragenden Teilen. Empirisch läßt sich der gesamte Wasserwert mittels einer eingeführten bekannten Wärmemenge bestimmen, entweder mittels eines eingebrachten Körpers von bekannter Wärmekapazität (vgl. auch II), oder mittels Erwärmung durch elektrische Energie (49 II) oder auch aus der Wärmemenge einer im Kalorimeter ausgeführten chemischen Reaktion von bekannter Wärmetönung (51). Vgl. auch Jaeger u. von Steinwehr, Verh. d. D. Phys. Ges. 1903, 50 u. 353.

Endlich kann noch als Behälter des Körpers ein Körbchen oder Gefäß in Betracht kommen. Sein Wasserwert w' wird wieder als das Produkt aus Masse und spez. Wärme gefunden.

Vollständige Formel. Nach dem vorigen gilt zur Berechnung der sp. W. aus den beobachteten Größen m, w, w', τ, T u. t (S. 195 u. 197) die Beziehung $(cm + w')(T - \tau) = w(\tau - t)$, also ist

$$c = \frac{1}{m}\left(w\,\frac{\tau - t}{T - \tau} - w'\right). \qquad 1\text{a.}$$

Wärmeaustausch. Der unvermeidliche Wärmeaustausch des Kalorimeters mit der Umgebung wird nach Rumford dadurch eliminiert, daß man die Anfangstemperatur t um ungefähr ebensoviel tiefer als die Zimmertemperatur nimmt, wie die Schlußtemperatur τ höher sein wird. Die zu erwartende Temperaturerhöhung kann durch einen Vorversuch oder, wenn die spez. Wärme ungefähr bekannt ist, durch Rechnung näherungsweise bestimmt werden. Damit dieser Kunstgriff wenigstens angenähert genüge, dürfen die Temperaturänderungen im Kalorimeter eine mäßige Größe (5°) nicht übersteigen. Auch muß die Zeit, welche zum Übergang der Wärme aus dem Körper in das Wasser nötig ist, kurz sein, weswegen man den Körper, besonders wenn er die Wärme nicht gut leitet, in kleinen Stücken anwendet, die etwa auf einen Faden aufgezogen oder in ein Körbchen gefüllt werden, dessen Wasserwert in Rechnung gesetzt wird; vgl. oben.

Einwurfsfreier verfährt man so: Die Anfangstemperatur t des Kalorimeters sei so tief, daß die Endtemperatur τ auch noch ein wenig unter der Temp. der Umgebung bleibt. 5 bis 10 min lang vor dem Einbringen des heißen Körpers beobachtet man das Thermometer etwa jede Minute und leitet daraus und aus der Lufttemperatur den Temperaturgewinn pro Minute und Grad Temperaturüberschuß der Umgebung ab. Das Einbringen des Körpers geschieht nach der Uhr, und man beobachtet nun das steigende Thermometer etwa von 20 zu 20 sek. Hieraus wird der zu korrigierende Temperaturgewinn so berechnet, wie das Beispiel angibt. Während der ganzen Zeit wird gleichmäßig gerührt.

Beispiel.

Wasserwerte: Gefäß u. Rührer aus Messing wogen $\mu = 19$ gr;
sp. W. des Messings $\gamma = 0,093$; also Wasserwert $\gamma\mu = 19 \cdot 0,093 = 1,8$ gr.
Das Thermometer wurde, auf 45° erwärmt, in 20 gr Wasser von 16,25° gebracht; die Temp stieg auf 17,10°. Also Wasserwert $= 20 \cdot (17,10 - 16,25) : (45 - 17,1) = 0,6$ gr.
Das Wasser wog netto 74,0 gr, also $74,0 + 1,8 + 0,6 = w = 76,4$ gr.

Der zu bestimmende Körper wog	$m = 48,3$ gr.
Temperatur des erhitzten Körpers	$T = 99,7°$.
Anfangstemperatur des Wassers	$t = 12,05°$.
Gemeinschaftliche Endtemperatur	$\tau = 17,46°$.

Ohne Korrektion rechnet man $c = \frac{76{,}4\,(17{,}46 - 12{,}05)}{48{,}3\,(99{,}70 - 17{,}46)} = 0{,}1041.$

Korrektion wegen Wärmeaustausches.

Umgebungstemperatur = 18,0°.

Vorperiode	25 min	26	27	28	29	30 min	Mittel
Uhr	25 min	26	27	28	29	30 min	Mittel
Kalorimeter	11,54°	11,65	11,75	11,86	11,96	12,05°	11,80°.

Das Thermometer stieg also, während die Mitteltemperatur um 6,2° unter der Umgebung lag, in 5 min um 0,51°. Folglich beträgt der Temperaturgewinn pro Grad Überschuß 0,51/(5·6,2) = 0,0165 °/min. Auf 30 min 0 sek wurde der heiße Körper eingebracht, der Heizapparat sofort wieder entfernt und nun unter beständigem Rühren beobachtet:

um	30′	20″	40″	31′	20″	40″	32′	20″	40″	33′	Mittel
	12,05°	14,7	15,9	16,8	17,2	17,3	17,4	17,44	17,45	17,46°	16,6°.

In diesen 3 min lag die Temp. also im Mittel 1,4° unter der Umgebung; von der Temperaturzunahme entstammte also der Wärmeaufnahme aus der Umgebung der Anteil 0,016·3·1,4 = 0,07°. Das beobachtete $\tau = 17{,}46°$ ist also um − 0,07° zu korrigieren, gibt τ korrig. = 17,39°, und hiermit aus obiger Formel c korrig = 0,1027.

Bei der Berechnung der Mitteltemperatur für die Korrektion sind die erste und die letzte Beobachtung mit halbem Gewicht eingesetzt worden, d. h. man hat ihr Mittel 14,8° mit den übrigen acht Werten zum Mittel vereinigt. Bei sehr genauen Bestimmungen stellt man den Gang der Temperatur graphisch dar und entnimmt daraus die Temperaturen etwa für 5 15 25 sek usw.

Ist das Kalorimeter offen, so geht durch Verdunstung etwas Wärme verloren, wodurch das Verfahren einer Ergänzung durch Beobachtung des Temperaturganges nach der Erwärmung bedürftig wird. — Ausführliche Anweisungen über die Verbesserung der Resultate wegen Wärmeverlusts siehe z. B. Müller-Pfaundler, Physik II 2 S. 326; Wüllner Exp.-Physik II, 5. Aufl. S. 453, 1896.

Über Bestimmung einer sp. Wärme unter 0° vgl. Behn, Wied. Ann. **66**, 237. 1898; Ann. d. Ph. 1, 257. 1900; Schmitz, Proc. R. S. 72, 177. 1903.

II. Flüssigkeiten.

1. Die spezifische Wärme läßt sich hier gerade wie unter I ermitteln, wenn man die Flüssigkeit in ein Gefäß eingeschlossen hat, sie mit diesem erhitzt und in ein Wasserkalorimeter einsenkt, wobei man den Temperaturausgleich durch Drehen und Schütteln beschleunigt. Der Wasserwert des Gefäßes wird in Rechnung gesetzt.

2. Verfügt man über eine größere Flüssigkeitsmenge, so füllt man mit ihr das Kalorimeter, erhitzt einen gewogenen, die Wärme leicht abgebenden Körper (Körbchen mit Kupferstücken) von bekannter spezifischer Wärme und verfährt wie oben. Bedeuten

M, T, C Gewicht, Temperatur und spezifische Wärme des erhitzten Körpers,
t die Anfangstemperatur der Flüssigkeit,
τ die Endtemperatur,
m das Nettogewicht der Flüssigkeit,
w' den Wasserwert der festen Teile des Kalorimeters,

so ist die gesuchte spezifische Wärme c der Flüssigkeit, und zwar die mittlere zwischen t und τ,

$$c = C\frac{M}{m}\frac{T-\tau}{\tau-t} - \frac{w'}{m}. \qquad 2.$$

3. Als Erhitzungskörper kann bequem eine Glaskugel mit einigen 100 gr Quecksilber dienen, welche ein enges Steigrohr mit einer hoch (80°) und einer niedrig gelegenen (25°) Marke hat. Man erhitzt im Quecksilberbade oder vorsichtig über der Flamme bis über die höhere Marke, läßt dann abkühlen und senkt im Augenblick der Einstellung auf diese Marke den Erhitzungskörper in die Flüssigkeit ein. Wenn, unter Umrühren, die niedrige Marke erreicht ist, hebt man den Körper heraus und beobachtet nun wieder die Temperatur der Flüssigkeit. (Andrews; Marignac; Pfaundler.)

m, w', t, τ mögen die obigen Bedeutungen behalten; ein gleicher Versuch, bei welchem man denselben Erhitzungskörper in eine Wassermenge w in demselben Gefäß bringt, ergebe die Erwärmung des Wassers von t' auf τ', dann ist offenbar

$$c = \frac{1}{m}\left[(w+w')\frac{\tau'-t'}{\tau-t} - w'\right]. \qquad 3.$$

Denn es ist $(cm + w')(\tau - t) = (w + w')(\tau' - t')$.

Die Endtemperaturen t und t' müssen in den beiden Versuchen ungefähr gleich sein, sonst entsteht eine Korrektion dadurch, daß die Endvolumina des Glases nicht gleich groß sind.

Vgl. hierüber Wiebe u. Gumlich, Wied. Ann. 66, 530. 1898; Pfaundler ib. 67, 439. 1899.

49. Spezifische Wärme. Elektrische Methode.

I. Vergleichung spezifischer Wärmen von Flüssigkeiten (Pfaundler).

Zwei Flüssigkeitsmengen werden in gleichen Gefäßen, gegen Wärmeverlust möglichst geschützt (Figg. S. 196 u. 208), durch

denselben elektrischen Strom (80) erwärmt, welcher gleiche Drahtwiderstände aus einer Legierung durchfließt, deren Leitvermögen von der Temperatur möglichst wenig beeinflußt wird (Tab. 30), etwa aus Platinsilber. Zweckmäßig wählt man die beiden Mengen so, daß die zu erwartenden Temperaturzunahmen ungefähr gleich sind. Man nehme ferner die Anfangstemperaturen etwa um ebensoviel niedriger als die Zimmertemperatur, wie die Schlußtemperaturen höher sein werden. Hierdurch wird die Wärmeabgabe während des Versuches sowie die Änderung des Drahtwiderstandes durch die Temperatur einigermaßen eliminiert.

Die Flüssigkeitsmenge m samt dem Wasserwert w ihres Gefäßes und Thermometers erwärme sich von t auf τ, die andere Menge m' samt zugehörigem Wasserwert w' der festen Teile von t' auf τ', dann ist $(cm+w):(c'm'+w')=(\tau'-t'):(\tau-t)$, also

$$c=\frac{1}{m}\left[(c'm'+w')\frac{\tau'-t'}{\tau-t}-w\right]. \qquad 1.$$

c' wird $=1$, wenn die Flüssigkeit m' Wasser ist.

Etwaige Unsymmetrien eliminieren sich am einfachsten durch Vertauschen der Flüssigkeiten und Mittelnehmen aus den beiden gefundenen Resultaten.

Fehlerquellen sind darin gegeben, daß ein Teil des Stromes von dem Drahte ab durch die Flüssigkeit gehen könnte und daß die Temperatur der Drähte, also auch ihr Widerstand, durch ungleiche Wärmeabgabe verschieden sein kann. Reines Wasser leitet sehr wenig; ein Nebenschluß ist bei edelen Metallen, schon der Polarisation wegen, nicht zu fürchten, wenn die Spannung im Drahte unter 2 V bleibt (80 I). Man nehme die Widerstände nicht zu groß. — Das Widerstandsverhältnis R/R' der beiden Drähte läßt sich während des Versuches durch Abzweigung (91 II, 92) ermitteln, oder auch indem die Drähte als Zweige einer Wheatstone'schen Brücke (93) angeordnet werden. Man hat dann $(\tau'-t')/(\tau-t)$ mit R/R' zu multiplizieren.

Vgl. Müller-Pfaundler, Lehrbuch der Physik, 8. Aufl. II 2 S. 311 Pfaundler, Wien Sitz. Ber. 1891. 352.

II. Absolute Bestimmung. Elektrische Kalorimetrie.

Flüssigkeiten. Der Strom i A entwickelt in 1 sek die Wärmemenge $0{,}239\,i^2r = 0{,}239\,ie$ gr-Kal, wenn er den Widerstand r Θ durchfließt, bez. wenn seine Endspannung e V beträgt. Vgl. Anh. 30.

1. Der Strom erwärme unter den bei I beschriebenen Verhältnissen und Vorsichtsmaßregeln in z sek die Flüssigkeitsmenge m gr im Gefäß vom Wasserwerte w um t Grad, folglich ist $(cm + w)t = 0{,}239\,i^2rz$, also

$$c = 0{,}239\,\frac{i^2rz}{mt} - \frac{w}{m} \qquad 2.$$

Der Strom wird etwa mit einem Weston-Strommesser (85, 2) gemessen. Stromschwankungen eliminiert man durch zeitlich regelmäßiges Ablesen und Mittelnahme der beobachteten i oder, wenn die Schwankungen groß sind, von i^2.

Zugleich muß der Wärmeaustausch mit der Umgebung berücksichtigt werden, genähert etwa durch den Rumford'schen Kunstgriff oder durch das Verfahren im Beispiel S. 199, wobei jedoch die größere Zeitdauer die Schwierigkeit erhöht.

Die Versuchsdauer läßt sich durch große Stromstärke einschränken. Dabei wird aber der Drahtwiderstand unsicher und man mißt statt seiner besser mit einem Spannungsmesser (**101** bis **103**) die mittlere Spannung e an den Drahtenden während des Versuchs in Volt und rechnet mit ie statt mit i^2r.

2. Strömungsmethode (Callendar). Die durch eine enge Glasröhre R ($^1/_2$ m lang, 2 mm weit) strömende Flüssigkeit wird durch einen elektrischen Strom, falls die Flüssigkeit nicht leitet, in einem durchgezogenen Platindraht, sonst in der Flüssigkeit selbst, erwärmt. Man bestimmt im Beharrungszustande die Temperaturen ϑ_1 und ϑ_2 am Eingang und Ausgang, sowie die zugeführte elektrische Leistung ie (vgl. unter Nr 1). Die in weiteren Ansätzen der Strömungsröhre untergebrachten Thermometer sind von Metallröhren umgeben, die den Strom zuleiten. Die Strömungsröhre liegt in einem evakuierten Cylinder E, dessen Wand von einem Wassermantel M auf der Temperatur ϑ_1 gehalten wird



Bezeichnet m die in 1 sek durchfließende Menge, so gilt (vgl. oben)

$$(cm + h)(\vartheta_2 - \vartheta_1) = 0{,}239\,ie.$$

Der Wärmeverlust an die Umgebung $h(\vartheta_2 - \vartheta_1)$ wird eliminiert durch Variation von m und ie unter Konstanthaltung des Temperaturfalles $\vartheta_2 - \vartheta_1$.

Callendar, Phil. Trans (A) 199, 55; Barnes ib. 199, 149. 1902.

Über d. Schmelzung von Eis s. auch Smith, Phys. Review 17, 193. 1903.

Feste Leiter. Über ein Verfahren, welches die in einem Metallcylinder durch einen gemessenen Strom hervorgebrachte zeitliche Temperaturänderung benutzt, vgl. Jaeger u. Diesselhorst, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III 269. 1900

49a. Spezifische Wärme. Erkaltungsmethode. (Dulong und Petit.)

Man vergleicht die Zeiten, in denen Körper unter denselben Umständen sich um gleichviel abkühlen. Höchstens bei Flüssigkeiten oder bei gut leitenden festen Körpern können brauchbare Resultate entstehen.

Ein kleines erwärmtes Gefäß aus dünnem polierten Metall mit einem Thermometer und der eingegossenen oder gepulvert fest eingestampften Substanz kühlt sich in einem luftleeren Metall-Behälter ab. Die Umgebung ist durch eine größere Wassermenge oder schmelzendes Eis auf konstanter Temperatur erhalten Beträchtliche Mengen Flüssigkeit kann man auch in einem geschlossenen Metallgefäße in der Luft beobachten.

Es sei der Gang des Temperatur-Überschusses über die Umgebung bei der Füllung mit zwei verschiedenen Substanzen beobachtet worden. m und M seien die eingefüllten Mengen, M etwa Wasser, also $C=1$, w der Wasserwert des Gefäßes mit dem Thermometer (S. 197), z und Z die Abkühlungszeiten von demselben Anfangs- zu demselben Endüberschuß, am besten der Anfangsüberschuß 2 bis 3 mal so groß als der letzte, c und C die beiden sp. Wärmen, so gilt $(mc+w):(MC+w) = z:Z$, also

$$c = 1/m \cdot [(MC+w)\,z/Z - w].$$

Die erste Zeit nach dem Erwärmen läßt man vor der Beobachtung verstreichen. Am besten werden jedesmal die Temperaturen von etwa 20 zu 20 sek notiert, mit der Zeit als Abszisse, der Temperatur als Ordinate in einer Kurve dargestellt, und daraus die Zeiten entnommen, welche gleichen Anfangs- und Endwerten entsprechen. Aus einem Paare von Beobachtungsreihen läßt sich so eine Anzahl von Bestimmungen ableiten, aus denen ein Mittel genommen wird. Siehe auch 3 III.

Man kann auch in zwei möglichst kongruenten Gefäßen beide Versuche gleichzeitig ausführen. Wiederholt man sie noch unter Auswechselung der Flüssigkeiten und nimmt die Mittel der erhaltenen Zeiträume für jede Flüssigkeit, so wird eine Ungleichheit der Gefäße eliminiert.

50. Spezifische Wärme. Eis-Kalorimeter.

Zur Verwandlung eines Grammes Eis von 0° in Wasser von 0° werden 80,0 gr-Kal$_{15}$ = 335 Wattsek erfordert (Schmelzwärme des Eises).

1 gr Eis von 0° hat das Volumen 1,0908 cm³, 1 gr Wasser von 0° dagegen 1,0001 cm³. Wenn das Volumen sich um 1 cm³ vermindert, so ist also eine Eismenge 1/0,0907 = 11,03 gr geschmolzen.

Altes Verfahren (Lavoisier und Laplace). Man bringt den auf die Temperatur t erwärmten Körper vom Gewicht m in trockenes Eis von 0°, welches sich selbst in einer Umgebung von schmelzendem Eise befindet. Wird durch den Körper das Gewicht M geschmolzen, so ist seine spezifische Wärme

$$c = \frac{M}{m} \frac{80{,}0}{t}. \qquad 1.$$

Um die geschmolzene Menge einigermaßen genau zu bestimmen, sind wegen der Adhäsion des Wassers am Eise große Mengen des Körpers nötig.

Für eine genäherte Bestimmung dient auch ein Eisstück von ebener Oberfläche mit einer Höhlung, in welche der erhitzte Körper eingelegt wird. Während dessen Abkühlung bedeckt man die Platte mit einem ebenen Eisdeckel. Nachher wird das geschmolzene Wasser mit einem kalten Schwämmchen ausgetupft und gewogen (Black).

Ähnlich kann man sp. Wärmen unter 0° bestimmen, indem man den abgekühlten Körper m in Wasser von 0° eintaucht und den gebildeten Eismantel M wägt. Vgl. S. 199 Schmitz l. c.

Eiskalorimeter von Bunsen (1870).

Die geschmolzene Menge Eis wird aus der Volumen-Abnahme v bestimmt, welche beim Schmelzen eintritt. Ist v dadurch bewirkt, daß m gr eines Körpers sich von t auf 0° abkühlen, so ist nach obigem die spez. Wärme des Körpers

$$c = \frac{v}{m} \frac{11{,}03 \cdot 80{,}0}{t} = \frac{v}{m} \frac{882}{t}. \qquad 2.$$

Das Bunsen'sche Kalorimeter besteht aus Glasteilen mit dem aufgekitteten eisernen Aufsatz *d*. Die Teile *b, c, d* und das Skalenrohr *s* sind bis zu den punktierten Linien mit Quecksilber gefüllt. Über letzterem befindet sich in *b* ausgekochtes Wasser; das Eis in demselben wird vor dem Versuche mittels einer in *a* eingefüllten Kältemischung gebildet.

Zum Gebrauch wird das Instrument mit reinem schmelzenden Eis oder Schnee umgeben und das Skalenrohr *s* so weit eingedrückt, ev. mit einem doppelt durchbohrten Hahn der Quecksilberstand so reguliert, daß die Quecksilbersäule eine hinreichende Länge vor der Teilung hat. Nachdem das Gefäß *a* bis *α* mit Wasser oder einer anderen Flüssigkeit gefüllt worden

ist, welche den zu untersuchenden Körper nicht auflöst, erhitzt man diesen (Fig. 2 S. 196), läßt ihn in a hineinfallen (wobei ein Baumwollenpfropf auf dem Grunde des Probierröhrchens dessen Beschädigung verhindert) und verschließt a mit einem Kork. Das Quecksilber in s nehme nach d gehen um p Sk.-T. einen stationäre Ist das Volumen eines Teiles $=$ A t die Temperatur des Skalenroh $v = A(1 - 0{,}00018\,t)p$.

Ohne Kalibrierung kann man den K eines Skalenteils folgendermaßen Ein leichtes Glaskügelchen (0,5 bis auf einen kleinen Ausdehnungsraum gewogenen Wassermenge gefüllt, mit beschwert, wird zur Temperatur t' erl und eingebracht. w sei die Summe werte (über Glas vgl. 8, 5), p' die erfolgende Skalenverschiebung; dann entspricht dem Zurückziehen des Quecksilbers um 1 Sk.-T. die Wärmemenge $K = wt'/p'$. — Bewirkt nun ein zur Temp. t erhitzter Körper von m gr bei der Abkühlung p Sk.-T. Verschiebung, so ist seine spez. Wärme

$$c = K \cdot \frac{p}{mt}. \qquad 3.$$

Ebenso läßt K sich mittels einer durch einen elektrischen Strom zugeführten bekannten Wärmemenge bestimmen; vgl. **49** II und S. 194. Ein Strom von i A durchfließe einen durch das Gefäß a gehenden Drahtwiderstand von $r\,\Theta$ oder zeige an dessen Enden die Spannung e V; in z sek bewirke er die Skalenverschiebung p', so ist $K = 0{,}239\,i^2 rz/p'$ oder $= 0{,}239\,eiz/p'$.

Wägungsverfahren. Anstatt den Quecksilberfaden im Rohre abzulesen, taucht man das ganz gefüllte, geeignet gebogene Rohr in ein Gefäß mit Quecksilber ein und bestimmt die bei dem Einbringen des warmen Körpers eingesaugte Quecksilbermenge durch Differenzwägung des Gefäßes. 0,01541 gr Quecksilber entsprechen der 15°-Gramm-Kalorie.

Geringe Verunreinigungen des Schnees oder Eises, womit das Kalorimeter umhüllt ist, genügen, um den Quecksilberstand

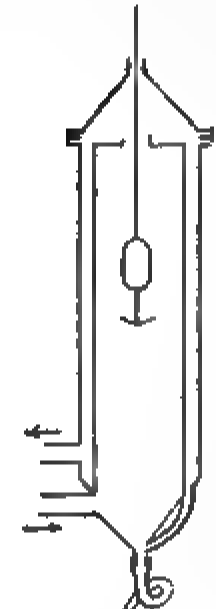
allmählich zu verschieben. Man beobachtet die Bewegung und setzt sie für die Beobachtungszeit in Rechnung.

Oder man setzt durch Probieren mittels Druckvermehrung, indem man die Mündung des Quecksilbers hebt, den Gefrierpunkt des inneren Wassers so weit herunter, daß das Wandern des Fadens aufhört (Dieterici). Das angesetzte Kapillarrohr ist zu diesem Zwecke zweimal gebogen, so daß man den vorderen horizontalen Teil mit der Ableseskale oder die Mündung mit dem Gefäß höher oder tiefer stellen kann.

Vgl. Bunsen, Pogg Ann. 141, 1. 1870; Dieterici, Wied. Ann. 33, 418. 1888; 38, 1 1889; Schuller und Wartha ib. 2, 359. 1877, wo auch über die Bestimmung chemischer Verbindungswärmen gehandelt wird.

50a. Spezifische Wärme. Dampf-Kalorimeter (Joly; Bunsen).

Die Dampfwärme des Wassers, d. h. die Wärmemenge, welche die Masseneinheit Wasserdampf bei ihrer Kondensation zu Wasser von gleicher Temperatur abgibt, ist bei Atmosphärendruck gleich 539 Kal_{18}.



Der Körper m befindet sich, an einer Wage mit einem feinen Drahte aufgehängt, in einem Raum, in welchem man plötzlich durch ein weites Rohr Dämpfe von siedendem Wasser so lange einleitet, bis der Körper sich zur Temperatur des Wasserdampfes erwärmt hat. Die auf dem Körper kondensierte Wassermenge w wird gewogen. Die spezifische Wärme ist, wenn der Körper die Anfangstemperatur t_0 hatte und T die Temperatur des Wasserdampfes ist (Tab. 14a),

$$c = \frac{w}{m} \frac{539}{T - t_0}.$$

Der neben dem Aufhängedraht entweichende Dampf wird durch die Wasserluftpumpe oder einen erwärmten Schornstein mittels eines Rohres neben der mit einem durchbohrten Gipspfropf ausgekleideten Öffnung abgesaugt. Gegen Abtropfen von Wasser schützt ein unten an dem Körper befestigtes dünnes Platinblech, dessen eigener Wasserwert von mc abgerechnet wird (48 I; Tab. 11). Vor der Wägung wird der Dampfstrom gemäßigt, weil er sonst das scheinbare Gewicht beeinträchtigt.

Die Methode muß mit großer Umsicht gehandhabt werden, kann dann aber sehr genaue Werte liefern. — Vgl Joly, Proc. R. S. 41,

352. 1886; 47, 218. 1889; Bunsen, Wied. Ann. 31, 1. 1887; Schükarew, ib. 59, 229. 1896. Ein Vorschlag zu einem Ätherdampfkalorimeter bei Neesen, ib. 39, 131. 1890.

50b. Spezifische Wärme der Gase.

a) Für konstanten Druck (Delaroche u. Bérard; Regnault).

Man leitet die erhitzten Gase in starkem Strome durch ein Wasserkalorimeter. Der aus dem Gasometer austretende Gasstrom, mit Hilfe eines Manometers durch einen Regulierhahn möglichst konstant erhalten, wird in einem von einem Heizbade umgebenen engen Schlangenrohr erhitzt. Er tritt von hier in das Schlangenrohr des Wasserkalorimeters durch eine Verbindung, die dem Gasstrome wenig Wärme entziehen, dem Kalorimeter von dem Erhitzungsapparat aus wenig Wärme zuleiten soll; die erstere Forderung ist besonders dringend, wenn die Eintrittstemperatur des Gases durch ein Thermometer im Flüssigkeitsbade bestimmt wird. Vorzuziehen ist ein Thermoelement unmittelbar vor dem Eintritt in das Kalorimeter.

Durch besondere Messungen muß man sich überzeugen, ob das Gas allen Wärmeüberschuß an das Kalorimeter abgegeben hat. Die bei starkem Gasstrome geforderten sehr langen Schlangenrohre ersetzt man zweckmäßig durch weitere mit Metallspänen gefüllte Rohre.

Korrektionen. Die dem Kalorimeter unabhängig von dem Gasstrom zugeführte bez. entzogene Wärmemenge wird einmal durch die Wärmeleitung von dem Erhitzungsgefäß bedingt, sodann durch Strahlung usw. aus der Umgebung. Der erste Teil kann wegen der verhältnismäßig geringen Temperaturänderung des Kalorimeters während der Versuchsdauer als konstant angenommen werden; er betrage k/min. Der zweite ist proportional der Differenz der Kalorimeter-Temperatur gegen die Temperatur ϑ der Umgebung (die passend durch einen konstant temperierten Wassermantel gebildet wird). a und k bestimmt man ähnlich wie S. 199, indem man das Kalorimeter vor und nach dem Gasdurchgang etwa je 10 min lang beobachtet. Steigen die Temperaturen des Kalorimeters, t in der Anfangsperiode und τ in der Endperiode, in jeder Minute um Δt bez. $\Delta\tau$, so ist

$$\Delta t = (\vartheta - t)a + k \quad \text{und} \quad \Delta\tau = (\vartheta - \tau)a + k,$$

wodurch a und k bestimmt sind. Sie dienen zur Korrektion der beobachteten Endtemperatur des Kalorimeters.

Schlußrechnung. Bezeichnet τ die so korrigierte Endtemperatur, w die um den Wasserwert der Wand usw. vermehrte Masse des Wassers, ferner m die Masse des durchgegangenen Gases, T seine Anfangstemperatur und $\Theta = \frac{1}{2}(t + \tau)$ seine mittlere Endtemperatur, so gilt für die spez. Wärme

$$c_p = \frac{w}{m}\,\frac{\tau - t}{T - \Theta}.$$

Regnault, Relation des expér. II. 1862: Luft, O, H, CO, CO_2, NO, NO_2, C_2H_4, C_2H_2, SO_2, Cl, NH_3 u. a. bis 200°; E. Wiedemann, Pogg. Ann. 157, 1. 1876: Luft und H zwischen 20 und 100° und CO_2, CO, C_2H_4, NO_2, NH_3 bis 200°; Witkowski, Journ. de phys. (3) 5, 123. 1896: Luft zwischen + 100° und — 170°. Beobachtungen bei höheren Drucken außer bei Regnault u. Witkowski auch bei Lussana, Cim. (3) 36 (4) 1, 3, 6, 7. 1894 bis 1898. — S. auch Tab. 12a.

b) Für konstantes Volumen mit dem Dampfkalorimeter (Joly).

An der Wage hängen zwei möglichst gleiche Hohlkugeln aus Kupfer ($2r = 7$ cm), von denen die eine mit dem zu messenden Gase unter hohem Druck (bis 30 Atm.) gefüllt wird. Zu vergleichen sind bei Zimmertemperatur in Luft die Gewichte der Gefäße erstens beide leer, dann das eine gefüllt; schließlich wird noch nach Zutritt des Dampfes gewogen. Da von dem Gasinhalt höchstens etwa $^1/_{13}$ des kondensierten Dampfes stammt, so werden außer sehr genauer Wägung Korrektionen verlangt, besonders wegen der Ausdehnung bei der Erwärmung auf 100° und der dadurch bewirkten Vergrößerung des Auftriebs in der Dampfatmosphäre.

Joly, Phil. Trans. (A) 182, 73. 1891; 185, 943 und 961. 1894.

Das Verhältnis der beiden sp. Wärmen c_p/c_v liegt zwischen 1,26 u. 1,66 (Tab. 12a). Über seine Bestimmung aus der Abkühlung beim Ausdehnen s. besonders Röntgen, Pogg. Ann. 148, 580. 1873; Lummer u. Pringsheim, Wied. Ann. 64, 555. 1898. — Vgl. ferner 50.

51. Andere kalorimetrische Messungen.

Thermochemische Messungen. Zur Bestimmung der Wärmetönung bei chemischen Vorgängen eignet sich oft das Eiskalorimeter, in welchem man die auf 0° vorgekühlten Körper den chemischen Prozeß vollziehen läßt.

Ein einfacherer Apparat ist z. B. der folgende (Nernst). Innerhalb eines weiteren Glases ruht auf Korkschneiden ein gegen ein Liter fassendes Becherglas. Wärmestrahlung wird durch Versilberung der einander zugewandten Flächen eingeschränkt. Am besten ist das Doppelgefäß mit evakuiertem Mantel (8, 30); der Wasserwert wird durch eine Reaktion von schon bekanntem Zahlenwert in einer gewogenen Wassermenge ermittelt. Durch einen gut schließenden Holzdeckel gehen ein empfindliches Thermometer, ein Rührer und ein dünnwandiges Reagierglas, in welchem die Reaktion vor sich geht. Will man Verdünnungs- oder Lösungswärmen messen, so kommt die kon-

zentriertere Lösung oder der zu lösende Körper, eventuell fein gepulvert, in den Reagiercylinder, dessen Boden nach erfolgtem Temperaturausgleich durchstoßen wird. Man operiert mit kleinen Temperaturänderungen.

Aus den letzteren wird die entwickelte Wärmemenge in folgender Weise berechnet (48 I). Die Flüssigkeitsmenge m im Becherglas habe die spez. Wärme c, der eingebrachte Körper m' habe c'; die Summe der Wasserwerte von Becherglas, Reagierglas, Rührer und Thermometer sei $= w$ (S. 197), die Temperatur steige von t auf τ, dann beträgt die entwickelte Wärmemenge $(cm + c'm' + w)(\tau - t)$. Vorsichtsmaßregeln und Korrektionen wegen Wärmeaustausch treten ebenso herein wie S. 198.

Nernst, Theor Chemie. 4. Aufl. S. 585 1903

Absorptionswärmen von Gasen bestimmt man im Prinzip ähnlich wie oben, aber anstatt im Becherglase in einem der Spritzflasche ähnlichen Glaskolben, durch welchen das Gas in die Flüssigkeit tritt. Die absorbierte Gasmenge kann durch Volummessung oder durch Wägung der Flasche vor und nach dem Versuch auf einer empfindlichen Wage oder durch chemische Analyse bestimmt werden.

Schmelzwärme. Eine geschmolzene Menge m des Körpers von der Temperatur t werde in das Eiskalorimeter (50) gebracht. Der Schmelzpunkt sei $= \tau$ (höher als 0^0), die spez. Wärmen im flüssigen und festen Zustand seien bekannt gleich c und c'. Die geschmolzene Menge Eis sei $= M$. Die Schmelzwärme ist dann

$$\varrho = 80{,}0\, M/m - ct + (c - c')\tau.$$

Liegt der Schmelzpunkt unter 0^0, so kann man den Körper fest in das Eiskalorimeter einführen, so daß er in diesem schmilzt, und dann ähnlich rechnen.

Statt $80{,}0\, M$ kann man setzen $882\, v$, wenn v die Volumänderung durch das Schmelzen des Eises bedeutet (50).

Verdampfungswärme. Mit dem Eiskalorimeter. Eine Dampfmenge m von der Siedetemperatur t schmelze bei ihrer Kondensation und Abkühlung auf 0^0 die Eismenge M. Die spezifische Wärme der Flüssigkeit sei $= c$. Dann berechnet sich die Dampfwärme $\sigma = 80{,}0\, M/m - ct$. Die Verdichtung des Dampfes geschieht in einem Schlangenrohr mit einem kleinen Kühlgefäß am Ende. Die Messung ist leicht Fehlerquellen unterworfen.

Ähnlich kann man das Wasserkalorimeter anwenden (Regnault).

Über einen kleinen Dampfwärmemesser mit Wasserkalorimeter s. Berthelot, Thermochem. Mess., S. 63. — S. auch Louguinine in C. R. u. Ann. chim. phys. seit 1894.

Elektrisches Verfahren. Vgl. auch 49. Durch eine abgewogene Flüssigkeitsmenge in einem zunächst verschlossenen Gefäß ist ein elektrischer Heizdraht geführt, etwa eine geeignet gestaltete kleine Glühlampe. Das Gefäß ist von siedendem Dampf der gleichen Flüssigkeit umspült und wird zuerst hierdurch bis zur Siedetemperatur erwärmt. Nun wird das Gefäß geöffnet, dann ein Strom von i A, während die Dampfheizung fortdauert, z sek lang durch den Heizdraht geschickt und nach dem Erkalten durch Wägung die verdampfte Menge m bestimmt. Der Drahtwiderstand betrage r Θ, bez. seine Endspannung e V. Dann ist

$$\sigma = 0{,}239 \frac{i^2 r z}{m} \quad \text{bez.} \quad = 0{,}239 \frac{e i z}{m}.$$

Für i (81 bis 88) und e (80 II; 100, 101) werden zeitliche Mittelwerte eingesetzt.

Vgl. Marshall und Ramsay, Phil. Mag. (5) 41, 38. 1896 und 43, 27. 1897, wo Dampfwärmen verschiedener Flüssigkeiten mit einander verglichen werden.

Verbrennungswärme. Kalorimetrische Bombe. Die Bombe enthält stark verdichteten Sauerstoff und dient zur Bestimmung der Verbrennungswärme. Der eingebrachte Körper wird durch einen galvanisch glühenden Körper entzündet. Die entwickelte Wärmemenge findet sich aus der Temperaturerhöhung des Wasserkalorimeters, welches die Bombe umgibt. Bei der Berechung ist der Wasserwert (48 I) der Bombe zu dem des Kalorimeters zu addieren.

Gebräuchlich ist die direkte empirische Ermittelung des ganzen Wasserwertes mittels elektrischer Heizung (48 I, 49 II) oder einer in der Bombe ausgeführten Reaktion von bekanntem Heizwert, woraus sich die Konstante der festen Teile nach Abzug der Wasserfüllung ergibt.

Über elektr. Heizung vgl. Jaeger u. v. Steinwehr, Verh. d. D. Phys. Ges. 1903, 50 u. 353.

Es entwickelt 1 gr	Benzoesäure	Naphthalin	Rohrzucker
bei der Verbrennung	6350	9670	3980 gr-Kal.

Vgl. Fischer u. Wrede, Berl Sitz. Ber. 1904, 689. Ebenda zahlreiche andere Bestimmungen und Methoden

Über genauere Vorschriften s. ferner: Thomsen, Thermochem. Unters. Leipzig 1882—1886; Berthelot, Thermochem. Messungen, übers. v. Siebert, Leipzig 1893; Hempel, Gasanalyt. Methoden, 3. Aufl. S. 375. 1900; Louguinine, Beschreib. d Hauptmethoden usw. Berlin 1897.

Zur Bestimmung des Heizwertes von Leuchtgas dient das Kalorimeter von Junkers, in dem die Wärme an durchströmendes Wasser abgegeben wird. ZS f. Instr. 1895, 408.

51a. Wärmeleitvermögen.

Wärmeleitvermögen λ (Tab. 11) ist die Wärmemenge (Wasser-gr-Kal), welche in der Zeiteinheit durch den Querschnitt Eins (1 cm^2) hindurchfließt, wenn senkrecht zu diesem Querschnitt das Temperaturgefälle Eins stattfindet, d. h. wenn auf der Strecke Eins (1 cm) die Temperaturänderung = Eins (1° C) ist. Den größten bekannten Wert hat Silber, zufällig nahe = 1 gr-Kal $cm^{-1} \cdot Grad^{-1} \cdot sek^{-1}$.

λ nimmt in der Regel mit wachsender Temp. ein wenig ab. Bei den meisten reinen Metallen stehen die L.-V. λ für Wärme und $\varkappa$ für Elektrizität genähert in demselben Verhältnis (G. Wiedemann); wird λ in gr-Kal. $cm^{-1} \cdot Grad^{-1}\, sek^{-1}$ und $\varkappa$ in $Ohm^{-1}\, cm^{-1}$ (80 I) gemessen, so ist bei Zimmertemperatur ungefähr $\varkappa/\lambda = 6 \cdot 10^5$. — Verunreinigungen können λ stark herabdrücken.

λ durch Dichte $\times$ sp. Wärme geteilt heißt Temperaturleitungskoeffizient.

Zur Messung der Temperaturen an bestimmten Orten dienen Thermoelemente (48 I).

Vergleichung von Stäben; alte Methode.

Seiner einfachen Hilfsmittel wegen wird das Verfahren (Despretz, Wiedemann, Forbes) als Übungsaufgabe beschrieben.

Die Stäbe sollen gleichen Querschnitt und gleiche Oberfläche (versilbert oder vernickelt) haben. Man erhitzt, etwa mit siedendem Wasser, das eine oder besser beide Enden des einen Stabes, bis die Temperaturverteilung stationär geworden ist. In drei vor Strahlung geschützten äquidistanten Querschnitten I, II und III werde der Temperaturüberschuß u_1, u_2 und u_3 über die Umgebung gemessen; wir bezeichnen $\frac{1}{2}(u_1 + u_3)/u_2 = n$.

Dasselbe Verfahren auf einen anderen Stab angewandt ergebe an drei ebensoweit abstehenden Punkten die Temperaturüberschüsse U_1, U_2 und U_3 und $\frac{1}{2}(U_1 + U_3)/U_2 = N$.

Dann verhalten sich die Leitvermögen λ und Λ

$$\frac{\Lambda}{\lambda} = \left[\frac{\lg(n + \sqrt{n^2 - 1})}{\lg(N + \sqrt{N^2 - 1})}\right]^2$$

Beweis. Im stationären Zustand empfängt jedes Längenelement dx des Stabes in der Zeiteinheit durch Leitung so viel Wärme, wie es an die Umgebung abgibt. Die letztere Menge ist $\eta u\,dx$, wenn η das auf die Längeneinheit des Stabes bezogene „äußere Leitungsvermögen" vorstellt. Erstere Menge ist $\lambda \cdot q \frac{d^2u}{dx^2} dx$. η und der Querschnitt q sind für beide Stäbe gleich. Die Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert die Differentialgleichung $\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\eta}{\lambda q} u = \alpha^2 u$, wenn $\frac{\eta}{\lambda q} = \alpha^2$ bezeichnet wird. Das allgemeine Integral der Gleichung ist: $u = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x}$, wo C_1 und C_2 zwei von der Erwärmung der Endflächen abhängige Integrationskonstanten bedeuten. Nennt man u_1, u_2, u_3 die Temperaturen für drei je um die Länge l auseinanderliegende Querschnitte, so findet man durch Einsetzen von x, $x+l$ und $x+2l$ für x in obige Gleichungen nach Elimination von C_1 und C_2 die Beziehung $e^{\alpha l} + e^{-\alpha l} = (u_1 + u_3)/u_2 = 2n$ (siehe oben). Hieraus folgt

$$e^{\alpha l} = n + \sqrt{n^2 - 1}, \qquad \text{also } \alpha^2 l^2 = \frac{\eta}{\lambda q} l^2 = [\lg \text{nat}\,(n + \sqrt{n^2 - 1})]^2.$$

Dieselbe Gleichung mit Λ und N für den zweiten Stab aufgestellt und in die erstere dividiert liefert den zu beweisenden Ausdruck.

Die Temperaturen bestimmt man mit Thermoelementen aus ganz feinen zusammengelöteten Drähten (Konstantan — Eisen), deren eine Lötstelle in feine Bohrungen der Stäbe eingesenkt oder auch wohl, durch Gewichtchen an den Drahtenden, auf den Stab aufgedrückt ist, während die anderen Verbindungen in der umgebenden Luft liegen. Vgl. 43 I.

Vgl. noch Wiedemann und Franz, Pogg. Ann 89, 497. 1853.

Das absolute Leitvermögen kann man bei diesem Verfahren angenähert folgendermaßen auf das äußere Wärmeleitvermögen η zurückführen. Es folgt aus der letzten Gleichung in obigem Beweise

$$\lambda = \frac{\eta}{q} \frac{l^2}{[\lg \text{nat}\,(n + \sqrt{n^2 - 1})]^2}.$$

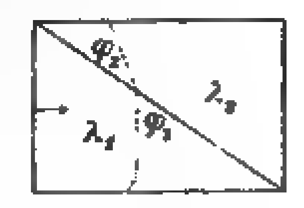
Eine genäherte Bestimmung von η/q kann nun so ausgeführt werden: Man erwärmt den Stab gleichmäßig, legt ihn ebenso hin wie vorher und beobachtet nahe der Mitte mit dem Thermoelement zu mehreren Zeiten $t', t''\ldots$ die zugehörigen Temperaturüberschüsse $u', u''\ldots$ Die letzteren sollen von derselben Größenordnung gewählt werden, wie die $u_1, u_2\ldots$ oben. Nennt man noch s die Dichtigkeit, c die spezifische Wärme des Stabes (Tab. 2 und 11), so ist

$$\frac{\eta}{q} = cs \frac{\lg \text{nat}\, u' - \lg \text{nat}\, u''}{t'' - t'}.$$

Denn wenn in dem Zeitelement dt die Temperatur sich um du ändert, so ist die hierbei von der Längeneinheit des Stabes abgegebene Wärmemenge einerseits $= \eta u\,dt$, andererseits $= -qcs\,du$. Daraus folgt $qcs \cdot du/u = -\eta \cdot dt$ und das Integral dieser Gleichung $qcs \lg \text{nat}\, u = C - \eta t$. Also ist: $qcs\,(\lg \text{nat}\, u' - \lg \text{nat}\, u'') = \eta(t'' - t')$, q. e. d.

Vergleichung von Platten mittels Schmelzkurven (Voigt).

Zwei aneinander gekittete dünne Platten gleicher Dicke (Fig.) sind mit einer sehr dünnen Schicht eines Körpers von gut charakterisiertem Schmelzpunkte (Elaidinsäure mit etwas Wachs-Terpentin gemischt) überzogen. Durch Anlegen einer von den Kanten, am besten der kürzeren Kante des besseren Leiters, an einen erwärmten guten Leiter (amalgamierten Kupferklotz) entsteht ein Wärmestrom, dessen Isothermen in der Trennungslinie geknickt sind, und zwar gilt im stationären Zustande (Fig.) $\lambda_1 : \lambda_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 : \operatorname{tg} \varphi_2$.



Die Winkel werden aus den beiderseitigen Tangenten an der Schmelzkurve ermittelt.

Über die Ausführung sowie die Anwendung auf Kristalle vgl. W. Voigt, Gött. Nachr. 1896, 286; Wied. Ann. 64, 95. 1898; Legierungen: F A. Schulze, Ann. der Ph. 9, 560. 1902.

Absolutes Leitvermögen.

Messungen mit Zeitbestimmung.

Man kombiniert Messungen von örtlichen und zeitlichen Temp.-Änderungen derartig, daß zwei Gleichungen entstehen, aus denen das innere und äußere L.-V. einzeln abzuleiten ist.

a) Der zeitliche Temperaturverlauf wird an zwei Punkten eines Stabes gemessen, der sich abkühlt, nachdem sein eines Ende erwärmt worden war (F. Neumann).

b) Die eine Fläche eines Würfels oder Stabes wird durch plötzliches Bespülen oder Bestrahlen einer dauernden Temperaturänderung ausgesetzt und die Temperatur an Punkten im Innern als Funktion der Zeit gemessen. Das äußere L.-V. hat hier geringen Einfluß (Kirchhoff u. Hansemann).

c) Ein Stabende oder beide Enden werden periodischen Erwärmungen ausgesetzt; die entstehenden Wärmewellen werden in zwei Querschnitten beobachtet (Angström; H. Weber).

d) Ein Stab wird zeitweilig an einem Ende erwärmt und demnächst sich selbst überlassen. Der Temp.-Verlauf wird sowohl während der Erwärmung wie während der Abkühlung an mehreren Punkten gemessen (Lorenz).

Zu b: Kirchhoff und Hansemann, Wied. Ann 9, 1. 1880; Schulze, ib. 66, 207. 1898; Grüneisen, Ann. der Ph. 3, 43. 1900; Giebe, Verh. d. D.

Phys. Ges. 1903, 60. Zu c: Angström, Pogg Ann 114, 513. 1861 und 123. 628. 1864; Heinrich Weber, ib. 146, 257. 1872 Zu d: Lorenz, Wied. Ann. 13, 422 1881 Eine Zusammenstellung Holborn u Wien, ZS d. Ver. Deut. Ing. 40, 45. 1896.

Messung mittels des stationären Zustandes bei elektrischer Heizung (F. K.)

Ein konstanter el. Strom durchfließt einen Metallstab, dessen seitliche Oberfläche gegen Wärmeabgabe möglichst geschützt ist, so daß die Stromwärme durch die in Bädern von konstanter Temp. befindlichen Enden austreten muß. Nachdem die Erwärmung stationär geworden ist, mißt man die Unterschiede der Maximaltemperatur in der Stabmitte gegen zwei beiderseitig gleich weit entfernte Punkte und nimmt aus den beiden nahe gleichen Differenzen das Mittel; es heiße U. Außerdem wird die el. Spannung (Potentialunterschied) V zwischen den beiden äußeren Punkten gemessen; vgl. **101** bis **103**.

Dann ist, wenn $\varkappa$ das el. L.-V. (Beweis s. unten),

$$\frac{\lambda}{\varkappa} = \frac{1}{8}\frac{V^2}{U}.$$

$\varkappa$ ermittelt man gleich bei demselben Versuch als $\varkappa = i \cdot 2l/(qV)$, wo i die Stromstärke, $2l$ der Abstand zwischen den Punkten I und III und q der Querschnitt des Stabes ist. i in A, V in V, l und q durch cm gemessen gibt $\varkappa$ in $\Theta^{-1}\mathrm{cm}^{-1}$. In dem so berechneten λ ist als Wärme-, (Arbeits-)Einheit die Wattsekunde angenommen. Durch Multiplikation mit deren Verhältnis zur gr-Kalorie 0,239 (Anh. 30) wird λ in gewöhnlichem Maße erhalten.

Beweis der Formel. Das Längenelement dx des Stabes hat den Widerstand $dx/(\varkappa q)$, erhält also in 1 sek die Stromwärme $i^2 \cdot dx\,(\varkappa q)$ Wattsek. Durch Wärmeleitung gibt es ab die Wärmemenge $-\lambda q \frac{d^2u}{dx^2} \cdot dx$. Beide Mengen sind im stationären Zustande identisch, also folgt $-\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}$, als erstes Integral $-\frac{du}{dx} = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}x + C$ und als zweites $-u = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}\cdot\frac{x^2}{2} + Cx + C'$. Werden u und x von dem Maximalpunkt als Nullpunkt gezählt, so ist, weil daselbst $du/dx = 0$ ist, nach der ersten Integralgleichung $C = 0$, und nach der zweiten auch $C' = 0$, weil für $x = 0$ auch $u = 0$ sein soll. So entsteht $-u = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}\cdot\frac{x^2}{2}$, also für jeden der beiden äußeren Punkte die (negative) Differenz gegen die Mitte $U = \frac{i^2}{\lambda\varkappa q^2}\cdot\frac{l^2}{2}$.

Der Widerstand zwischen beiden Punkten ist $2l/(\varkappa q)$, also $i = \frac{1}{2} V \varkappa q/l$. Dies eingesetzt kommt $l' = \frac{1}{8} \varkappa V^2/\lambda$, q. e. d.

Über die Ausführung, Berücksichtigung der Veränderlichkeit von λ und $\varkappa$, Elimination des Restes äußerer Wärmeleitung vgl. F. K., Ann. der Ph. 1, 145. 1900 und besonders Jaeger u. Diesselhorst, Wiss Abh. d. P. T. Reichsanst. III 269. 1900.

Flüssigkeiten. Die Messungen, grundsätzlich ebenso ausführbar wie an festen Körpern, werden durch die Konvektion der Wärme mittels Strömungen erschwert. Über die Methoden, die sich je nach der Anwendung eines veränderlichen oder eines stationären Zustandes unterscheiden, s. besonders H. F. Weber, Wied. Ann. 10, 668 u. 11, 345. 1880; Christiansen, ib. 14, 23. 1881 Ausführliche Literaturangabe und Resultate in Winkelmann's Handbuch II 2, 304 ff. 1896; Wüllner, Lehrbuch II 304. 1896; auch Lees, Phil. Trans. (A) 191, 399. 1898.

Gase. Bei der Messung der kleinen (bis hinab zu einigen mm Quecksilber vom Drucke unabhängigen, mit wachsender Temperatur sinkenden) Leitung ist außer der Strömung die Strahlung zu eliminieren Zu ersterem Zweck dient die Anwendung kleiner Dimensionen und besonders geringer Dichte. Die Strahlung läßt sich nach vollständigem Evakuieren bestimmen (Kundt u. Warburg) Literatur z. B bei Winkelmann oder Wüllner; s. oben Bezüglich der Messung mit stationärem Zustand besonders Schleiermacher, Wied Ann. 34, 623. 1888; auch Schwarze, Diss. Halle 1902; mit veränderlichem Zustand Kutta, Wied. Ann. 54, 104. 1895; Egon Müller, ib 60, 82. 1897

Wärmestrahlung siehe 72a.

Elastizität und Schall.

52. Bestimmung des Elastizitätsmoduls durch Ausdehnung.

Elastizitätsmoduln s. in Tab. 20

Der Elastizitäts-Modul oder -Koeffizient charakterisiert die elastische Stärke, die Widerstandskraft eines festen Materials gegen Gestaltsänderungen dadurch, daß er für einen definierten Fall das, bei kleiner Gestaltsänderung konstante, Verhältnis der gegen eine Deformation entwickelten Kraft zur Größe der Deformation angibt. - Praktisch unterscheidet man den El.-Modul der Ausdehnung und der Torsion. Der erstere, auch El.-Modul schlechthin genannt, bezeichnet die Kraft, welche sich durch eine Abstandsänderung paralleler Schichten entwickelt. Auf die Ausdehnung läßt sich die Biegung zurückführen. Über Torsion vgl. 55.

Ein Cylinder (Draht, Stab) habe die Länge l, den Querschnitt q; eine ausdehnende Kraft p bewirke eine Verlängerung λ, welche nach dem Aufhören der Kraft wieder verschwinde Dann ist, wenn man den El.-Modul der Ausdehnung durch E bezeichnet, innerhalb der Proportionalitäts-Grenze

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}p \qquad \text{oder} \qquad E = \frac{l}{\lambda}\frac{p}{q}.$$

E ist also das Verhältnis der Spannung, welche an einem Cylinder von der Länge und dem Querschnitt Eins angebracht wird, zu der dabei entstehenden Verlängerung; oder auch die Belastung, welche die Länge eines Drahtes vom Querschnitt Eins verdoppeln würde, wenn das anfängliche Verhältnis der Verlängerung zur Belastung bis dahin bestehen bliebe

Die Größe der Zahl E hängt von den Einheiten ab, in denen Querschnitt und Gewicht gemessen werden:

Gebräuchliche technische Definition. Man pflegt die ausdehnende Kraft in kg-Gewichten, den Querschnitt meist in mm² zu messen (die Längeneinheit hebt sich heraus); die Einheit ist dann das kg-Gew./mm².

Elastizitätsmodul $[E]$ im CGS-System. Betrachtet man gr, kg usw. nicht als Gewichts-, sondern als Masseneinheiten, so ist $g \cdot p$ die dehnende Kraft, wo g die Schwerbeschleunigung bedeutet. Die Krafteinheit des CGS-Systems, die „Dyne", d. h. das Gewicht der Masse 1 gr an einem Orte, wo die Fallbeschleunigung 1 cm/sek² betrüge, ist also $g$mal kleiner und der El.-Modul $g$mal größer, als wenn das Gramm als Gewichtseinheit genommen wird. Einen in kg-Gew./mm² ausgedrückten El.-Modul E hat man also, um den El.-Modul $[E]$ im CGS-System zu erhalten, erstens mit kg/gr = 1000, ferner mit cm²/mm² = 100 und endlich mit g = 981 cm/sek² also mit 98100000 zu multiplizieren. Vgl. Anh. 13.

[E] geteilt durch die Dichtigkeit gibt das Quadrat der Schallgeschwindigkeit in (cm/sek)². Vgl. 58.

Mit wachsender Temperatur nimmt der El.-M. ein wenig ab, auf 1° bei Metallen zwischen 1/8000 und 1/2000 seines Betrages.

Über den sog zweiten El.-Modul vgl. 55, über Querkontraktion 55 u. 55a.

Bestimmung des Elastizitätsmoduls. Man befestigt das eine Ende des Drahtes oder Stabes an einer soliden Stütze, belastet das andere Ende wenn nötig zuerst so weit, daß der Draht ganz gestreckt ist, und mißt seine Länge. Man fügt eine Mehrbelastung p kg hinzu und bestimmt die dadurch entstehende Längenänderung λ, in derselben Einheit wie l ausgedrückt. q ist der Querschnitt in mm² (vgl. unten). Dann gilt

$$E = \frac{l}{\lambda}\frac{p}{q}\,\frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2}.$$

Die zur Messung angewandte Verlängerung muß innerhalb der „Elastizitätsgrenze" bleiben, das heißt, der Draht muß nach Entlastung die frühere Länge haben, was zu kontrollieren ist. Die Elastizitätsgrenze kann dadurch erweitert werden, daß man vor den Messungen stärker belastet. — Selbst bei harten Metallen wird man bei der Messung die Hälfte der Belastung, bei welcher das Zerreißen eintritt, nicht überschreiten. Vgl. Tab. 20.

Wenn das obere Ende eines dünnen Drahtes als fest angenommen werden kann, so mag man die Dehnung als Verschiebung einer Marke am unteren Ende messen. Ein Nachgeben der oberen Befestigung kann auch dadurch vermieden werden, daß man diese mittels eines Fadens und einer Rolle durch eine der Belastung nahe gleiche Kraft zugleich nach oben beansprucht.

An stärkeren Drähten oder Stäben hat man die Längenänderung als Differenz der Verschiebungen an beiden Enden zu messen. Hierzu dient z. B. ein auf einem Maßstabe (Kathetometer 22) verschiebbares Mikroskop oder besser zwei feststehende Mikroskope mit Okularmikrometern (21, 4); die Marken können als feine Querstriche mit dem Diamant oder einer feinen Feile oder auf angeklebtem Papier angebracht werden.

Längenänderungen dicker Stäbe lassen sich dadurch genau messen, daß man den Unterschied der Verschiebungen beider

Enden mittels paralleler Stangen komparatorisch mit Hilfe einer Gleitrolle oder eines Fühlhebels auf drehbare Spiegel (Bauschinger) oder auf Zeiger über einer Teilung überträgt; vgl. **25** u. **21**.

Siehe hierüber z. B. **Martens**, Materialienkunde I 45 ff. u. 435 ff 1898; Bach, Elastizität u. Festigkeit, 3. Aufl. S. 103 ff. 1898. — In beiden Werken auch eingehend die Methoden für Festigkeitsbestimmungen.

Querschnittsmessung 1. Durch Messung des Durchmessers, für kleine Dicken mit Fühlhebel oder Mikroskop (**21**).

2. Durch Wägung. Ist s (**15** u. Tab 2) die Dichtigkeit der Substanz, wiegen ferner h mm des Drahtes m mg, so ist der Querschnitt $q = m/(hs)$ mm².

Um die Genauigkeit zu vergrößern, beobachtet man bei mehreren Belastungen. Vgl. für die Rechnung mit kleinsten Quadraten **3**, aber auch S. 219.

Beispiel. 2 m eines Eisendrahtes wogen 1310 mg; Dichtigkeit = 7,61, also Querschnitt $q = 1310/(2000 \cdot 7{,}61) = 0{,}0861$ mm².

Man beobachtete in der durch die Nummern angegebenen Reihenfolge:

Nr.	Belastung	Länge	Nr.	Belastung.	Länge.	Verlängerung durch 2 kg
1.	0,5 kg	913,80 mm	*2.*	2,5 kg	914,89 mm	1,09 mm
3.	0,6 „	913,85 „	*4.*	2,6 „	914,96 „	1,11 „
5.	0,7 „	913,90 „	*6.*	2,7 „	915,00 „	1,10 „
7.	0,8 „	913,98 „	*8.*	2,8 „	915,09 „	1,11 „

Die Verlängerung auf $p = 2{,}00$ kg ist hiernach im Mittel $\lambda = 1{,}102$ mm.

Folglich ist der Elastizitätsmodul

$$E = \frac{l}{\lambda} \cdot \frac{p}{q} = \frac{913{,}8 \cdot 2{,}0}{1{,}102 \cdot 0{,}0861} = 19260 \, \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Im CGS-System ist dieser Elastizitätsmodul (S. 216 u. Anh. 13)

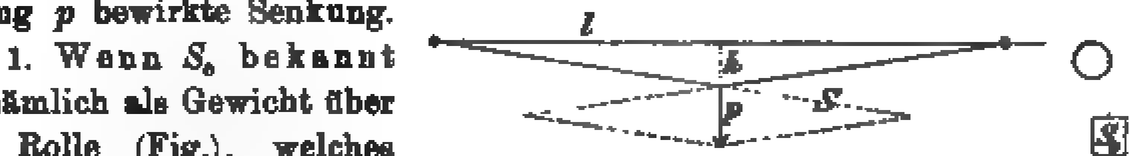
$$[E] = 19260 \cdot 98100000 = 1890 \cdot 10^9 \, [\text{cm}^{-1}\,\text{gr}\,\text{sek}^{-2}].$$

Verkürzungsmoduln werden im Prinzip ebenso, aber an dicken Stäben und mit entsprechend großen zusammendrückenden Belastungen gemessen.

Über die gleichzeitige Anwendung zweier gleicher parallel aufgehangener Drähte, die unten an zwei Punkten eines vertikal drehbaren Wagebalkens befestigt sind, vgl. Cassie, Proc. Phys. Soc. London 18, 215. 1902. In einem Spiegel an der Stirnseite des Balkens werden die Neigungen des Balkens beobachtet, welche durch wechselnde Belastung der einen oder anderen Seite entstehen. Außerdem kann die vertikale Schwingungsdauer des Balkens zur Bestimmung dienen (**58**); Horizontalschwingungen können dabei zur Ermittelung des Trägheitsmoments benutzt werden (**29** III).

Bestimmung mittels Knickung gespannter Drähte. Die Verlängerungen dünner Drähte lassen sich bestimmen, indem man den horizontal gespannten Draht an den Enden fest einklemmt und in

der Mitte belastet, so daß er geknickt wird. Es sei l die halbe Länge des Drahtes. S_0 bezeichne die ursprüngliche Spannung, h die durch die Belastung p bewirkte Senkung.



1. Wenn S_0 bekannt ist, nämlich als Gewicht über eine Rolle (Fig.), welches das eine Drahtende spannte, als dieses (ohne Verschiebung!) eingeklemmt wurde, so wird

$$E = \frac{1}{h^2}\left(p\,\frac{l}{h} - 2S_0\right)\cdot\frac{l^2}{q}\,. \qquad 1.$$

2. Die ursprüngliche Spannung sei unbekannt. Man beobachtet eine zweite Senkung h' durch die Belastung p' und rechnet

$$E = \frac{p'/h' - p/h}{h'^2 - h^2}\cdot\frac{l^3}{q}\,. \qquad 2.$$

Für größere Senkungen ist Ausdruck 2 mit $1 + 3(h^2 + h'^2)/(4l^2)$ zu multiplizieren. — Die beiden p/h sind wenig verschieden, so daß h und h' genau beobachtet werden müssen.

Beweis. λ ergibt sich aus $(l+\lambda)^2 = l^2 + h^2$, wenn λ^2 vernachlässigt wird, $\lambda = \frac{1}{2}h^2/l$. Die Längsspannung S des Drahtes durch p ist $S = p\,l/2h$, also $E = (S - S_0)l/(\lambda q) = (pl/2h - S_0)2l^2/(h^2 q)$, q. e. d. Denselben Ausdruck mit p' und l' zum Eliminieren von S_0 benutzend erhält man Gl. 2.

Wegen der elastischen Nachwirkung (55b) wachsen die Deformationen, auch innerhalb der Elastizitätsgrenze, mehr oder weniger mit der Zeit. Man pflegt die Belastungen tunlichst kurze Zeit wirken zu lassen; die kleine Temperaturänderung, welche die Ausdehnung begleitet, hat keinen merklichen Einfluß. Streng genommen hat man zwei Elastizitätsmoduln bei kurzer und bei andauernder Belastung zu unterscheiden, von denen der letztere selbst bei starren Körpern um mehrere Prozent kleiner sein kann.

Abweichungen von der Proportionalität der Deformation mit der Belastung. Die Dehnung wächst in Wirklichkeit mit der Belastung ein wenig beschleunigt. Man kann sie genähert darstellen z. B. durch

$$\lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}(p + Ap^2) \quad \text{oder noch besser} \quad \lambda = \frac{1}{E}\frac{l}{q}\frac{p}{1 - Ap}\,,$$

wo E den El.-Modul für kleine Belastung darstellt. Bei dem gewöhnlichen Verfahren werden also aus größeren Dehnungen etwas kleinere El.-Moduln abgeleitet als aus geringen; die Unterschiede können Prozente betragen.

Vgl. die Versuche von J. O. Thompson, Wied. Ann. 44, 555. 1891. Über verschiedene Formeln: Mehmke, ZS f. Math. u. Phys. 1897. — Besonders groß sind diese Abweichungen von der Proportionalität an nicht homogenen Materialien, wie Gußeisen, Gesteinen, Beton. Eine einfache Formel, welche auf diese Versuche angewendet werden kann, ist $\lambda = C\ p^n$. Vgl Bach l. c. S. 11ff — (Weiche Körper von faseriger Struktur, wie Leder oder Seile, folgen anderen Beziehungen zwischen der Belastung und der Dehnung.)

Über Kristall-Elastizität und ihre Literatur s. W. Voigt, die physikal. Eigenschaften der Kristalle, Leipz. 1898.

53. Elastizitätsmodul aus Längsschwingungen.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u einer elastischen Verdichtungswelle ist, wenn $[E]$ in CGS-Einheiten gemessen wird, in cm/sek gegeben durch $\sqrt{[E]/s}$, also für das gewöhnliche, in kg-Gew./mm² gemessene E durch $\sqrt{98100000 \cdot E/s}$. In m/sek ausgedrückt wird die Geschwindigkeit 100mal kleiner, also gleich $\sqrt{9810\ E/s}$.

Eine Wellengeschwindigkeit u kann man aus der Wellenlänge λ und der Schwingungszahl N als $u = \lambda N$ berechnen.

Schwingt ein an den Enden freier Stab mit einem Knoten oder ein an den Enden geklemmter Draht mit einem Bauch in der Mitte, so ist seine Länge l gleich einer halben Wellenlänge. Aus der Schwingungszahl N des Tons findet sich also $u = 2lN$

Ein in der Mitte gehaltener Stab oder ein an beiden Enden eingeklemmter gespannter Draht von der Länge l m werde zum Ansprechen seines longitudinalen Grundtones gebracht, indem man den Stab am einen freien Ende, den Draht in der Mitte reibt. N sei die Tonhöhe, d. h. Schwingungszahl/sek (vgl. **57** und Tab. 21). Dann ist nach dem obigen der Elastizitätsmodul E

$$E = \frac{u^2 s}{9810} = \frac{4 N^2 l^2 s}{9810} \ \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

Die Longitudinalschwingungen werden durch Reiben mit einem wollenen Lappen erzeugt, der für Metall oder Holz mit Kolophonium eingerieben, für Glas angefeuchtet worden ist.

Die Tonhöhe wird durch Vergleichung mit einer bekannten Stimmgabel ermittelt. Das ungenaue Schätzen von Tonintervallen kann man durch die Einführung eines Monochords auf eine Längenvergleichung zurückführen (**57**, 3). Es ist oft schwierig, die Oktave zu bestimmen, in welcher die sehr hohen Töne liegen. Ein derartiger Fehler wird leicht bemerkt, weil

er das Resultat immer mindestens viermal zu klein oder zu groß werden läßt.

Über die Bestimmung der Tonhöhe aus Staubfiguren vgl. **56**, über graphische Bestimmung **57**.

Die aus Schwingungen bestimmten Elastizitätsmoduln können etwas anders ausfallen, als die durch Längenänderung bestimmten, erstens wegen der Erwärmung bez. Abkühlung bei dem Zusammendrücken bez. Ausdehnen, und zweitens, weil zwischen der Belastung und der Längenbestimmung Zeit verstreicht, während deren die elastische Nachwirkung hinzutritt (vgl. S. 219 und **55b**).

Beispiel. Der Eisendraht von S. 218 gab bei der Länge $l = 1{,}361$ m den Longitudinalton ais_3. Zu diesem findet sich aus Tab 21 die Schwingungszahl $N = 1843$. Das spezifische Gewicht $s = 7{,}61$ gesetzt, wird

$$E = \frac{4 \cdot 1843^2 \cdot 1{,}361^2 \cdot 7{,}61}{9810} = 19520 \frac{\text{kg-Gew.}}{\text{mm}^2}.$$

54. Elastizitätsmodul durch Biegung eines Stabes.

Ein rechteckiger, am einen Ende horizontal fest eingeklemmter Stab von der Länge l, der Höhe a und der Breite b, alles in mm gemessen, erfährt durch eine Belastung von p kg am freien Ende eine Senkung h

$$h = \frac{4}{E} \frac{l^3}{a^3 b} p \text{ mm}.$$

Bei kreisförmigem Querschnitt vom Halbmesser r ist statt $a^3 b$ zu setzen $3r^4\pi$ oder $3q^2/\pi$, wenn $q = r^2\pi$ den Querschnitt bedeutet. Für einen beliebigen Querschnitt ist maßgebend sein „Trägheitsmoment K, bezogen auf die durch den Schwerpunkt gehende Horizontale“, wobei man ihn als eine Platte auffaßt, deren Flächeneinheit die Masseneinheit besitzt; z. B. für das obige Rechteck $K = ab \cdot \frac{1}{12} a^2 = \frac{1}{12} a^3 b$, für den Kreis $K = r^2\pi \cdot \frac{1}{4} r^2 = \frac{1}{4} r^4 \pi$ (29 I). Vorausgesetzt, daß die Horizontale eine Hauptaxe des Trägheitsmoments ist, gilt dann

$$h = \frac{1}{3} \frac{1}{E} \frac{l^3}{K} p$$

h ist stets von der Gestalt aus zu rechnen, welche der etwa durch Eigengewicht schon etwas gebogene Stab ohne Belastung hat.

Ein beiderseitig aufgelegter, in der Mitte belasteter Stab erfährt eine 16mal kleinere Durchbiegung als die obige; vgl S 224

I. Geklemmter Stab. Man klemmt einen horizontalen Stab am einen Ende fest ein und beobachtet die Stellung des freien Endes an einem vertikalen Maßstab (Spiegelteilung dicht dahinter; Kathetometer). Eine Belastung des freien Endes

durch p kg bewirke eine Senkung um h mm. Der rechteckige Querschnitt habe die Höhe a und die Breite b; die freie Länge des Stabes sei $= l$, alles in mm. Dann ist der Elastizitätsmodul (Beweis folg. S.)

$$E = 4 \frac{l^3}{a^3 b} \frac{p}{h}.$$

Über andere Querschnitte vgl. oben.

Eine Schwierigkeit bietet die Herstellung einer hinreichend festen Klemmung.

Dünne Drähte. Die Methode ist sehr gut auf dünne Drähte anwendbar, die man in einen Schraubstock klemmt. Über die Bestimmung von r vgl. S. 218. Abweichungen vom kreisförmigen Querschnitt werden durch eine zweite Bestimmung eliminiert, bei der man den Draht um 90° gedreht hat.

II. Aufgelegter Stab. Die Schwierigkeit der festen Einklemmung wird vermieden, indem man den Stab mit seinen Enden auf zwei feste Unterlagen lose auflegt. Deren Abstand von einander sei gleich l. Eine



Belastung p der Stabmitte bringe daselbst die Senkung h hervor (Spiegelmaßstab; Kathetometer), so ist

$$E = \frac{1}{4} \frac{l^3}{a^3 b} \frac{p}{h}.$$

Dünne lange Stäbe biegen sich durch ihr Eigengewicht zu stark. Man kann dies mittels eines über eine (reibungsfreie) Rolle geführten Fadens vermindern, welcher durch eine geeignete Tarabelastung die Stabmitte nach oben beansprucht.

Spiegelung. Weit genauer wird statt der Senkung der Mitte die Neigung der Enden gemessen (Kirchhoff, Pscheidl). Die Belastung p der Mitte bewirke im Falle II den Neigungswinkel φ eines Endquerschnittes, so ist

$$E = \frac{3}{4} \frac{l^2}{a^3 b} \frac{p}{\operatorname{tg} \varphi}.$$

Zur Messung von φ verbindet man mit dem Ende einen kleinen vertikalen Spiegel und beobachtet dessen Drehung mit Fernrohr und vertikaler Skale (25). Besser ist die Beobachtung

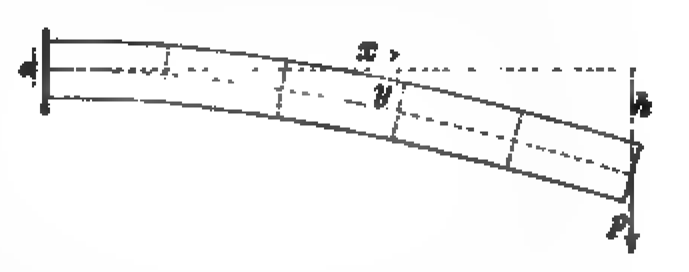
beider Enden und die Mittelnahme. Statt dessen kann man 2 Spiegel an beiden Enden gegeneinander richten, aber etwas schief stellen, so daß das Licht der Skale von dem einen zum anderen Spiegel und von da ins Fernrohr geworfen wird (A. König, Wied. Ann. 28, 108. 1886). Fernrohr und Skale stehen jetzt einander gegenüber. A sei der Abstand der Skale von ihrem Spiegel, d der gegenseitige Abstand der Spiegel, beide in Skalenteilen gemessen. n bedeute den beobachteten Ausschlag. Dann kann hinreichend genau gesetzt werden $\operatorname{tg}\varphi = n/(4A + 2d)$.

Die Formeln setzen voraus, daß die Krümmung klein bleibt. Starke Krümmung ist wegen der Verschiebung der Enden auf ihren Lagern auch mit Reibung verbunden. — Man hat sich zu überzeugen, daß nach Entfernung des Gewichtes sich die frühere Gestalt herstellt. — Kleine Querschnitte werden durch Wägung bestimmt (S. 218).

Wenn die Dicke a des Stabes nicht sehr klein gegen die Länge l ist, so hat man das nach den obigen Formeln berechnete E noch zu multiplizieren mit $1 + 3a^2/l^2$.

Vgl. Koch, Wied. Ann. 5, 353. 1878.

Beweise für rechteckigen Querschnitt. Bei der Krümmung werden die oberen Fasern gedehnt, die unteren verkürzt; die mittelste Schicht behält ihre Länge. Es seien, vom Befestigungspunkte an gerechnet, x die horizontale, y die vertikale Koordinate eines Punktes dieser „neutralen" Schicht, so wird die Krümmung des Stabes an irgend einem Punkte durch



d^2y/dx^2 dargestellt, da die Neigung klein vorausgesetzt wird. Es sei nun ε der Abstand einer Faser von der neutralen Schicht, nach oben positiv, nach unten negativ gerechnet, so ist ein Stückchen der Faser im Verhältnis $\varepsilon\, d^2y/dx^2$ zu seiner ursprünglichen Länge ausgedehnt (oder zusammengedrückt). Eine Schicht von der Breite b und der Dicke $d\varepsilon$ sucht sich also mit der Kraft $E\varepsilon b\, d\varepsilon \cdot d^2y/dx^2$ zusammenzuziehen, also bilden diese Kräfte in den Schichten vom Abstand $+\varepsilon$ und $-\varepsilon$ zusammen ein Drehmoment $2Eb\varepsilon^2 \cdot d\varepsilon \cdot d^2y/dx^2$. Das in einem ganzen Querschnitt von der Höhe a und der Breite b entwickelte Drehmoment ist also

$$2Eb\frac{d^2y}{dx^2}\int_0^{a/2}\varepsilon^2 d\varepsilon = Eb\frac{a^3}{12}\frac{d^2y}{dx^2}.$$

Dieses elastische Drehmoment muß dem von dem angehängten Gewicht an diesem Querschnitt ausgeübten Moment $p(l-x)$ gleich sein, also

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{12}{E}\frac{p}{a^3b}(l-x), \quad \text{woraus} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{12}{E}\frac{p}{a^3b}\left(lx-\frac{x^2}{2}\right) \quad \text{und}$$

$$y=\frac{12}{E}\frac{p}{a^3b}\left(\frac{lx^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right).$$

Hieraus ergibt sich die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ und die Senkung h am Ende $(x=l)$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_l=\operatorname{tg}\varphi=\frac{6}{E}\frac{pl^2}{a^3b}, \quad y_l=h=\frac{4}{E}\frac{pl^3}{a^3b},$$

für den einseitig geklemmten Stab.

Da ferner ein Stab, wenn er an den Enden lose aufliegt, angesehen werden kann, wie wenn er an jedem Ende durch die Kraft $\frac{1}{2}p$ hinaufgezogen würde, in der Mitte aber geklemmt wäre, also die wirksame Länge $\frac{1}{2}l$ betrüge, so wird die Neigung $\operatorname{tg}\varphi$ 8mal, die Senkung 16mal kleiner als $\operatorname{tg}\varphi$ und obiges h.

55. Torsionsmodul.

An einem einseitig geklemmten cylindrischen Stabe oder Drahte von der Länge l und dem Halbmesser r bewirkt ein Drehmoment P am freien Ende eine Verdrehung des Endes um den Winkel

$$\alpha=\frac{1}{[F]}\frac{2}{\pi}\frac{l}{r^4}P. \qquad 1.$$

Wenn l, r und P in CGS-Einheiten gemessen sind, bedeutet $[F]$ den Torsionsmodul in diesem System. α wird in absolutem Maße erhalten, d. h. $\alpha\times 57,30$ gibt z. B den Verdrehungswinkel in Graden (Anh. 18).

Die „Direktionskraft" eines solchen Drahtes ist nach Gl. 1 (vgl. Anh. 11a) $D=\frac{P}{\alpha}=\frac{\pi}{2}[F]\frac{r^4}{l}$. Folglich ist die Torsionsschwingungsdauer t einer Masse vom Trägheitsmoment K[cm²gr] an diesem Drahte (vgl. Anh. 12) in sek gegeben durch $t^2=\pi^2\frac{K}{D}=\frac{1}{[F]}2\pi K\frac{l}{r^4}$. Aus der beobachteten Schwingungsdauer ergibt sich also

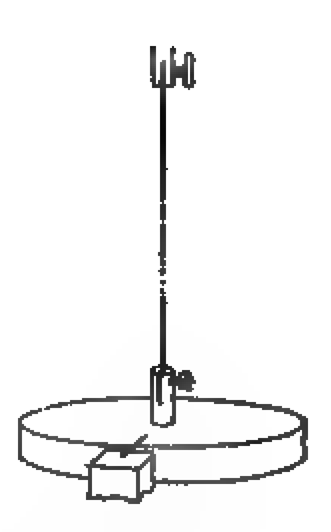
$$[F]=2\pi\frac{K}{t^2}\frac{l}{r^4}[\mathrm{cm^{-1}\,gr\,sek^{-2}}]. \qquad 2.$$

Der in kg-Gew./mm² gemessene Tors.-M. ist (S. 216) $F=\frac{1}{98100000}[F]$. Statt dessen kann man gleich l und r in mm und K in kg·mm² messen, dann kommt, wenn $g=9810$ [mm·sek⁻²] gesetzt wird,

$$F=\frac{2\pi}{g}\frac{K}{t^2}\frac{l}{r^4}.$$

Bestimmung durch Schwingungen (Coulomb 1784).

Man belastet einen vertikalen, oben geklemmten Draht von der Länge l mm und dem Halbmesser r mm (21, 4 u. S. 217) mit einer Masse, z. B. mit einer abgedrehten Scheibe, vom Träg-



heitsmoment K kg · mm², versetzt diese in Torsionsschwingungen, deren Dauer t in sek beobachtet wird (28), dann ist der Torsionsmodul F aus obiger Formel zu berechnen, oder, da $2\pi/9810 = 0{,}0006405$ ist,

$$F = 0{,}0006405 \frac{K}{t^2} \frac{l}{r^4} \text{ kg-Gew./mm}^2.$$

Für einen Cylinder (Kreisscheibe) vom Radius R und der Masse M mit vertikaler Axe ist (29 I) $K = \frac{1}{2} M R^2$.

Bestimmung durch Verdrehungen.

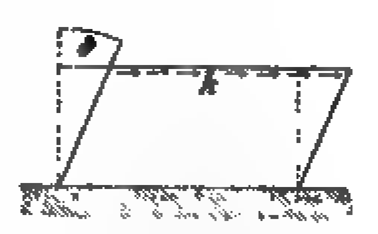
Wenn ein Drehmoment von p kg-Gewicht am Hebelarm a mm am einen Ende eines Drahtes oder kreiscylindrischen Stabes angreifend hier eine Drehung um b Bogengrade bewirkt, so ist

$$F = \frac{2}{\pi} \frac{l}{r^4} ap \frac{57{,}3}{b}.$$

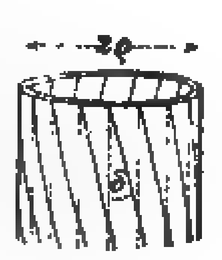
Über die Verwendung von Torsions- und Transversaltönen rechteckiger Stäbe vgl. F. A. Schulze, Ann. der Ph. 13, 583. 1904.

Theoretisches. Das Verhältnis F/E des Ausdehnungs- zum Torsionsmodul hängt mit der Querkontraktion zusammen, welche die Ausdehnung eines Stabes begleitet; 55a. Im Mittel ist $F = \frac{3}{8} E$.

Erläuterung. Torsions- oder Gleit-Modul oder zweiter Elastizitätsmodul F. Eine Platte von der Flächeneinheit sei in ihrer natürlichen Gestalt rechteckig. Die Grundfläche werde befestigt; an der gegenüberliegenden Ebene wirke in der Richtung dieser Ebene eine Kraft k, gleichförmig über diese ganze Fläche verteilt. Dadurch werden die Plattenschichten aneinander verschoben und die vorher normale Linie wird jetzt mit der Normalen einen kleinen Winkel ϑ bilden. Dann ist F das Verhältnis der Kraft k zu diesem Winkel, also $k = F\vartheta$.



Torsions-Drehmoment. Man denke sich den Draht in dünne konzentrische Röhren zerlegt, von denen eine den inneren und äußeren Halbmesser ϱ und $\varrho + d\varrho$ habe. Auf dem Umfange dieser Röhre sei eine vertikale Gerade gezogen. Drehen wir nun den untersten Querschnitt um den Winkel α, so wird diese Linie in eine Schraubenlinie verwandelt, welche gegen die Vertikale die Neigung $\alpha\varrho/l$ hat. Dies ist also unser Verschiebungswinkel ϑ der Schichten gegeneinander. Somit



wird die Torsionselastizität den untersten Querschnitt $2\pi\varrho d\varrho$ der Röhre mit einer Kraftsumme $F \cdot 2\pi\varrho d\varrho \cdot \alpha\varrho/l$ in seine frühere Lage zurückzudrehen suchen. Da ϱ der Halbmesser der Röhre, so gibt diese Kraft das Drehmoment $2\pi F\varrho^3 d\varrho \cdot \alpha/l$.

Ein solches Moment erfährt aber jede Röhre in ihrem Endquerschnitt, so daß das ganze Drehmoment eines Drahtes von der Länge l und dem Halbmesser r bei einem Torsionswinkel φ beträgt:

$$2\pi F\frac{\alpha}{l}\int_0^r \varrho^3 d\varrho = F\frac{\pi r^4}{2l}\alpha.$$

Mit Hilfe von Anh. 11 a und 12 ergibt sich hieraus die Schwingungsdauer t, wobei aber zu beachten ist, daß zu dem Drehmoment der Faktor g hinzutritt, wenn man, wie bei der Elastizität, die Kräfte in Gewichtsmaß ausdrückt.

Verhältnis von F zu E. Nach der Theorie (Poisson) ist $F = \frac{1}{2}\frac{E}{1+\mu}$, wenn μ das Verhältnis der Querkontraktion zur Längenausdehnung bedeutet (55a). Da $0 < \mu < \frac{1}{2}$, so ist also $\frac{1}{2}E > F > \frac{1}{3}E$; für den Mittelwert $\mu = \frac{1}{4}$ gilt $F = \frac{2}{5}E$. Vgl. z. B. Clebsch, Theorie der Elastizität, §§ 8 u. 92.

An feinen Drähten zeigen sich erfahrungsgemäß Abweichungen von dem Coulomb'schen Gesetz bis zu reichlich $\pm 5\%$. Vgl. Baumeister, Wied. Ann. 18, 578. 1883.

55a. Bestimmung der Elastizitätszahl (Querkontraktion) μ.

Die elastische Ausdehnung durch einseitigen Zug ist in der darauf senkrechten Richtung von einer Kontraktion begleitet, die jener Ausdehnung proportional ist. Bedeutet an einem Stabe λ die Vergrößerung der Länge l und δ die damit verbundene Verkürzung des Durchmessers d, so ist also $\frac{\delta}{d} : \frac{\lambda}{l} = \mu$ für einen bestimmten Stoff eine Konstante (Poisson), deren Zahlenwert jedenfalls zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen muß. Erfahrungsgemäß liegt er, z. B. bei Glassorten, meist zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{3}$.

Volumänderung φ durch elastische Verlängerung. Das Volumen v eines Stabes ist proportional $l \cdot d^2$, die Änderungen φ, λ und $-\delta$ stehen also (S. 6) in der Beziehung $\frac{\varphi}{v} = \frac{\lambda}{l} - 2\frac{\delta}{d} = \frac{\lambda}{l}(1 - 2\mu)$. Den Grenzfällen $\mu = \frac{1}{2}$ und $\mu = 0$ entsprechen also die Volumänderungen $\varphi = 0$ und $\varphi : v = \lambda : l$.

I. Aus dem Verhältnis der Elastizitätsmoduln der Ausdehnung E und der Torsion F.

Nach dem oben erwähnten Satze $F = \frac{1}{2}E/(1+\mu)$ ist

$$\mu = \frac{1}{2}\frac{E}{F} - 1.$$

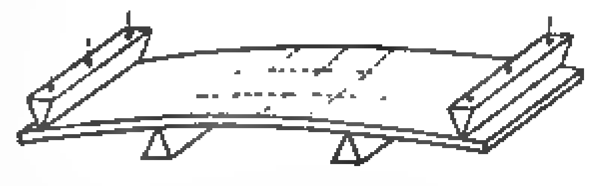
II. Aus der Volumänderung bei einseitigem Zug.

Nur auf Körper von starker elastischer Ausdehnung anwendbar, wie Kautschuk. Man dehnt innerhalb eines Dilatometers in einer Flüssigkeit. Entspricht der relativen Verlängerung λ/l die rel. Volumvermehrung φ/v, so ist (vgl. oben)

$$\mu = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\varphi}{v}\frac{l}{\lambda}\right).$$

III. Aus der Oberflächengestalt eines gebogenen Stabes (Cornu).

Biegt man eine ebene prismatische Platte so, wie in der Figur, so bewirken die durch die Querkontraktion auftretenden Zugkräfte in der oberen ausgedehnten Hälfte und die Druckkräfte in der unteren Hälfte (vgl. S. 223) eine sattelförmige Oberflächengestalt. Der Hauptkrümmungshalbmesser der primären Biegung geteilt durch den der Querbiegung gibt direkt die Größe μ



Die obere Fläche sei eben poliert Man bedeckt sie mit einer parallelen ebenen Glasplatte. Durch die Gestaltsänderung entstehen zwischen beiden Platten Interferenzstreifen (66 V), die zwei Systemen von Hyperbeln mit gemeinsamen Asymptoten angehören. Bezeichnet 2α den nach der Querrichtung der Platte offenen Winkel der Asymptoten, welcher bei senkrechter Beobachtung erscheint, so ist

$$\mu = \mathrm{tg}^2 \alpha.$$

Cornu, C. R. 69. 333. 1869; über die zur Ausführung dienende Anordnung und die Winkelmessung mit dem Dove'schen Reflexionsprisma vgl. Straubel, Wied. Ann. 68, 369. 1899

55b. Elastische Nachwirkung (W. Weber 1841).

Elastische Deformationen vollziehen sich nur zu einem Teile sofort; ein Rest, die „Nachwirkung", folgt langsamer. Dieser ist nach der Substanz verschieden groß. Bei Platin, Stahl, Quarz ist er sehr klein, erreicht aber bei Metallen und Gläsern auch wohl 5%, bei organischen Körpern, wie Kokon oder Kautschuk 30%, ja in niederer Temperatur die größere Hälfte der Deformation.

Nachwirkungen zeigen sich auch an anderen Molekularvorgängen, wie an der Wärmeausdehnung, bei der Magnetisierung und insbesondere auch als elektrischer Rückstand

Man hat diese langsam verschwindenden Abstände von neuen Gleichgewichtslagen zu unterscheiden von dauernden Änderungen, die bei der Überschreitung von Elastizitätsgrenzen usw. stattfinden (Hysterese) und mit denen sie sich oft vermischen.

Nachwirkung nach Deformationen. Diese ist am leichtesten zu beobachten. Die natürliche Gestalt eines Körpers, der ausgedehnt, gebogen, gedrillt gewesen war, stellt sich erst mit der Zeit wieder her.

Es sei s die Deformation, welche zur Zeit t nach dem Aufhören der die Gestalt ändernden Kräfte noch besteht. Die Annäherung an die natürliche Gestalt vollzieht sich mit einer Geschwindigkeit $-ds/dt$, welche, falls die primäre Deformation kurz gedauert hatte, dem Gesetz folgt (F. K.)

$$-\frac{ds}{dt} = a\frac{s}{t}, \quad \text{also } s = \frac{c}{t^a}. \qquad \text{I.}$$

Nur für die ersten, der Beobachtung nicht zugänglichen Bruchteile von Sekunden gilt die Formel nicht. a, welches die Geschwindigkeit bedingt, mit der die Nachwirkung verschwindet, ist für dieselbe Art von Deformationen an demselben Körper nahe konstant; es wurde, t nach Minuten gerechnet, an verschiedenen Körpern bei verschiedenen Vorgängen zwischen $\frac{1}{3}$ und 1 gefunden. c, d. h. die zur Zeit 1 noch vorhandene Nachwirkung, ist der Größe der vorangegangenen Deformation bei gleicher Dauer derselben nahe proportional und wächst mit der Dauer.

Hatte die primäre Deformation aber länger gedauert, so gilt der allgemeinere Ausdruck

$$-\frac{ds}{dt} = a\frac{s}{t^n}, \quad \text{also } s = C \cdot e^{-p \cdot t^m}, \qquad \text{II.}$$

worin $p = a/(1-n)$ und $m = 1 - n$ ist. m wächst mit der Dauer der vorangegangenen Gestaltsänderung von sehr kleinen Werten allmählich an, aber erfahrungsmäßig nicht über $\frac{1}{4}$; n liegt also zwischen 1 und $\frac{3}{4}$.

Nach denselben Ausdrücken vollzieht sich die langsame Annäherung an ein neues elastisches Gleichgewicht, welches durch eine konstante deformierende Kraft schließlich bewirkt wird, oder an die von dem Körper schließlich ausgeübte elastische Kraft, die einer konstanten Deformation entspricht.

F. K., Pogg. Ann. 119, 337. 1862; 128, 1. 1866; 158, 337. 1876.

Genähert lassen sich auch, z. B. an Glas, manche Nachwirkungen, die einer Deformation S von der Dauer T folgen, zur Zeit t nach dem Aufhören durch $c \cdot S \cdot \lg(T+t)/t$ ausdrücken (Boltzmann). Falls umgekehrt zur Zeit Null eine konstant bleibende Deformation plötzlich eintritt, so gilt für die elastische Kraft zur Zeit t genähert der Ausdruck $P(1 - c \lg t)$, wo P die Kraft zur Zeit 1 bedeutet und c in beiden Ausdrücken für denselben Körper und für die gleiche Art von Deformation denselben Wert hat.

Boltzmann, Pogg. Ann. Erg. VII, 624. 1876; F. K., ib. 160, 225. 1877; Austin, Wied. Ann. 50, 659. 1893. — S. auch Braun, Pogg. Ann. 159, 337. 1876.

Nachwirkungen können lange Zeiten, selbst Monate dauern.

Um die Größe und Hartnäckigkeit der Nachwirkung zu bezeichnen, lasse man eine Deformation S 1 min lang bestehen und beobachte dann die Nachwirkung. Aus zwei Beobachtungspaaren $t_1\, s_1$ und $t_2\, s_2$ kommt in Formel I $a = \frac{\log s_1 - \log s_2}{\log t_2 - \log t_1}$ und $c = t_1^a s_1$ oder $= t_2^a s_2$. Graphische Darstellungen sind nützlich. c/S gibt die relative Größe der Nachwirkung zur Zeit Eins. $1/a$ bezeichnet die Hartnäckigkeit.

Bei Körpern mit geringer Nachwirkung muß die Deformation vielleicht längere Zeit (10 min) bestehen, um eine Nachwirkung von ausreichender Größe zu geben. Dann gilt aber im allgemeinen der Wert $n = 1$ nicht mehr, so daß man die umständlichere Formel II nehmen muß.

Die Temperatur hat einen beträchtlichen Einfluß. Bei harten Körpern steigert sie die anfängliche Größe der Nachwirkung, aber auch die Geschwindigkeit ihres Verschwindens. Bei Kautschuk ist die Nachwirkung in niederer Temperatur größer

Die Beobachtung ist für Torsion mit Ablesung an Spiegel und Skale (25) einfach. Man dämpft den an den Draht gehängten Körper von kleinem Trägheitsmoment mit leichtem Spiegel durch einen Flügel in Flüssigkeit oder einen Luftdämpfer (8, 32) und erteilt die Drehungen oben oder unten. Ähnlich werden Biegungsnachwirkungen an eingespannten Stäben leicht wahrgenommen. Für genaue Längenachwirkungen an Metallen werden sehr lange Drähte, empfindliche Ablesevorrichtungen und endlich, um die Wärmeausdehnung zu berücksichtigen, genaue Temperaturbeobachtungen gefordert.

Die Gefahr, daß sich die Gestalt zugleich dauernd ändert, wird verringert, wenn man früher bereits eine größere Deformation in gleichem Sinne erteilt hatte.

56. Messung von Wellenlängen; Bestimmung der Schallgeschwindigkeit.

Die Schallgeschwindigkeit in trockner atmosphärischer Luft von der Temperatur t beträgt $u = 331\sqrt{1 + 0{,}00367\, t}$ m/sek; auf mittlere Luftfeuchtigkeit wird für Zimmertemperatur näherungsweise dadurch Rücksicht genommen, daß man 0,004 statt 0,00367 setzt (18). Vgl. ferner 58.

Zwei gegen einander laufende gleiche Wellenzüge erzeugen stehende Wellen von einem Knotenabstand gleich der halben Wellenlänge.

Neue Lit: s. Violle, Rapp. au Congr. de phys I 228 ff. 1900.

I. Staubfiguren (Kundt 1866).

1. Schallgeschwindigkeit in festen Körpern.

Diese läßt sich für Stäbe oder Röhren, die man longitudinal anreibt, anstatt (53) auf die Schwingungszahl, auf den vorigen Ausdruck zurückführen, indem die Wellenlängen desselben Tones in der Luft und in dem Stabe verglichen werden. Der Stab wird horizontal gelegt und mit seiner Mitte fest eingeklemmt. Das eine Ende E wird longitudinal gerieben (S. 220), das andere ragt in eine, mindestens 25 mm weite (vgl. f. S. unten), am hinteren Ende durch einen dicht schließenden verschiebbaren Stöpsel S verschlossene, gereinigte und getrocknete Glasröhre, die ein wenig Lycopodiumsamen oder Korkstaub (auch wohl Kieselsäure, aber sehr wenig) enthält. Beim Anreiben des Stabes erzeugen die Stöße des freien Endes in der Glasröhre stehende Luftschwingungen, durch welche sich der Staub in periodische Figuren ordnet. Durch Verschieben von S findet man leicht die richtige Stellung, bei der nämlich das Aufwirbeln des Staubes möglichst energisch geschieht. Man kann auch die Röhre bei S fest verschließen und anstatt des Stöpsels die ganze Röhre verschieben. — Auf einen Stab von kleinem Querschnitt klebt man, um das Übertragen der Stöße an die Luftsäule zu verstärken, eine leichte Kork- oder Pappscheibe.

Ist l der Abstand benachbarter Knotenpunkte von einander, d. i. die halbe Länge der Welle in der Luft, L die Länge des geriebenen Stabes, d. i. die halbe Länge seiner Welle (vgl. 53), so verhält sich die Schallgeschwindigkeit im Stabe $U:u = L:l$, also ist

$$U = 331\sqrt{1 + 0{,}004\,t} \cdot \frac{L}{l} \frac{\text{m}}{\text{sek}}.$$

Der Elastizitätsmodul ergibt sich dann (53)

$$[E] = U^2 s \text{ CGS} \quad \text{oder} \quad E = \frac{U^2 s}{9810} \frac{\text{kg-Gewicht}}{\text{mm}^2},$$

wo s die Dichtigkeit des Stabes bedeutet.

Um eine genaue Länge der Staubwelle zu erhalten, mißt man den Abstand eines Paares (oder mehrerer Paare, z. B. wenn $2n$ Punkte gemessen werden, $k_{n+1} - k_1$, $k_{n+2} - k_2 \cdots k_{2n} - k_n$) von Knoten, die weiter auseinander liegen, und dividiert ihn (oder das Mittel) durch die Anzahl der zwischenliegenden Wellen. Über Rechnung mit kleinsten Quadraten vgl. 3 II.

Beispiel. Ein 900 mm langer Glasstab gab bei der Lufttemperatur 17° die Länge der Staub-Halbwellen $l = 62{,}9$ mm. Die Schallgeschwindigkeit im Glase betrug also $331\sqrt{1 + 0{,}004 \cdot 17} \cdot 900/62{,}9 = 4890$ m/sek; der Elastizitätsmodul des Glases, dessen Dichte $= 2{,}7$ war (15, B 1 oder 3),

$$E = 4890^2 \cdot 2{,}7/9810 = 6580 \text{ kg-Gewicht/mm}^2.$$

Längere Stäbe kann man, anstatt in der Mitte, auch in $\frac{1}{4}$ vom Ende klemmen und in der Mitte reiben, dann ist die Wellenlänge im Stabe gleich der ganzen Stablänge, also das wie oben berechnete U durch 2 zu dividieren.

2. Schallgeschwindigkeit in Gasen.

Diese ist in cm/sek gegeben (Laplace 1816) durch

$$u^2 = k \frac{\Delta}{s},$$

wenn s das spez. Gewicht, Δ der in CGS-Einheiten gemessene Druck des Gases und k das Verhältnis c_p/c_v der spez. Wärme c_p bei konstantem Druck zu c_v bei konstantem Volumen bedeutet. Ist h der in cm Quecksilber (0°) gemessene Druck, so ist (vgl. Anh. 8) $\Delta = 13332\,h$. Wenn ferner s_0 das spez. Gewicht bei 0° und 1 Atm., d. h. wenn ($\alpha = 0{,}00367$) $s = s_0 \frac{h}{76} \frac{1}{1 + \alpha t}$, so wird also, u in m/sek gemessen,

$$u^2 = 101{,}32\,k \frac{1 + \alpha t}{s_0} \left(\frac{\text{m}}{\text{sek}}\right)^2. \qquad 1.$$

Für zwei Gase gilt das Verhältnis

$$\frac{u^2}{u'^2} = \frac{k}{k'} \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t'} \frac{s_0'}{s_0}. \qquad 2.$$

Diese Beziehungen können für ein Gas von bekanntem k und s_0 zur Berechnung seiner Schallgeschwindigkeit dienen und ferner zu den unter III genannten Aufgaben.

In engeren Röhren erleidet die Sch.-Geschw. eine durch Reibung und Wärmeaustausch veranlaßte Verminderung, die mit der Rohrweite und der Wurzel aus der Schwingungszahl reziprok zunimmt (Kirchhoff). Nach Versuchen von Kundt läßt sich schätzen, daß unter den gebräuchlichen Verhältnissen eine halbe Luftwellenlänge l mm, beobachtet in einem Glasrohr von d mm Weite, zu korrigieren ist um $+ 0{,}02\, l^{3/2}/d$ mm.

Die Schallgeschwindigkeit eines Gases läßt sich mit Staubfiguren durch Erregen von Wellen bekannter Frequenz be-

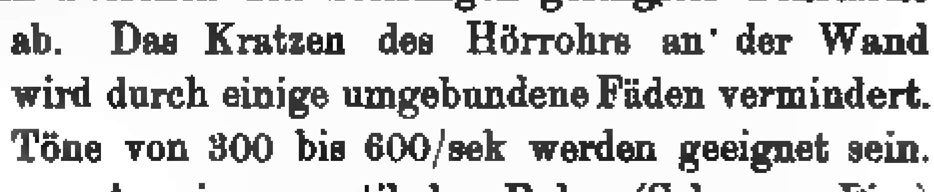
stimmen oder auf die der Luft (S. 229) zurückführen, indem man in beiden Mitteln Figuren mit demselben angeriebenen Stabe oder mit derselben, vor der Rohrmündung angestrichenen Stimmgabel erzeugt. Den entstehenden Wellenlängen sind die Schallgeschwindigkeiten proportional. Werden also dabei die Längen beobachtet l' in trockener Luft von der Temp. t' und l in dem Gase von der Temp. t, so ist für das Gas die Sch.-Geschw. bei 0° gegeben durch (vgl. oben)

$$331 \frac{l}{l'} \sqrt{\frac{1+0{,}00367\,t'}{1+0{,}00367\,t}} \frac{\text{m}}{\text{sek}}.$$

II. Akustische Bestimmungen von Wellenlängen in Gasen nach Quincke.

In einer abgegrenzten Gasmasse entstehen durch die von einer Schallquelle von der Schwingungszahl N (Tab. 21) auf das Gas übertragenen Stöße im allgemeinen stehende Schwingungen, z. B. in einem etwa einseitig verschlossenen Rohr wie auf S. 230 solche von der Wellenlänge u/N; der Abstand aufeinander folgender Knoten ist also $= \frac{1}{2}u/N$, z. B. durch den Ton a_1, $N = 435$/sek, in Luft von Zimmertemperatur $\frac{1}{2} \cdot 340/435 = 0{,}39$ m.

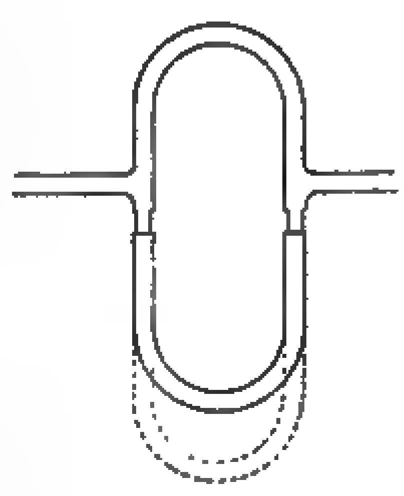
1. In ein hinreichend langes, hinten eben geschlossenes, weites (30 mm) Rohr, vor dem z. B. der Resonanzkasten einer angestrichenen Stimmgabel steht, ist ein offenes engeres (8 mm) Rohr verschiebbar eingeführt; von dem freien Ende desselben wird der Schall dem einen Ohre durch einen in dieses eingesteckten Kautschukschlauch zugeführt. Das andere Ohr sei mit Watte verstopft. An einem mm-Stabe liest man die Verschiebungsgrößen zwischen den Stellungen geringster Tonstärke ab. Das Kratzen des Hörrohrs an der Wand wird durch einige umgebundene Fäden vermindert. Töne von 300 bis 600/sek werden geeignet sein.



An einem vertikalen Rohre (Schema s. Fig.) kann man einen Schlauchansatz am Rohre seitlich fest anbringen; man ändert dann die Länge der Luftsäule durch ein veränderliches Wasserniveau. Dieses stellt man so ein, daß jedesmal die Tonstärke ein Minimum wird.

Quincke, Pogg. Ann. 128, 190 1866; Wied. Ann. 63, 66. 1897; Stevens, Ann. der Ph. 7, 285. 1902. Hier auch über den Einfluß der Rohrweite.

2. Der Ton wird in das eine Ende eines verzweigten Kanals geschickt, dessen einer Zweig mittels eines Posaunenauszuges meßbar verlängert werden kann. Das andere Ende verbindet man durch einen Kautschukschlauch mit dem einen Ohr, das andere Ohr wird mit Watte verstopft. Man sucht eine Stellung des Auszuges, in welcher die Tonstärke ein Minimum wird, und verschiebt dann, bis dies wieder der Fall ist. Die Summe der beiderseitigen Verschiebungen gibt die Wellenlänge. Denn die beiden Wellenzüge interferieren jedesmal abschwächend, wenn ihre Weglängen sich um ein ungerades Vielfaches der halben Wellenlänge unterscheiden.



Quincke, Pogg. Ann. 128, 179. 1866.

III. Anwendungen von Schallgeschwindigkeiten.

Bestimmung von Gasdichten. Ist $c_p/c_v = k$ bekannt, so folgt aus der Sch.-Geschw. u m/sek das spez. Gewicht bei 0° und 760 mm Quecks. (Formel 1, S. 231)

$$s_0 = 101{,}32\,k\,\frac{1+\alpha t}{u^2}.$$

k ist für die haltbaren Gase mit zweiatomigem Molekül nahe $= 1{,}40$. Vgl. Tab. 12a.

Bestimmung des Verhältnisses c_p/c_v. Aus dem bekannten spez. Gewicht s_0 (0°, 760 mm) und der Sch.-Geschw. u bei t folgt

$$\frac{c_p}{c_v} = 0{,}00987\,\frac{s_0 u^2}{1+\alpha t}.$$

Bestimmung der Temperatur. Als Gas werde trockene Luft angenommen. Der Sch.-Geschw. u entspricht die Temperatur

$$t = 0{,}002492\,u^2 - 273.$$

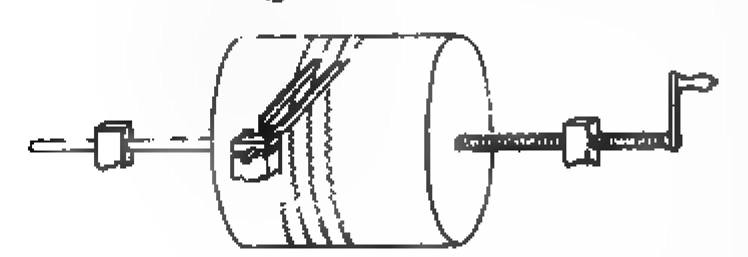
Sind die Wellenlängen eines und desselben Tones (vgl. 37) λ und λ' bei den Temperaturen t und t', so gilt

$$\frac{273+t}{273+t'} = \frac{u^2}{u'^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda'^2}.$$

Über hohe Temperaturen vgl. Kalähne, Ann. der Ph. 11, 225. 1903.

57. Absolute Schwingungszahl eines Tones.

1. Graphisch. Man befestigt den tönenden Körper neben einer Stimmgabel von bekannter Schwingungszahl[1]) und läßt beide mittels angeklebter leichter biegsamer Spitzen (Streifchen aus einer Federspule, geschabtes Celluloid usw.) Sinuskurven schreiben. Die nebeneinander liegenden Wellen werden abgezählt.



Oder man läßt neben die Kurve des Körpers in bekanntem Takte Marken zeichnen und zählt die zwischen ihnen liegenden Wellen. Die Marken werden z. B. durch eine elektromagnetische Schreibvorrichtung hergestellt, welche durch den Stromschluß (Quecksilbernapf) bei jeder Schwingung eines Sekundenpendels bewegt wird. Oder dieser Stromschluß geht durch die innere Rolle eines Induktionsapparates, während die Pole der äußeren Rolle mit der berußten Walze bez. mit der Stimmgabel verbunden sind. Die Induktionsfunken durch die Schreibspitze geben dann die Marken ab.

Für besonders schnelle Schwingungen dient anstatt Ruß eine dünne Fettschicht; die hier geforderte rasche Fortbewegung wird durch einen Glasstreifen leichter erzielt als durch die Walze.

S. Melde, Wied. Ann. 51, 661. 1894.

2. Aus Schwebungen. Stimmgabeln oder sonstige Tonquellen von nahe gleicher oder in einfachem Zahlenverhältnis stehender Schwingungszahl lassen sich nach der Anzahl der Schwebungen vergleichen, welche sie miteinander erzeugen. Jede Schwebung bedeutet ein Vorauseilen des einen Tones um eine ganze Schwingung. Weiß man nicht, welcher von beiden Tönen der höhere ist, so kann man z. B. den einen von ihnen ganz wenig vertiefen. Werden die Schwebungen dadurch langsamer, so war dieser Ton zu hoch und umgekehrt. Ein Stimmgabelton kann durch ein Stückchen Kautschukschlauch, welches dem Ende oder der Mitte näher geschoben wird, mehr oder beliebig wenig vertieft werden, der Ton einer Pfeife durch Annähern der Hand an die Öffnung.

1) Normalstimmgabeln werden von der P.-T. Reichsanstalt geprüft.

3. Mit dem Monochord. Eine gespannte weiche Saite von der Länge l m, gespannt durch ein Gewicht P, wenn 1 m der Saite das in derselben Einheit wie P ausgedrückte Gewicht p hat, besitzt eine Schwingungszahl N ihres Grundtones

$$N = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{9{,}81\,P}{p}}.$$

Durch Längen- oder Spannungsänderung kann man also zum Zweck von Vergleichungen eine beliebige, aus der Formel zu berechnende Tonhöhe hervorbringen. Die eigene Elastizität der Saite macht die Schwingungszahl etwas größer. Dünner Messing- oder besser noch Silberdraht ist geeignet.

4. Aus der Wellenlänge in Luft. Wenn u die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, λ die Wellenlänge, so ist $N = u/\lambda$. Für die Luft ist bekannt $u = 331\cdot\sqrt{1 + 0{,}004\,t}$ m/sek (vgl. S. 229). Aus der in Luft gemessenen Wellenlänge findet sich hiernach die Tonhöhe.

Auch mit sehr hohen Stimmgabeln oder Pfeifen (Galton'sche Grenzpfeifen), deren Tonhöhe mit dem Ohre nicht mehr bestimmbar ist, lassen sich Kundt'sche Staubfiguren erzeugen.

Die Messung von Wellenlängen s. in **56** I u. II.

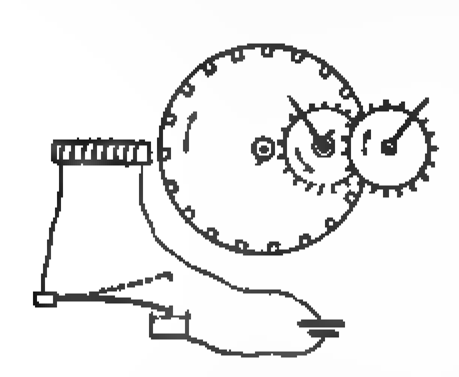
5. Stroboskopisch. Man reguliert die Umdrehungsgeschwindigkeit einer stroboskopischen, durch ein Laufwerk getriebenen Scheibe so, daß die schwingende Stimmgabel, Saite, Feder usw., mit bloßem Auge, mit Fernrohr oder Mikroskop durch die Scheibe betrachtet, scheinbar still steht. Erblickt man mehrere ruhende Bilder des schwingenden Körpers, so mäßigt man die Geschwindigkeit weiter, bis ein einfaches Bild erscheint, oder man dividiert das Resultat noch durch die Anzahl der Bilder, unter Beachtung, daß mehrere sich decken können. Hat die Scheibe m Löcher und ist ihre Umdrehungszahl $= k$/sek, so ist die gesuchte Schwingungszahl $N = m\cdot k$. Die Umdrehungszahl erhält man entweder mit Hilfe eines Zählwerkes, welches man eine gemessene Zeit hindurch mitlaufen läßt, oder man beobachtet die Umdrehungszeit eines in bekanntem Verhältnis langsamer laufenden Rades im Laufwerk.

Bequemer und auch sicherer ist es, die Rotationsgeschwindigkeit nur so weit zu regulieren, daß noch eine langsame stroboskopische Bewegung des schwingenden Körpers nachbleibt. Zählt man dann während einer Zeit von t sek s strobosko-

pische Schwingungen, und macht in derselben Zeit die Scheibe S Umdrehungen, so ist $N = (mS + s)/t$, und zwar $+$, wenn bei vermehrter Rotationsgeschwindigkeit die stroboskopische Schwingung langsamer wird und umgekehrt.

6. Mit der Sirene. Man erhält eine Sirene mit Zählerwerk auf der Höhe des zu bestimmenden Tones und zählt die Umdrehungen während einer Anzahl von Sekunden. Durch häufige Wiederholung kann eine brauchbare Zahl entstehen.

7. Phonisches Rad (La Cour). Mit einem Zählwerk ist eine hohle Trommel verbunden, die etwas (reines) Quecksilber enthält. Durch seine Trägheit und Reibung wirkt dieses ausgleichend auf den Gang und erteilt insbesondere, wenn die Trommel während einer Rotation plötzlich stehen bleiben möchte, einen Stoß nach vorwärts.



Auf der Peripherie sind in gleichen Abständen Eisenstäbchen eingelassen. Die Trommel rotiert vor einem Elektromagnetpol. Wird dieser in einem bestimmten Takt erregt, so reguliert eine Geschwindigkeit, die man der Trommel durch einen Anstoß gegeben hat, sich von selbst so, daß die Eisenstäbe den Pol in dem gleichen Takt oder mit einem ganzen Vielfachen dieser Geschwindigkeit passieren.

Das phonische Rad zählt also Oszillationen, die man auf bewegliche elektrische Kontakte übertragen hat, z. B. die von schwingenden Federn, Stimmgabeln usw. Da die Ordnungszahl der Schwingungen so gut wie immer bekannt ist, so wird eine besondere Untersuchung darüber, um wie viele Stäbchen sich bei jeder Schwingung die Trommel fortschiebt, selten gefordert. Andernfalls findet man sie leicht dadurch, daß die Umdrehungszahl durch vorübergehendes Bremsen mit dem Finger auf die nächst niedrige Zahl ermäßigt wird.

La Cour, Das phonische Rad; deutsch von Kareis, Leipzig 1880.
Über Umlaufzähler s. auch 119.

Kapillarität. Reibung. Diffusion.

58. Bestimmung einer Kapillarkonstante.

Die Kapillarkonstante einer Flüssigkeit ist das Flüssigkeitsgewicht, welches von der Längeneinheit der Berührungslinie der Oberfläche mit einer vollkommen benetzten Wand getragen wird. Dasselbe bedeutet: Wenn man nach dem Laplace'schen Gesetz den von der Krümmung einer Oberfläche herrührenden Kohäsionsdruck p durch den kleinsten und größten Krümmungshalbmesser ϱ_1 und ϱ_2 als $p = \alpha(1/\varrho_1 + 1/\varrho_2)$, für eine Kugelfläche vom Halbmesser r also $p = \alpha \cdot 2/r$, darstellt, so ist α diese Kapillarkonstante.

Praktisch drückt man meist die Längen in mm, die Kräfte oder getragenen Gewichte in mg-Gewicht aus, d. h. man mißt α in mg-Gew./mm.

Die in CGS-Einheiten, also in Dyne/cm gemessene K.-K. $[\alpha]$ ist 9,81 mal größer; $[\alpha]:\alpha = 9,81$. Denn es kommt bei dem Übergange von mm zu cm der Faktor 10, von mg zu gr der Faktor 1/1000, endlich vom Grammgewicht zur Dyne der Faktor $g = 981$. — Zahlenwerte s. in Tab. 18.

Die kapillare Steighöhe H in einem so engen kreiscylindrischen Rohre vom Radius r, daß die Höhenunterschiede in dem Meniskus vernachlässigt werden können, wobei also die Oberfläche, damit sie konstanten Kapillardruck gibt, Kugelgestalt hat, beträgt (s = sp. Gewicht), wenn die Benetzung vollkommen, d. h. der Randwinkel = 0 ist, $H = 2\alpha/(rs)$.

Beweis. Innerer Umfang $= 2r\pi$, gehobenes Gewicht $= r^2\pi Hs$, also trägt die Längeneinheit des Umfangs das Gewicht $\frac{1}{2}rHs$, welches $= \alpha$ sein muß. — Oder: Krümmungshalbmesser der halbkugeligen Oberfläche $= r$, also der (negative) Krümmungsdruck der Oberfläche $p = \alpha \cdot 2/r$. Dieser muß gleich dem (negativen) hydrostatischen Druck Hs sein.

(Eine andere, ältere Definition nennt wohl, unter der Bezeichnung a^2, das Produkt rH oder $2\alpha/s$ Kapillarkonstante. Die beiden Definitionen stehen also im Verhältnis $\alpha : a^2 = s:2$.)

Ist die Benetzung unvollkommen, d. h. bildet sich ein endlicher Randwinkel Θ, so beträgt die Steighöhe nur $H = 2\alpha \cdot \cos\Theta/(rs)$. Denn der Krümmungshalbmesser der Oberfläche ist (Fig.) jetzt $\varrho = r/\cos\Theta$, also $\alpha \cdot 2\cos\Theta/r = Hs$.

Kapillar-Depression (Quecksilber) tritt ein für $\Theta > 90°$, wodurch $\cos\Theta$, also auch H negativ wird.

I. Aus der Steighöhe.

Ein kreiscylindrisches enges Rohr wird sorgfältig gereinigt (mit konzentrierter Schwefelsäure, Alkalilösung, Alkohol, unter Nachspülung mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, alles sorgfältig frei von Fett), so daß es vollkommen benetzt, d. h. daß der Randwinkel = Null wird. Besonders Wasser und viele

wässerige Lösungen sind schwierig zu wirklicher Benetzung zu bringen; auch die Glassorte hat einen Einfluß auf die Benetzung. In Zwischenzeiten senkt man das Rohr tiefer ein, so daß der nachherige Ort des Meniskus untergetaucht ist. Jedenfalls soll man kurz vor einer Ablesung die Flüssigkeit am Meniskus durch Bewegung erneuern.

Die Höhe einer nicht bis an die obere Öffnung reichenden Flüssigkeitssäule im Kapillarrohre sei $= H$, ihr spezifisches Gewicht $= s$, und r sei der innere Halbmesser in mm, dann ist die Kapillarkonstante

$$\alpha = \tfrac{1}{2} r H s \text{ mg-Gew./mm.} \qquad 1.$$

Verschwindet r nicht gegen H, so ist $H = H_0 + \frac{1}{3} r$ zu rechnen, H_0 bis zum tiefsten Punkte des Meniskus gemessen.

Bei unvollkommener Benetzung mit dem Randwinkel Θ gilt $\alpha = \frac{1}{2} r H s / \cos\Theta$.

Beweise siehe vor. S.

Weitere, vollkommen benetzte Röhren. Solange $(r/H)^2$ gegen 1 verschwindet, gilt $H = H_0 + \frac{1}{3} r - 0{,}129\, r^2/H_0$ (Volkmann).

Für größere Weiten, bis etwa 8 mm bei Wasser, kann man für die Meniskusfläche angenähert ein halbes Rotationsellipsoid von der halben Drehachse $b = 6\alpha r/(6\alpha + r^2 s)$ und $H = H_0 + \frac{1}{3} b$ annehmen (G. Hagen).

Umgekehrt liefert diese Formel, bei bekanntem α (Tab. 18) und indem man H durch $2\alpha/(rs)$ ersetzt, die kapillare Steighöhe oder, was dasselbe ist, die Kapillarkorrektion H_0, welche von einem unten am Meniskus abgelesenen Stande zu manometrischen Zwecken abgerechnet werden muß, um die äquivalente Einstellung einer ebenen Oberfläche zu erhalten, $H_0 = \dfrac{2\alpha}{rs} - \dfrac{2\alpha r}{6\alpha + r^2 s}$.

Das Volumen eines solchen Meniskus ist $= \frac{1}{3}\pi r^2 b$, nahe $= r^2 b$ cmm. — Der am innern Umfange L eines weiten Gefäßes über die horizontale Oberfläche gehobene Flüssigkeitsrand hat die Höhe $\sqrt{2\alpha/s}$ mm und das Gesamtvolumen $\alpha L/s$ cmm; vgl. die Definition von α. — Alle Längen in mm und α in mg-Gew./mm ausgedrückt.

Vgl. z. B. die Lehrbücher von Wüllner I 397. 1895; Violle I 2, 605 ff. Berlin 1893.

Bestimmung des Halbmessers r. Ein Quecksilberfaden von der Länge l mm bei der Temperatur t wiege m mg, dann ist in mm (die Rücksichtnahme auf den Meniskus s. in **24**)

$$r = \sqrt{\frac{1}{\pi}\frac{m}{l}\frac{1 + 0{,}00018 \cdot t}{13{,}60}} \quad \text{oder für } 18^0 \; r = 0{,}1533\sqrt{\frac{m}{l}}.$$

Maßgebend ist der Halbmesser am oberen Ende der gehobenen Säule, so daß man die Länge des Quecksilberfadens zu messen hat, während seine Mitte mit dieser Stelle zusammenfällt. Die kreiscylindrische Gestalt läßt sich am abgebrochenen Ende oder auch mit einiger Annäherung nach S. 105 prüfen.

II. Aus der Höhe von Luftblasen oder Flüssigkeitstropfen (Laplace, Quincke).

1. Luftblasen. Die Flüssigkeit befinde sich in einem Troge mit vertikaler Planwand. Man erzeugt unter einer eingetauchten horizontalen Platte eine breite Luftblase (20 mm oder mehr). Wenn h der Vertikalabstand von dem ebenen untersten Teil der Blase bis zu dem Punkte weitester horizontaler Ausbauchung ist, so hat man

$$\alpha = \tfrac{1}{2} s h^2. \qquad 2.$$

2. Tropfen. Eine Flüssigkeit, welche auf ebener Unterlage einen nicht benetzenden breiten Tropfen bildet, z. B. auch ein geschmolzenes Metall, dessen Tropfen auf einer erwärmten Platte erstarrt sind, läßt sich mittels dieser Tropfen genau ebenso untersuchen. h bedeutet den Vertikalabstand der Kuppe von der größten horizontalen Ausbauchung.

Man mißt diese Höhen mit einem kleinen Kathetometer.

Über Ausführung und Korrektion auf unendliche Breite der Blasen oder Tropfen vgl. Quincke, Pogg. Ann. 139, 1. 1870; 160, 354. 1877; über kleinere Blasen Lohnstein, Wied. Ann. 53, 1062. 1894; Siedentopf, ib. 61, 235. 1897; Heydweiller, ib. 65, 311. 1898.

Randwinkel. Kennt man noch die ganze Höhe h' der Blase oder des Tropfens, so wird der Randwinkel Θ zwischen Flüssigkeit und Platte erhalten aus $\cos \tfrac{1}{2}\Theta = h'/(h\sqrt{2})$.

III. Aus der Länge von Oberflächenwellen (L. Matthiessen).

Oberflächenwellen auf Flüssigkeiten werden teils durch die Schwere, teils durch die Oberflächenspannung fortbewegt. Bedeutet λ die Wellenlänge, N die Schwingungszahl, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit u oder $N\lambda$ gegeben (W. Thomson) durch

$$u^2 = N^2\lambda^2 = g\left(\frac{\lambda}{2\pi} + \frac{\alpha}{s}\,\frac{2\pi}{\lambda}\right). \qquad 3.$$

Bei sehr kurzen Wellen von wenigen mm Länge kann man das erste, der Schwere entsprechende Glied vernachlässigen.

Man bringe zwei leichte Stäbchen, welche an die Enden

einer Stimmgabel von bekanntem N (57; Tonhöhe zwischen c und c_1 etwa) angeklebt sind, mit der Oberfläche der Flüssigkeit in Berührung und schlage die Stimmgabel an. Dann bilden sich zwischen den Spitzen stehende Wellen, deren λ (das Doppelte des Abstandes benachbarter Wellenberge) mit einem Zirkel und Maßstab in mm ausgemessen wird. Es ist dann $u^2 = N^2\lambda^2 = \alpha \cdot \frac{2\pi g}{s\lambda}$, also, $g = 9810$ mm/sek² gesetzt,

$$\alpha = \frac{1}{2\pi} s \frac{\lambda^3 N^2}{g} = \frac{1}{61600} s\lambda^3 N^2 \frac{\text{mg-Gew.}}{\text{mm}}. \qquad 4.$$

Matthiessen, Wied. Ann. 38, 118. 1889, wo $T = \alpha/s$ gesetzt ist. Ferner Grunmach, Ann. der Ph. 3, 660. 1900.

IV. Aus dem Maximaldruck bei der Bildung kleiner Tropfen und Blasen (Cantor).

Aus einer in die Flüssigkeit tauchenden vertikalen Kapillare mit kreisförmigem aus einer scharfen Schneide bestehenden Rande vom Halbmesser r werde eine Luftblase in die Flüssigkeit langsam ausgetrieben. Der dabei zum Überwinden der Oberflächenspannung nötige Überdruck im Endquerschnitt der Kapillare hat für eine bestimmte Blasengröße ein Maximum p, welches bei sehr enger Röhre offenbar für die Halbkugelform erreicht ist, weil bei dieser die Krümmung der Blase den größtmöglichen Betrag erreicht. Und zwar gilt dann $p = \alpha\, 2/r$. Vgl. den Eingang.

p wird manometrisch abgelesen, wobei der als Ballast wirkende hydrostatische Druckunterschied zwischen der Kapillaröffnung und der freien Flüssigkeitsoberfläche abgezogen wird.

Für einen sehr kleinen Halbmesser würde nach obigem die Kapillarkonstante merklich $\alpha = \frac{1}{2} rp$ sein. Wegen der Schwere der Flüssigkeit (sp. Gew. $= s$) kommt nach Cantor der mit wachsendem r sich von Eins entfernende Korrektionsfaktor $1 - \frac{2}{3}\frac{sr}{p} - \frac{1}{2}\left(\frac{sr}{p}\right)^2$ hinzu.

Näheres, auch über die Gestalt der Rohrenden sowie über verwandte Methoden und die Anwendung auf gegenseitige Kap.-Konst. zweier Flüssigkeiten bei Cantor, Wied. Ann. 47, 399. 1892; Ann. der Ph. 7, 698. 1902.

V. Durch Abtropfen.

Der Tropfen, welchen eine horizontale kreisförmige Fläche vom Halbmesser r mm tragen kann, wiegt (vgl. den Eingang) höchstens $2r\pi \cdot \alpha$ mg.

Man läßt die Flüssigkeit aus einer vertikal stehenden, unten eben geschliffenen und daselbst sehr gut benetzten Kapillarröhre mit dicker Wandung austropfen und wägt eine gezählte Menge von Tropfen. Beträgt das Gewicht des einzelnen Tropfens m mg und der äußere Halbmesser der Röhre r mm, so kann man $\alpha = m/(2r\pi)$ schätzen.

Auch von geschmolzenen Metallen läßt α sich so bestimmen, indem das untere Ende eines Drahtes vom Halbmesser r mm (S. 218) in einer kleinen Flamme von möglichst niedriger Temperatur geschmolzen wird, bis der anhängende Tropfen abfällt.

Das Verfahren unterliegt natürlich manchen Fehlerquellen.

Quincke, Pogg. Ann. 134, 365. 1868. Einen Apparat für die Messung s. Traube, Physik.-chem. Methoden S. 43 1893.

Selbst die besseren Angaben der Kap.-Konst. schwanken für Wasser zwischen 7,2 und 8,3, für Quecksilber zwischen 44 und 56 mg/mm. Zusammenstellungen bei Quincke, Wied. Ann. 52, 8. 1894 und 61, 277. 1897.

58a. Bestimmung des Reibungskoeffizienten einer Flüssigkeit durch Kapillarausfluß (Poiseuille, Hagenbach).

Reibungskoeffizient, Zähigkeits- oder Viskositätskonstante η heißt die Kraft, welche der Bewegung einer Flüssigkeitsschicht von der Flächeneinheit dadurch entgegenwirkt, daß die Schicht sich mit der stationären Geschwindigkeit 1 im Abstande 1 (eigentlich mit der unendlich kleinen Geschwindigkeit u im Abstande u) vor einer ruhenden Schicht parallel vorbei bewegt. Die Längen pflegen in cm gemessen zu werden, die Kraft entweder im CGS-System, also in Dynen (Anh. 7), oder in gr-Gewicht. In CGS-Einheiten ausgedrückt ist der R.-K. $[\eta]$ also $g = 981$ mal größer als bei der praktischen Definition.

Zur Messung ist angewandt worden die Dämpfung eines in der Flüssigkeit schwingenden Körpers oder meistens und einfacher der **Ausfluß durch enge Röhren.**

Poiseuille'sches Gesetz. Durch ein Kreiskapillarrohr vom Halbmesser r, dem Querschnitt q (24) und der Länge l, an deren Enden die konstante Druckdifferenz p herrscht, fließt in der Zeit τ ein Flüssigkeitsvolumen v

$$v = \frac{1}{\eta}\frac{\pi}{8}\frac{r^4}{l}p\cdot\tau \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{\eta}\frac{1}{8\pi}\frac{q^2}{l}p\cdot\tau.$$

η nimmt mit wachsender Temperatur stark ab. Bei 18° gilt für Wasser $[\eta] = 0{,}01055\ \mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathrm{sek}^{-1}$ oder $\eta = 0{,}00001075$ gr-Gew. sek cm^{-2}. Andere Temperaturen s. Tab. 19, andere Flüssigkeiten Tab. 19a. $1/\eta$ heißt wohl Fluidität der Flüssigkeit.

Poiseuille, Mém. de l'Inst. 9, 433. 1846; auch Pogg. Ann. 58, 424. 1843; Hagenbach, Pogg. Ann. 109, 385 u. 402. 1860.

1. Absolute Bestimmung.

Ein kreiscylindrisches Kapillarrohr ist mit einem Behälter verbunden, der dieselbe Flüssigkeit enthält. Um die Gegenkraft der Oberflächenspannung eines Tropfens zu vermeiden und den durch Bewegungsenergie bedingten Druckverlust (vgl. unten) möglichst zu verringern, erfolgt der Austritt aus dem Rohre

am besten in ein weiteres Gefäß. Druckhöhe h ist dann die Höhendifferenz beider freien Oberflächen. Wenn h nicht konstant ist, so gilt das zeitliche Mittel während des Versuchs. Ist s das spez. Gew. der Flüssigkeit, so beträgt der Druck hs (streng $h(s-\lambda)$, wo λ das sp. Gew. der Luft). Fließt in τ Sekunden das Volumen v aus, so ist in CGS-Einheiten

$$[\eta] = \frac{981}{8\pi}\frac{q^2 h s \tau}{l v} = 39{,}03\frac{q^2 h s \tau}{l v}\,[\mathrm{cm}^{-1}\,\mathrm{gr}\,\mathrm{sek}^{-1}]. \qquad 1.$$

In Gewichtsmaß kommt 981 mal kleiner

$$\eta = \frac{1}{8\pi}\frac{q^2 h s \tau}{l v} \text{ oder } = \frac{\pi}{8}\frac{r^4 h s \tau}{l v}\,\frac{\text{gr-Gew. sek}}{\mathrm{cm}^2}. \qquad 2.$$

Die Ausführung kann in verschiedener Form geschehen. Am einfachsten ist ein vertikales Kapillarrohr mit einem oben angeblasenen, oder, wenn man genauer messen will, durch Stöpsel- oder Schlauchverbindung angesetzten kleinen Behälter. Unten mündet das Rohr in ein Gefäß, welches die Flüssigkeit enthält. Durch Aufsaugen wird der Behälter gefüllt. Man läßt zwischen zwei Marken ausfließen und beobachtet die Zeit.

Das Volumen zwischen den Marken wird durch Auswägen (23) bestimmt. Als Druckhöhe gilt, wenn das Gefäß nach oben und unten symmetrisch gestaltet ist, die mittlere Höhe des Behälters über dem mittleren Stand des Niveaus im unteren Gefäß; man markiert also am Behälter den Stand der Flüssigkeitsoberfläche bei halber Füllung durch einen Diamantstrich. — Ist die Höhe des Behälters selbst nicht klein gegen die Druckhöhe, so kommt wegen der ungleichen Zeit des Abfließens der oberen und unteren Hälfte eine etwas kleinere Höhe in Rechnung. Für einen cylindrischen Behälter von der Länge l, bez. eine Kugel vom Halbmesser r ziehe man von h ab $\frac{1}{12}l^2/h$ bez. $\frac{1}{20}r^2/h$.

1^0 Temperatur beeinflußt die Zähigkeit um Prozente. Die oben gezeichnete Anordnung läßt sich in ein Bad stellen; durch einen gut schließenden Kautschukstopfen tritt in das Vorratsgefäß das Reibungsrohr und ein Rohr für Luftaustritt.

Die Rohrdimensionen wird man nach der Zähigkeit des Stoffes verschieden wählen. Je enger, desto vorsichtiger muß

man gegen feste Teilchen in der Flüssigkeit sein. Weitere und besonders zugleich kürzere Röhren können Fehler geben, weil die Formel ungenau wird; vgl. unten.

Beispiel. Volumen $v = 10{,}31$ cm³; Rohrlänge $l = 30{,}14$ cm; 26,43 cm des Rohres faßten 1,092 gr Hg von 18°; also Querschnitt

$$q = \frac{1{,}092}{26{,}43 \cdot 13{,}596\,(1 - 0{,}00018 \cdot 18)} = 0{,}003049 \text{ cm}^2.$$

Wasser von 18,5°: Druckhöhe $h = 35{,}26$ cm. Ausflußzeit $\tau = 253{,}5$ sek. Also

$$\eta = \frac{1}{8\pi} \frac{0{,}003049^2 \cdot 35{,}26 \cdot 0{,}9985 \cdot 253{,}5}{30{,}14 \cdot 10{,}31} = 0.00001062 \text{ gr-Gew. sek/cm}^2;$$

$[\eta] = 0{,}01042$ [cm^{-1} gr sek^{-1}].

Fehlerquellen. Die Voraussetzung des P.-schen Gesetzes, daß die von den Druckkräften geleistete Arbeit ganz auf das Überwinden der Reibung paralleler Stromfäden in der cylindrischen Kapillare verwendet werde, kann durch mehrere Umstände verletzt werden, deren Eintreten den nach der Formel berechneten R.-K. zu hoch ausfallen läßt. Erstens verlangt nach Poiseuille die genaue Proportionalität der Stromstärke mit dem Druck das Innehalten einer Grenze für die größten Geschwindigkeiten, bez. für die größten Querschnitte oder kleinsten Rohrlängen; mit der Dichte der Flüssigkeit verengern sich die Grenzen. Als Anhalt mag dienen, daß Poiseuille sein Gesetz für Durchmesser d zwischen 1/120 und 1/15 cm an Wasser von 10° bei einer Länge $l > 630\, d^{1,57} (v/q\tau)^{\frac{1}{2}}$ auf 1 Promille giltig gefunden hat. (Für das Beispiel berechnet sich diese Länge $= 19{,}1$ cm.)

Oberhalb gewisser Geschwindigkeiten treten auch im Innern der Kapillaren Wirbel auf, die das Gesetz ungiltig machen. Nach Reynolds ist (s = sp. Gew.) $v = 2000\,[\eta]/(sd)$ noch zulässig.

Des weiteren kommt als Fehlerquelle die Arbeit in Betracht, welche auf die der Flüssigkeit mitgeteilte Bewegungsenergie sowie auf Reibung außerhalb der Rohrenden verwendet wird.

Bewegungsenergie. Fließt die Flüssigkeit unten in einem Strahle in die Luft aus, so nimmt das Volumen v, welches in der Zeit τ austritt, die Bewegungsenergie $sv^3/(q^2\tau^2)$ mit, d. h. von der ganzen Arbeit $ghsv$ den Bruchteil $\delta = \frac{v^2}{ghq^2\tau^2}$; um denselben Bruchteil also ist die Reibungsarbeit zu groß berechnet worden, d. h. das oben berechnete η wäre mit $1 - \delta$ zu multiplizieren. Damit δ kleiner wird als 1/1000, muß $l > \frac{1000}{8\pi} \frac{s}{[\eta]} \frac{v}{\tau}$ sein. Im obigen Beispiel ist $\delta = 0{,}0051$.

Beweis. Ist U die mittlere und u die einzelne (an der Wand verschwindende) Geschwindigkeit in einem Ringe vom Halbmesser ϱ, so gilt (Hagenbach, l. c. S. 396) $u = 2\,U(r^2 - \varrho^2)/r^2$. Durch den Elementarring von der Dicke $d\varrho$ geht in der Zeit τ die Masse

$dm = su\tau \cdot 2\pi\varrho\, d\varrho = 4\pi s U\tau \cdot \frac{1}{r^2}(r^2 - \varrho^2)\varrho\, d\varrho$ mit der lebendigen Kraft

$\frac{1}{2}\,dm\; u^2 = 8\pi s\, U^2 \tau \cdot r^{-4}(r^2 - \varrho^2)^2 \varrho\, d\varrho$. Da $\int_0^r (r^2 - \varrho^2)^2 \varrho\, d\varrho = \frac{1}{6} r^6$ ist, so wird die gesamte Bewegungsenergie im Querschnitt $= \pi s\, U^2 \tau r^2$. Hierin $\pi r^2 = q$ und $U = v/q\tau$ eingesetzt, entsteht der gesuchte Wert $s v^3/q^2 \tau^2$.

Die Korrektion ist nicht anzuwenden auf den Fall, daß die Austrittsöffnung der Kapillare in eine größere Flüssigkeitsmenge mündet. Verbreitert sich der Strahl hier so, wie er bei dem Eintritt sich verengt hat, ohne Wirbel, so heben die Druckänderungen, die mit dem Entstehen und dem Verschwinden der Energie verbunden sind, sich auf

Reibung außerhalb der Röhre. Die in der Nachbarschaft des Röhrenendes zusammengedrängten Stromfäden erleiden eine Reibung, die unter Umständen durch auftretende Wirbel noch gesteigert werden kann. Die hierzu verbrauchte Arbeit läßt sich nicht genau angeben, doch muß sie kleiner sein, als die oben berechnete Bewegungsenergie des frei austretenden Strahles. Für genaue absolute Messungen hat man demnach die Verhältnisse so zu wählen, daß diese Größe hinreichend klein wird.

Eliminierung der Rohrenden (Couette). Man schaltet zwei Kapillaren verschiedener Länge l_1 und l_2, aber von gleicher Endbeschaffenheit und den möglichst gleichen Querschnitten q_1 und q_2 zwischen drei Behälter hintereinander. In der Zeit τ fließe durch jede das Volumen v, während die konstanten Druckdifferenzen p_1 und p_2 sind; dann ist

$$\eta = \frac{1}{8\pi} \frac{\tau}{v} \frac{q_1^2 p_1 - q_2^2 p_2}{l_1 - l_2}.$$

Näheres s. Couette, Ann. chim. phys. (6) 21, 469. 1890.

2. Relative Bestimmung.

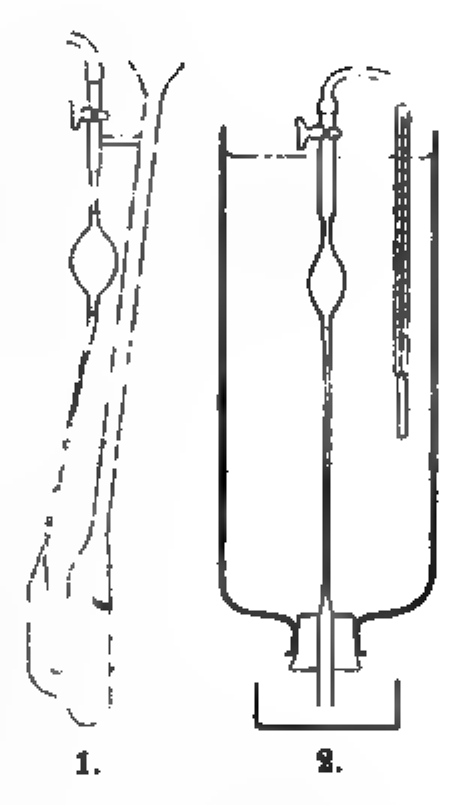
Man benutzt die Anordnung S. 242 oder eine der nachfolgenden; aber anstatt sie auszumessen, vergleicht man die Ausflußzeit unter gleichen Umständen mit derjenigen einer bekannten Flüssigkeit (Wasser; vgl. Tab. 19). Sind τ und τ' die Zeiten, s und s' die spezifischen Gewichte, so verhalten sich die Reibungskoeffizienten

$$\eta : \eta' = s\tau : s'\tau'.$$

Unterscheidet sich s von s' erheblich, so ist der Auftrieb in der Luft (sp. Gew. $= \lambda$) zu berücksichtigen, indem man $\eta : \eta' = (s - \lambda)\tau : (s' - \lambda)\tau'$ setzt.

Über die zur genauen Giltigkeit des Gesetzes geforderten Dimensionen vgl. S. 243. Korrektionen fallen weg, weil die Geschwindigkeiten in den freien Oberflächen klein sind und falls die Erweiterungen der Rohrenden schlank verlaufen, so daß keine Wirbel entstehen. Biegungen in den Kapillaren bewirken, daß das Poiseuille'sche Gesetz nur für sehr kleine Geschwindigkeiten gilt.

Die bei dem Verfahren vorausgesetzte konstante Höhenstellung der oberen Birne zum unteren Anfangsniveau ist bei gegenseitiger Vertikalstellung am leichtesten zu verbürgen. Das konstante Anfangsniveau kann nach einer unten angebrachten Marke oder eingeschmolzenen Spitze (Fig. 1), am genauesten durch Einfüllen je eines mit $s - \lambda$ proportionalen (vgl. oben) Gewichtes beurteilt werden. — Am leichtesten herstellbar ist die Anordnung 2 (Ostwald) mit einem unten etwas erweiterten, durch einen Kautschukstopfen gedichteten Rohr. Nr. 1 wird in ein Bad mit Thermometer gebracht.



Je enger das Rohr, um so mehr ist zu beachten, daß nicht feste Teilchen in die Kapillare kommen. — Die Zeitbestimmungen werden genauer, wenn das Rohr um die Marken herum nicht zu eng ist, so daß der Meniskus mehr als 1 sek braucht, um diese gleichförmige Strecke zu durchlaufen.

Hähne müssen natürlich hinreichend weit sein, daß die Luftreibung nicht in Betracht kommt. Die angesaugte Flüssigkeit soll den Hahn nicht berühren. — Erhebliche Fehler können aus Tröpfchen entstehen, die sich bei ungleichmäßiger Benetzung zeitweilig an den Verjüngungsstellen bilden.

Das seitliche Einfüllrohr an Nr. 1 (durch einen Glassteg mit dem anderen Teil verbunden) soll so gestaltet sein, daß man ev. ein langes Trichterrohr durchschieben kann, mit dem man das Gefäß bis an die Marke füllt. In die Birne wird die Flüssigkeit vor jedem Versuch angesaugt, wozu oft die Wasserluftpumpe oder eine ähnliche, improvisierte Vorrichtung bequem sein wird.

Über Messungen bei hohen Temperaturen s. Heydweiller, Wied. Ann. 55, 561. 1895; 59, 193. 1896; Thorpe u. Rodger, Phil. Trans. (A) 185 II, 397 1895.

Über Zähigkeitsmessungen durch die Dämpfung eines mit Flüssigkeit gefüllten schwingenden Gefäßes vgl. O E. Meyer, Wied. Ann. 43, 1. 1891; Mützel, ib. S. 15.

Gasreibung kann gleichfalls sowohl durch Kapillarausfluß wie durch Dämpfung schwingender Platten bestimmt werden.

Vgl u. a. die Arbeiten von O. E. Meyer, Maxwell, Kundt u. Warburg, Warburg u. v. Babo, Puluj, von Obermaier, Schumann, Barus, 1866—1889. — Zusammenstellung bei O. E. Meyer, Kinetische Theorie der

Gase, 2. Aufl. 1899, S. 171 ff. — Ferner: Breitenbach, Wied. Ann. 67, 803. 1899; Schultze, Ann. der Ph. 5, 140. 1901.

58b. Diffusion (Graham; Fick).

Gesetz von Ad. Fick; 1855. Unterschiede der Konzentration einer Lösung gleichen sich nach demselben Gesetz aus, wie Temperaturunterschiede in einem leitenden Körper Bestehen also in zwei benachbarten, um dx auseinanderliegenden Querschnitten von der Größe f die Konzentrationen ϱ und $\varrho + d\varrho$, so wandert in der Richtung des Gefälles durch jeden Querschnitt in der Zeit dt die Menge dm des gelösten Stoffes $dm = kf \frac{\partial \varrho}{\partial x} dt$. Der Diffusionskoeffizient k hat die Dimensionen (s. Anh.) $[l^2 t^{-1}]$ und wird z. B. in cm^2/Stunde ausgedrückt. Sein Wert ist nach Lösungsmittel und gelöstem Stoff sehr verschieden, ändert sich aber auch mit der Konzentration und der Temperatur.

Aus dem Gesetz folgt, wenn die Änderung nur nach der x-Axe besteht, die Differentialgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} = k \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x^2}. \qquad 1.$$

Ad. Fick, Pogg. Ann. 94, 59. 1855.

Die lange dauernden Versuche verlangen gegen die aus Strömungen entspringenden Fehler ein Zimmer oder großes Wasserbad von ausreichender Temperaturkonstanz. Thermostaten sind wegen ihrer, wenn auch kleinen, doch raschen Schwankungen gefährlich.

Bei der Messung wird in übereinander geschichteten Konzentrationen deren Änderung entweder während des Vorganges aus einer physikalischen Eigenschaft der Lösung (Lichtbrechung, elektromotorische Kraft) oder nachher durch chemische Analyse ermittelt.

1. Chemische Methode (Graham, Stefan).

In einem Cylinder mit horizontal ebenem (am einfachsten durch Quecksilber hergestelltem) Boden werden zwei abgemessene Mengen der in einander diffundierenden Flüssigkeiten, z. B. Lösung und Lösungsmittel, über einander geschichtet, wobei man unter der leichteren, zuvor eingefüllten, die schwere mittels einer Pipette sich ganz langsam ausbreiten läßt. Nach einer gemessenen Versuchsdauer — zwischen mehreren Stunden und mehreren Tagen — wird der Inhalt schichtenweise in gleiche Volumina getrennt und analysiert. Für die auf der Integration der Gleichung 1 beruhende Ableitung des Diff.-K. hat Stefan Tabellen berechnet.

Stefan, Wien Sitz. Ber. 79, 184. 1879. Über Anordnung des Versuchs s. z. B. Scheffer, ZS f. phys. Ch. 2, 390. 1888; Arrhenius, ib. 10, 51. 1892; Öholm, ib. 45, 700 1903; Akad. Abh. Helsingfors. 1902.

2. Elektrische Methode (H. F. Weber).

Diese ist beschränkt auf Lösungen von Elektrolyten mit umkehrbaren Elektroden aus dem Metall des Salzes.

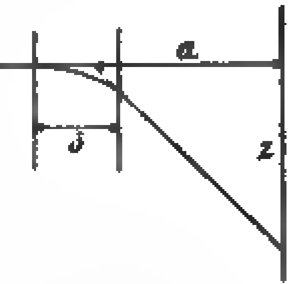
Zwischen zwei horizontalen Elektroden befinden sich die in einander diffundierenden Schichten; man beobachtet den zeitlichen Verlauf der durch die Konzentrationsdifferenz an den Elektroden bewirkten elektrischen Spannung (99; 104). Die Berechnung gründet sich auf Gl. 1.

Die Schichtung ist entweder mechanisch wie in Nr. 1, oder besser dadurch bewirkt worden, daß man zwischen nahe einander gegenüberstehenden Elektroden kurze Zeit einen elektrischen Strom übergehen ließ.

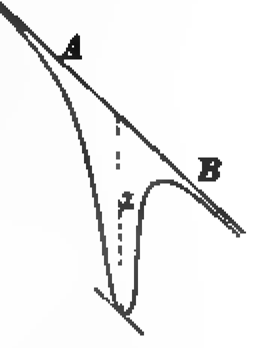
H. F. Weber, Wied. Ann. 7, 469 u. 536. 1879; Seitz, ib. 64, 759. 1898.

3. Optische Methode (Wiener).

Ein Lichtstrahl, der in ein geschichtetes Mittel parallel der Schichtung eintritt, krümmt sich nach der stärker brechenden Seite hin. Die Größe der Krümmung, d. h. der resiproke Krümmungshalbmesser, ist gleich dem relativen Gefälle $\frac{1}{n}\frac{dn}{dx}$ des Brechungsindex n; vgl. z. B. Wiener l. c. S. 106. Beim Durchsetzen eines Diffusionsgebietes von der Dicke δ erfährt ein Strahl hierdurch, wie leicht zu sehen ist, eine Richtungsänderung $= (\delta/n)\,dn/dx$, die bei dem Wiederaustritt aus der Flüssigkeit auf $\delta\,dn/dx$ steigt. Auf einen Schirm im optischen Abstand a von der Gefäßmitte (d. i. äußerer Abstand $+\frac{1}{2}\delta/n$) auffallend ist der Strahl dann um die Höhe $z = a\delta \cdot dn/dx$ abgelenkt.



Diese Höhe z wird am einfachsten so gemessen: Ein um 45° gegen die Horizontale geneigter Spalt empfängt von einer starken Lichtquelle (Bogenlampe) paralleles, durch ein Strahlenfilter (59) homogen gemachtes Licht, welches vom Spalt auf eine Sammellinse und von da auf einen parallelwandigen Diffusionstrog (lichte Dicke $\delta = 2$ bis 3 cm) fällt. Im Abstande a ($1\frac{1}{2}$ bis 2 m) hinter dem Troge befindet sich der Schirm; die obige Linse entwerfe auf diesem ein deutliches Bild AB des Spaltes. Nach dem Übereinanderschichten der beiden Flüssigkeiten verwandelt dieses Bild sich in eine Kurve von der Gestalt der Figur. z ist die obige Höhe, die sich nun durch den Diffusionsvorgang allmählich vermindert.



Über genauere Messung mittels einer Fadenkreuzlupe vgl. unten Heimbrodt.

t bedeute die seit dem Beginne der Diffusion, d. h. seit dem Bestehen einer unstetigen Berührungsfläche verflossene Zeit und z die jetzt bestehende maximale Senkung der Kurve. Die Konzentrationsunterschiede seien nicht zu groß, so daß man zwischen der Änderung der Konzentration und des Brechungsverhältnisses Proportionalität annehmen kann. n_1 und n_2 seien die Brechungsindices der beiden Originalflüssigkeiten, z. B. des Lösungsmittels und der Lösung; δ und a bedeuten wie oben die Schichtdicke und den Schirmabstand.

Wir bezeichnen $(n_2 - n_1)^2 a^2 \delta^2 / 4\pi = C$; dann folgt aus der Integration der Gl. 1 der Diffusionskoeffizient $k = C/(z^2 t)$. Insofern aber der Nullpunkt der Zeitrechnung nicht genau festzustellen ist, beobachtet man zu zwei Zeiten t_1 und t_2 die Höhen z_1 und z_2 und rechnet

$$k = C \frac{1/z_2^2 - 1/z_1^2}{t_2 - t_1} \quad \text{oder} \quad = C \frac{1}{t_2 - t_1} \frac{z_1^2 - z_2^2}{z_1^2 z_2^2}.$$

Eine seitliche Verschiebung der Kurve während der Diffusion zeigt an, daß der Ort des maximalen Konzentrationsgefälles wandert, und bedeutet eine Abhängigkeit des Diffusionskoeffizienten von der Konzentration.

O. Wiener, Wied. Ann. 49, 105. 1893; Heimbrodt, Diss. Leipzig, 1903. Theorie bei Boltzmann, Wied. Ann 53, 959. 1894; Thovert, C. R. 133, 1197. 1901.

Licht[1]) und Wärmestrahlung.

59. Lichtquellen. Spektrum.

Eingehend in Kayser, Handbuch der Spektroskopie, Leipzig 1900. — Weiße starke Lichtquellen sind außer der Sonne der Kalk- oder besser Zirkon-Brenner (Linnemann) im Sauerstoffgebläse und die elektrische Bogenlampe. Bogenlicht ist an ultravioletten Strahlen reicher als Sonnenlicht. — Auch Auer-Licht eignet sich oft, und als konstante, wenn auch nicht so weiße Quelle, die Nernst-Lampe.

Licht von bestimmter Wellenlänge.

Es ist für viele Messungen gleichgiltig, ob man Licht durch Absorption bez. spektrale Zerlegung vor dem Eintritt in die Instrumente reinigt oder nach dem Austritt (vor dem Auge). Letzteres ist oft bequemer.

Farbig absorbierende Mittel („Strahlenfilter") sind die einfachsten, freilich unvollkommenen Hilfsmittel Kräftig rotes Kupferoxydulglas wird häufig angewandt. Auch einzelne grüne Gläser des Handels oder Gelatineplatten sind brauchbar, besonders wenn man verschiedenfarbige Platten geeignet hintereinander stellt. Über Jenaer Farbgläser vgl. Zsigmondy, ZS f. Instr. 1901, 97; Grebe, ib. S 105. Flüssigkeiten bei Landolt, Drehungsvermögen, S 390. 1898: Rot „Kristallviolett 5 BO" + K_2CrO_4; Gelb $NiSO_4$ + $KMnO_4$ + K_2CrO_4; Grün $CuCl_2$ + K_2CrO_4; Hellblau „Doppelgrün SF" + $CuSO_4$; Dunkelblau „Kristallviolett 5 BO" + $CuSO_4$. Das +Zeichen bedeutet Hintereinanderschalten. Näheres l. c.

Man prüft und definiert die resultierende Farbe mit dem Spektralapparat; 64

Glühende Metalldämpfe. Metallsalze, außer Na besonders noch Li und Tl (Tab. 22. 23; Fig. S. 261), werden in den Bunsenbrenner eingeführt als Perlen an der Platin-Öse oder von Platin-Drahtkörbchen gehalten (Landolt'scher Brenner), in das Luft- oder Sauerstoff-Gebläse auch als gegossene Stäbchen (du Bois, ZS f. Instr. 165. 1892). Das Chlorid oder Bromid, wegen Verknisterns vorher erhitzt, ist heller; die Dämpfe greifen Metalle an. Das Carbonat ist ausdauernder, leichter anzuschmelzen und für Lithium durch Ausschütteln des Pulvers mit Wasser leicht zu reinigen. Auch Stäbchen aus Natronglas können dienen. Thallium, rasch verdampfend, in schwacher Gas- oder Alkoholflamme zu gebrauchen. Vgl. auch 64 II. — Nebenlicht, z. B. aus der Gasflamme selbst, sucht man durch

1) Über optische Konstanten s. Tab. 12a u. 22 bis 26. — Eine ausführliche Zusammenstellung mit Quellenangabe in: Recueil de Données numériques, publié par la Société Française de Physique; Optique, par H. Dufet, 3 Bde., Paris 1898—1900.

Absorptionsmittel, z. B. farbige Gläser, für Na-Licht auch durch Lösungen von Kaliumbichromat + Uranosulfat zu beseitigen. Vgl. Landolt, l. c. S. 362.

Die Metalle K, Sr, Ca, Rb, Cs, Zn, Cd usw. liefern eine Summe von diskreten Farben, die durch das Prisma getrennt werden können. Über ihre Wellenlänge und Farbe vgl. Tab. 28 und Fig. S. 261.

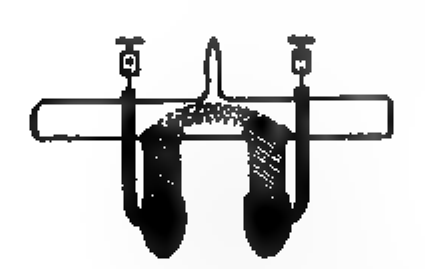
Gleichmäßig leuchtende Flammen erzielt die Verteilung einer Salzlösung in die dem Brenner zugeführte Luft durch einen Zerstäuber (Gouy, s. Kayser, Handb. d. Spektroskopie S. 149) oder das Zerspritzen mittels Gasentwicklung in einer auf den Brenner aufgesetzten kleinen elektrolytischen Zelle aus Porzellan (Beckmann, ZS f. phys. Ch. 34, 593; 35, 443 u. 652. 1900; 40, 465. 1902; Zusammenstellung in ZS f. Instr. 1903, 188).

Bei der Erzeugung von Metalldampflicht mit dem elektrischen Lichtbogen kann der Bogen so lang gemacht werden, daß die Kohlen sich abblenden lassen; die Banden des Kohledampfes, des Cyans und Eisens aber bleiben als Verunreinigungen des Spektrums. Vgl. Kayser, S. 168.

Die Funken des Induktionsapparates werden für Spektralzwecke meistens durch Nebenschaltung von Leidener Flaschen verstärkt. Das Spektrum zeigt außer den Linien der Elektrodenmetalle die aus der Atmosphäre stammenden Linien und ist infolge dessen sehr kompliziert. — Einschalten einer Spule mit Selbstinduktion in den Funkenkreis der Flasche läßt die Luftlinien zurücktreten. Schuster u. Hemsalech, Proc. R. S. 64, 335. 1899; Phil. Trans (A) 193, 211. 1900.

Geißler'sche Röhren. Die gewöhnliche eingeschnürte Form und, um mehr Licht zu bekommen, eine solche mit Längsdurchsicht s. Fig. Wasserstoff-Füllung gibt die Wellenlängen C, F, eine aus der Gruppe G, sowie h (Fig. S. 261). — Lichtstarke Heliumröhren liefert Goetze, Leipzig.

Quecksilber, Zink, Cadmium erwärmt man in der Röhre. Das intensivste Quecksilberlicht gibt die Arons'sche Röhre (Wied. Ann. 47, 767. 1892), in der ein Vakuum-Lichtbogen zwischen Quecksilberelektroden durch konstanten Strom erzeugt wird. Anfängliches Zusammenfließenlassen des Quecksilbers leitet den Strom ein. Gegen Zerspringen schützt am besten ein Bad mit heißem Wasser. Anordnung von Lummer nebenstehend; auch die Stromzuführung wird durch Quecksilber vermittelt. — Lampen aus Quarzglas liefert Heraeus.



Andere Gestalten s. z. B. Kayser, l. c. S. 172 u. 232ff.; Perot u. Fabry, J. d phys. 9, 369. 1900; auch ZS f. Instr 1902, 360; Siedentopf, ib. 1904, 22.

Durchlässigkeit für Ultraviolett und Ultrarot.

Von den scheinbar farblos durchsichtigen Mitteln, auch Gläsern, werden manche schon nach den Grenzen des Spektrums hin unvollkommen durchlässig, bald darüber hinaus die meisten, und nur wenige bewahren eine starke Durchlässigkeit weit ins Ultrarot oder Ultraviolett. Literatur über das Verhalten der Gläser im Ultraviolett und Angaben über neue

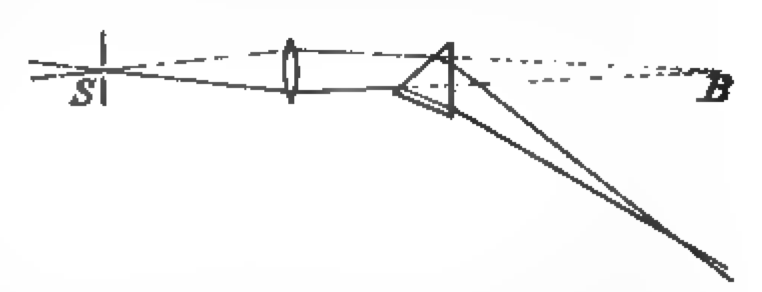
durchlässigere Jenaer Gläser s. Krüss, ZS f. Instr. 1903, 197 u. 229; Zschimmer, ib. S. 360.

Für ultraviolette Strahlen eignet sich Quarz oder Flußspat; der letztere absorbiert auch ultrarote Strahlen bis 7μ wenig. Von der Wellenlänge $\lambda = 0{,}25\,\mu$ (0,00025 mm) an abwärts absorbiert Quarz, von $\lambda = 0{,}185\,\mu$ an sogar die Luft selbst, so daß schließlich mit Flußspatpräparaten im Vakuum oder in Wasserstoff gearbeitet werden muß (Schumann).

Im Ultrarot sind besonders Steinsalz- und Sylvinpräparate von Bedeutung. Eingehende Angaben über Absorption besonders im ultraroten Spektrum s. in Tab. 25.

Spektrale Zerlegung.

Licht passiert einen Spalt S und dann eine Linse, welche ein objektives Bild B des Spaltes entwirft. Hinter die Linse kommt ein Prisma; falls die Lichtquelle vom Spalte weiter absteht (Sonne), etwa an den Ort des Bildes, welches die Linse von der Lichtquelle entwirft. Ungefähr im Abstande des Bildes B vom Prisma entsteht dann seitlich, bei einem geradsichtigen Prisma nahe bei B, das Spektrum, aus welchem die gewünschte Farbe durch eine Blende herausgeschnitten werden kann. Gewöhnlich gibt man dem Prisma die Stellung, in welcher das Spektrum am wenigsten abgelenkt ist, doch können auch andere Stellungen, welche eine Farbe mehr zusammendrängen oder ausbreiten, Vorteile bieten. — Rutherford'sche zusammengesetzte Priemen geben eine besonders starke Dispersion. — Mehrere hintereinander gestellte Prismen bedürfen beim Übergang aus einem in einen andern Spektralbezirk im allgemeinen einer Änderung ihrer gegenseitigen Stellung; vgl. z. B. 64 III.



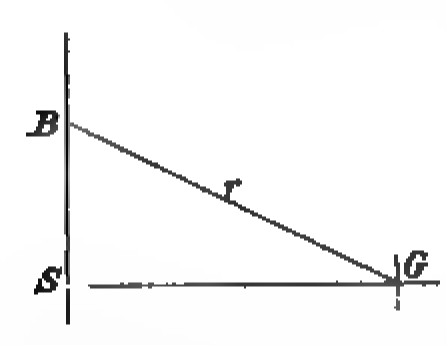
Ein reines Spektrum verlangt einen engen Spalt mit scharfen Schneiden und eine gute achromatische Linse, oft auch ein Abblenden falschen Lichtes. Die Reinheit wird an dem deutlichen Auftreten der Fraunhofer'schen oder Metalldampf-Linien erkannt, auch wohl nach dem Bilde von einem Querfaden im Spalt beurteilt, welches im Spektrum als Querlinie auftritt.

Gitterspektrum.

An die Stelle des Prismas kann das Beugungsgitter („Nobert'sches Gitter") treten, welches nach beiden Seiten Spektra liefert, in der Regel nach der einen Seite lichtstärker als nach der anderen. Das sichtbare Spektrum 1. Ordnung (Fig. zu 65 II) ist getrennt von den übrigen, die höheren Spektra greifen in einander über.

Reflexionsgitter. Dieselben pflegen in Metallflächen eingegraben zu sein. Ebene Reflexionsgitter wirken ebenso wie die durchlässigen, sobald man das Spiegelbild der Lichtquelle in der Gitterebene als Lichtquelle ansieht (Quincke, Pogg. Ann. 146, 43. 1872).

Rowland'sches Gitter. Die reflektierende Fläche ist schwach sphärisch und entwirft daher das Spektrum ohne Linse, was wegen der Absorption von Bedeutung ist. Das deutliche Spektrum ist nicht eben. Seine Teile erscheinen nach und nach deutlich längs der Linie SB durch die folgende, meist gebrauchte Rowland'sche Anordnung mit verschiebbarem Gitter. S sei der Spalt, SG und SB sind zu einander senkrechte Schienen, BG ein Arm von der Länge des Krümmungshalbmessers der Gitterfläche.



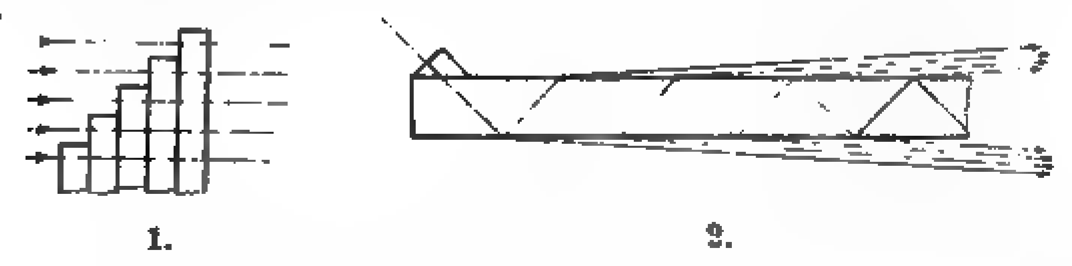
Der Teil des Spektrums bei B erscheint deutlich, wenn das Gitter, welches bei der Bewegung des Arms parallel verschoben wird, sich in G befindet. — Kayser, l. c. S. 450. 1900. Andere Anordnungen ebenda S. 478 ff.

Spektroskopie mittels Interferenz hoher Ordnung. Die stärkste auflösende Kraft liefern die Interferenzen sehr hoher Ordnung an dicken Platten, wobei das Zusammenwirken einer beschränkten Anzahl von Strahlen genügt, um scharfe Maxima zu liefern, wenn die Strahlen in einem Fernrohr zur Interferenz gebracht werden. Die Interferenzfähigkeit besteht selbst bei Gangunterschieden von Millionen Wellenlängen noch merklich ungeschmälert. Vgl. auch **63a** u. **65** IV.

Die hierauf beruhenden Spektroskope dienen u. a. zum Studium des feineren Baues einzelner Spektrallinien. Die Anordnungen sind:

Luftplattenspektroskop; Fabry u. Perot. Ein Parallelstrahlenbündel wird wiederholt zwischen den beiden durchlässig versilberten Glasflächen hin und her reflektiert, welche eine planparallele Luftschicht begrenzen. Zur Interferenz werden die einseitig austretenden Teilstrahlen gebracht. Ann. chim. phys. (7) 16, 115. 1899.

Stufenspektroskop; A. Michelson. Fig. 1. Genau gleich dicke Glasplatten liegen abgestuft aneinander. Zur Interferenz kommen entweder die Strahlen, welche die Stufen durchsetzt haben (Fig.), oder solche, die an den (versilberten) Oberflächen reflektiert worden sind. Journ. de phys. (3) 8, 305. 1899.



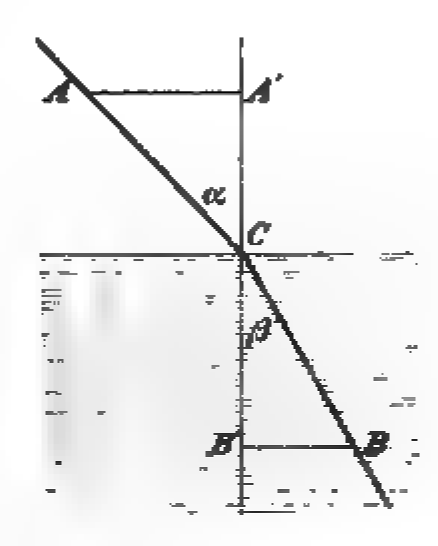
1. 2.

Glasplattenspektroskop; Lummer u. Gehrcke. Fig. 2. Die Strahlen werden in eine vollkommen planparallele Platte so eingeleitet, daß sie bei den wiederholten Reflexionen die Wände beinahe unter dem Winkel der totalen Reflexion treffen. Die fast streifend austretenden Bruchteile der einen Seite werden zur Interferenz gebracht. Ann. der Ph. 10, 457. 1903.

60. Lichtbrechungsverhältnis eines Prismas. Spektrometer.

Wenn bei dem Eintritt eines Lichtstrahls aus Luft in einen Körper α der Eintritts- und β der Brechungswinkel ist (Fig.), so stehen die Sinus beider Winkel in einem konstanten Verhältnis zu einander, dem Brechungs-Verhältnis (-Koeffizient, -Exponent, -Index) n des Körpers; Snell'sches Gesetz, 1621 Also ist

$$n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$



Geometrisch ist $\sin\alpha = AA'/AC$ und $\sin\beta = BB'/BC$, oder wenn $AC = BC = 1$ ist, $\sin\alpha = AA'$ und $\sin\beta = BB'$. Sinus und Logarithmen s. Tab. 53. 54.

n bedeutet zugleich das Verhältnis der Lichtgeschwindigkeit oder, was dasselbe sagt, der Wellenlänge in der Luft zu derjenigen im brechenden Körper. Hieraus folgt, daß aus einem lichtbrechenden „Mittel" vom B.-V. n_1 in ein anderes vom B.-V. n_2 das B.-V. gleich $n_1 n_2$ ist. — Das B.-V. n_0 aus dem leeren Raum in gewöhnliche Luft beträgt 1,00029; durch Multiplikation mit n_0 wird ein in Luft beobachtetes B.-V. „auf den leeren Raum reduziert". $n_0 - 1$ ist der Dichtigkeit der Luft proportional.

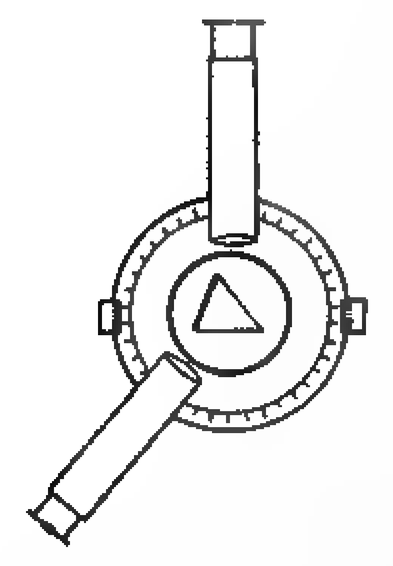
Wenn s die Dichtigkeit eines Körpers, so heißt $r = (1/s) \cdot (n^2 - 1)/(n^2 + 2)$ [früher auch wohl $(n - 1)/s$ oder $(n^2 - 1)/s$] sein spezif. Brechungs- oder Refraktionsvermögen. r ist von Temperatur, Druck und Aggregatzustand nahe unabhängig. Also nimmt das Brechungsverhältnis durch Temperaturausdehnung ab. Wenn A das chemische Molekulargewicht des Körpers, so heißt rA sein molekulares Brechungsvermögen.

Zur Bestimmung des B.-V. wird der Körper meist in Prismenform angewandt, ein fester Körper geschliffen, eine Flüssigkeit in ein Prisma aus ebenen Glasplatten eingefüllt. Aus dem Ablenkungswinkel des Lichtes beim Durchtritt durch das Prisma und dem gegenseitigen Winkel der brechenden Flächen (dem „brechenden Winkel") läßt das B.-V. sich berechnen.

Über die Messungen an Gasen s. 63a.

Spektrometer. Allgemeine Regeln.

Das Spektrometer (Formen von Meyerstein 1856, Abbe, v. Lang) besteht aus dem Teilkreise, dem Tischchen für das Prisma, dem Spaltrohr oder Kollimator und dem Fernrohr; vgl. d. Fig. f. S. Das meistens feststehende Spaltrohr ist nach außen durch einen in seiner Breite verstellbaren Spalt, nach dem Prisma zu durch eine Linse abgeschlossen, deren Brennpunkt in den Spalt fallen muß, um jedes von einem Punkte des Spaltes ausgehende Lichtbündel als Parallelstrahlenbündel nach dem Prisma austreten zu lassen. Der Spalt vertritt so ein unendlich fernes leuchtendes Objekt. Das entweder mit oder über dem Teilkreis drehbare



Fernrohr soll den Spalt deutlich erscheinen lassen, muß also auf Parallelstrahlen, „auf unendlich", eingestellt sein. Für manche Methoden ist es nötig, daß auch Drehungen des Prismas gemessen werden können, daß also das Tischchen mit dem drehbaren Teilkreise verbunden werden und das Fernrohr dabei festgestellt werden kann.

Alle Drehaxen sollen konzentrisch sein.

1. Kreisablesung. Die Anbringung zweier gegenüber liegender Ablesepunkte an einer Kreisteilung soll nicht nur die Ablesungsfehler verringern, sondern vor allem die Exzentrizität der Kreisteilung gegen die Drehungsaxe eliminieren. Man beobachte also jedesmal beide Nonien, immer die Nummer des Nonius notierend. Dann nimmt man entweder das Mittel aus den Winkeln, die jeder Nonius angibt, oder bequemer, man rechnet die Gradablesung immer nach Nonius I und nimmt nur in den Bruchteilen (Minuten) die Mittel.

2. Einstellung des Fernrohrs auf unendlich. Man macht zunächst das Fadenkreuz des Fernrohrs durch Verstellen des ersten Okularglases oder des Fadenkreuzes selbst deutlich sichtbar. Dann richtet man das Rohr auf einen sehr entfernten Gegenstand und bewirkt mit dem Auszuge, daß das Bild dieses Gegenstandes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt, d. h. daß beide bei einer Seitenbewegung des Auges sich nicht gegen einander verschieben. Vgl. auch Nr. 4a dieses Abschnittes.

3. Einstellung des Spaltrohrs (Kollimators) auf Parallelstrahlen. Man richtet das auf unendlich eingestellte Fernrohr auf den beleuchteten Spalt und zieht das Spaltrohr so weit heraus, daß das Bild des Spaltes keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigt.

4. Beleuchtetes Fadenkreuz. Die Beleuchtung geschieht durch das Licht einer seitlich aufgestellten Flamme, welches auf eine geneigte, zwischen (Gauß'schem) Okular und Fadenkreuz befindliche Planglasplatte (Fig.) oder auf ein kleines Reflexionsprisma fällt und von da durch das Fadenkreuz nach dem Objektiv geworfen wird. Einem gewöhnlichen Okular kann man auch ein unter etwa 45° geneigtes Glasplättchen vorkleben, welches seitlich beleuchtet wird.

Ist das Fernrohr auf unendlich eingestellt, so treten Strahlen, die von einem Punkte des Fadenkreuzes kommen, als Parallelstrahlen aus dem Objektiv und geben, von einer ebenen Fläche in das Fernrohr reflektiert, ein deutliches Bild des Fadenkreuzes.

Das beleuchtete Fadenkreuz dient zu folgenden Zwecken:

a) Einstellung des Fernrohrs auf unendlich. Man verschiebt den Auszug, bis das Fadenkreuz und sein an einer Ebene gespiegeltes Bild keine Parallaxe zeigen.

b) Senkrechtstellung einer spiegelnden Ebene gegen das Fernrohr. Man orientiert so, daß das Fadenkreuz und sein Bild zusammenfallen.

c) Senkrechtstellung der Sehlinie des Fernrohrs zu seiner Drehaxe. Auf das Tischchen des Instruments stellt man ein beiderseitig spiegelndes, etwa versilbertes (8, 6) Planparallelglas, welches selbst auf einem kleinen Fuß mit Stellschraube steht oder auch direkt mit Klebwachs befestigt wird. Dieses Glas orientiert man so, daß im Fernrohr das Fadenkreuz ebenso hoch liegt wie sein Spiegelbild. Dreht man nun das Fernrohr um 180°, so müssen, wenn die Sehlinie zur Drehaxe senkrecht ist, abermals die Bilder zusammenfallen. Wenn nicht, so korrigiert man die Hälfte der Abweichung durch Neigen des Spiegelglases, die andere Hälfte durch Neigen des Fernrohrs und wiederholt die Probe u. s. f.

Eine nicht ganz parallele Glasplatte schneide und stelle man so, daß die beiden Bilder des Fadenkreuzes neben einander liegen. Dann läßt sich das Glas zu den Prüfungen verwenden.

d) Prüfung ob die Drehaxe des Tischchens oder des Kreises senkrecht zur Sehlinie des Fernrohrs steht. Nach der Einstellung des Fadenkreuzbildes dreht man das Spiegelglas um diese Axe um 180°; dann müssen die Bilder wieder zusammenfallen.

e) Hat das Spiegelglas selbst einen kleinen Fuß mit Stellschrauben, so kann man hiermit in leicht ersichtlicher Weise prüfen, bez. mit den Regulierschrauben des Tischchens bewirken, daß die Oberfläche des Tischchens mit der Sehlinie des Fernrohrs parallel ist.

f) Herstellung des Parallelismus einer Ebene (Prismenfläche) mit der Drehaxe. Nach *b* auszuführen,

nachdem die Orientierung c angestellt worden ist. (Ohne beleuchtetes Fadenkreuz verfährt man mit dem als berichtigt angenommenen Fernrohr und dem Spaltrohr so: Man richtet das Fernrohr gerade auf den Spalt und markiert durch einen Querfaden die Spalthöhe, welche in das Fadenkreuz fällt. Betrachtet man dann den Spalt in der Fläche gespiegelt, so muß, wenn diese mit der Axe des Instrumentes parallel ist, dieselbe Spalthöhe im Fadenkreuz erscheinen.)

Sind zwei Flächen desselben Körpers (Prisma) einzustellen, so stellt man letzteren so, daß eine der Flächen auf der Verbindungslinie zweier Fußschrauben des Tischchens senkrecht steht. Diese Fläche wird zuerst berichtigt; alsdann die andere, wobei aber die genannten beiden Schrauben nicht mehr benutzt werden.

g) Prüfung einer Platte auf Planparallelismus. Die Kennzeichen sind: 1) es muß bei passender Stellung des Fernrohrauszuges das Spiegelbild des Fadenkreuzes deutlich und einfach erscheinen; 2) wenn das Fadenkreuz gegen sein Spiegelbild auf der einen Seite keine Parallaxe zeigt, so muß dies ohne Verstellung des Fernrohrauszuges auch auf der anderen Seite der Fall sein. Dann ist zugleich das Fernrohr auf unendlich eingestellt.

Brechungsverhältnis eines Prismas.

Zu messen ist der brechende Winkel des Prismas und die Ablenkung des Strahls.

I. Messung des brechenden Winkels φ.

a) Wenn das Fernrohr feststeht und das Prisma mit dem Teilkreise drehbar ist. Das Prisma wird so auf das Tischchen gestellt, daß nach passender Drehung des Kreises die eine brechende Fläche nahe den früheren Ort der anderen einnimmt. Nach Nr. 4*f* werden zuerst die beiden Prismenflächen mittels der Stellschrauben des Tischchens der Drehaxe parallel gemacht. — Dann werden das Fernrohr und Spaltrohr unter tunlichst spitzem Winkel gegen einander festgestellt (Fig.), das Spaltrohr beleuchtet und nun der Kreis mit dem Prisma so gedreht, daß das Fernrohr das in einer der beiden Flächen gespiegelte Spaltbild im Fadenkreuz sieht.



Die Einstellung des Teilkreises wird jetzt abgelesen. Durch

Drehen des Teilkreises mit dem Prisma stellt man ebenso auf die andere Prismenfläche ein und liest wieder ab. Die Differenz beider Ablesungen, selbstverständlich mit Rücksicht auf eine etwaige Überschreitung des Nullpunktes der Teilung, ergibt von 180^0 abgezogen den brechenden Winkel φ.

Mit beleuchtbarem Fadenkreuz braucht man keinen Spalt, sondern dreht mit dem Teilkreise zuerst die eine, dann die andere Prismenfläche so, daß das Kreuz mit seinem Spiegelbilde in der Fläche zusammenfällt.

b) Wenn das Prisma feststeht, das Fernrohr mit dem Nonius oder mit dem Kreise drehbar ist. Man stellt das Prisma so auf, daß ungefähr die rückwärts verlängerte Halbierungslinie des brechenden Winkels den Spalt trifft. Sodann wird das Fernrohr auf das Spiegelbild des Spaltes in jeder Fläche eingestellt. Der Unterschied der Ablesungen am Kreise in beiden Lagen ist der doppelte brechende Winkel. Der Spalt muß hier nach Nr. 3 sorgfältig auf unendlich eingestellt sein.



Mit dem beleuchteten Fadenkreuz mißt man den brechenden Winkel, indem man das Kreuz mit seinem Spiegelbilde in jeder der beiden Flächen zur Deckung bringt. Der gemessene Drehungswinkel ergänzt φ zu 180^0.

II. Messung des Ablenkungswinkels δ.

Hier wird Licht von bestimmter Brechbarkeit (Farbe, Wellenlänge) vorausgesetzt, z. B. Natriumlicht; vgl. S. 249. Die Richtung des nicht abgelenkten Strahls wird erhalten, indem man das Fernrohr direkt auf den Spalt einstellt. Durch das Einschieben des Prismas entsteht ein Ablenkungswinkel. Man hat folgende Methoden:

a) Symmetrische oder Minimumstellung (Fraunhofer). Die Größe der Ablenkung eines Strahles hängt von der Richtung ab, in der er das Prisma durchsetzt. Sie ist am kleinsten bei symmetrischem Durchgang (Fig.). Um diese „Minimumstellung“ zu haben, stellt man Prisma und Fernrohr so, daß

der abgelenkte Strahl im Fernrohr erscheint (über die Stellung vgl. Fig. S. 254), dreht dann langsam das Prisma und folgt der Verschiebung des Bildes mit dem Fernrohr. In der Lage, in welcher der Lichtstrahl die möglichst kleine Ablenkung hat (wo das Bild sich nach derselben Seite bewegt, man mag das Prisma links oder rechts drehen), fixiert man das Prisma, stellt nun das Fadenkreuz auf den Spalt ein und liest den Kreis ab. Diese Einstellung wird von der direkten Einstellung auf den Spalt abgezogen und ergibt den Ablenkungswinkel δ.

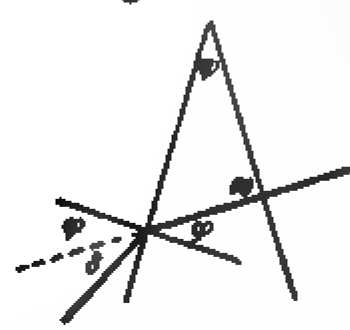
Statt auf den Spalt direkt einzustellen, kann man an Instrumenten, wo das Prismentischchen für sich allein drehbar ist, noch besser den Strahl einmal nach links, das andere Mal nach rechts durch das Prisma minimal ablenken lassen und von den beiden Einstellungen des Fernrohrs die halbe Differenz nehmen.

Das B.-V. n ist, wenn φ den Prismenwinkel bedeutet,

$$n = \frac{\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi)}{\sin \frac{1}{2}\varphi}.$$

Beweis. Ein symmetrisch durch das Prisma gehender Strahl bildet mit den beiden Normalen den gleichen Winkel $\frac{1}{2}\varphi$. Nach dem Brechungsgesetz ist (Fig. v. S.) $\sin \alpha = n \sin \frac{1}{2}\varphi$. Nun ist offenbar $\alpha = \frac{1}{2}(\delta + \varphi)$, also $\sin \frac{1}{2}(\delta + \varphi) = n \sin \frac{1}{2}\varphi$, q. e. d.

b) Senkrechter Austritt (Meyerstein). Das Verfahren verlangt ein beleuchtbares Fadenkreuz. Man gibt dem Prisma die Stellung, bei welcher die dem Fernrohre zugewandte Fläche zur Sehlinie senkrecht ist, d. h. bei welcher das Fadenkreuz mit seinem Spiegelbild zusammenfällt. Es gilt (Fig.)



$$n = \frac{\sin(\delta + \varphi)}{\sin \varphi}.$$

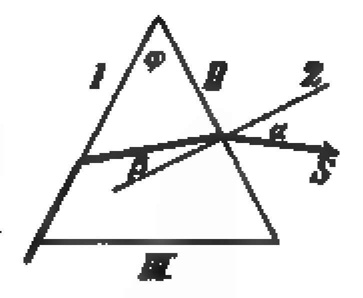
c) In sich zurückkehrender Strahl (Abbe). Vgl. die Figur zu *b*. Das Verfahren bedarf keines Spaltes, aber eines beleuchtbaren Fadenkreuzes. Das auf unendlich eingestellte Fernrohr wird zur einen Prismenfläche erstens nach Nr. 4 *b* senkrecht gestellt und abgelesen. Zweitens stellt man vor derselben Fläche so ein, daß die Strahlen vom Fadenkreuz, welche ins Prisma gedrungen, an der zweiten Fläche reflektiert und durch die erste wieder ausgetreten sind, wieder ins Fadenkreuz fallen (man stellt auf das Spiegelbild des Fadenkreuzes in der hinteren

Prismenfläche ein). Die Drehungen können entweder mit dem Fernrohr oder mit dem Prisma geschehen. Beide Stellungen mögen den Winkel ε miteinander bilden. Dann ist

$$n = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varphi}.$$

Folgt aus der Figur zu *b*), indem $\varepsilon = \varphi + \delta$ ist. — Das Abbe'sche Spektrometer läßt die Einstellungen besonders bequem ausführen; es hat außerdem eine Vorrichtung, um die Dispersion (S. 261) selbständig zu bestimmen. Vgl. Abbe, Apparate zur Bestimmung des B.-V. Jena 1874.

d) Streifender Eintritt (F. K.). Die Methode ist instrumentell die einfachste; sie läßt sich auch mit einem beliebigen drehbaren Teilkreise und danebengestelltem Ablesefernrohr ausführen. Die Prismenfläche I werde von einem breiteren Lichtbündel streifend getroffen, etwa von einer Natronflamme beleuchtet, die man in die Fortsetzung der Fläche gestellt hat. Durch die Prismenfläche II sieht man das Licht dann scharf abgegrenzt; man stellt auf diese Grenze ein. Gesucht wird der Winkel α dieser Sehrichtung S mit der Normalen Z der Fläche II.



Mit beleuchtetem Fadenkreuz mißt man α direkt, indem man nach Nr. 4 *b* noch auf die Normale Z einstellt. Ist φ klein, so verläuft der Grenzstrahl S nach der anderen Seite von Z; dann soll α negativ gerechnet werden.

Ohne beleuchtbares Fadenkreuz beobachtet man zum zweiten durch Fläche I, wobei II streifend beleuchtet wird. Man dreht hierbei das Prisma mit dem Teilkreis vor dem Fernrohr oder das Fernrohr mit dem Kreis um das Prisma, bis wieder auf die Grenze zwischen hell und dunkel eingestellt ist. Dieser Drehungswinkel, um die Fläche III herum gezählt, heiße w, dann ist $\alpha = 90^0 - \frac{1}{2}(w - \varphi)$.

Es gilt $$n^2 = 1 + \left(\frac{\cos\varphi + \sin\alpha}{\sin\varphi}\right)^2.$$

Denn man hat (Fig.) $n = \sin\alpha/\sin\beta$ und von dem streifenden Eintritt an I noch $n = 1/\sin(\varphi - \beta)$. Die Elimination von β aus beiden Gleichungen gibt obigen Ausdruck.

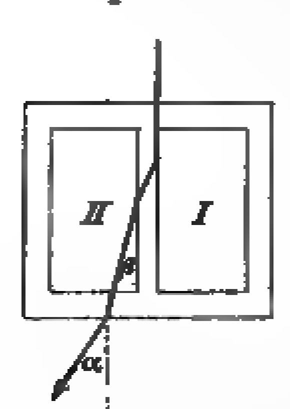
Vgl. F. K., Wied. Ann. 16, 606. 1882. Ein Refraktometer für stark brechende Flüssigkeiten mit streifender Inzidenz und veränderlichem brechenden Winkel s. Pulfrich, ZS f Instr. 1899, 335.

Die **Genauigkeit** der Prismenmethoden wächst im allgemeinen mit dem Prismenwinkel.

II*a* und *d* sind für Glasprismen bis zu 70—80° brauchbar; gebräuchlich ist ein Winkel von etwa 60°. II*b* und *c* können höchstens auf Prismenwinkel gegen 40°, für stark brechendes Glas nur bis etwa 35° angewandt werden.

Eine einfache Form des Spektrometers und Bemerkungen zu den Prismenmethoden bei Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1901, S. 10.

Bestimmung kleiner Unterschiede von B.-V. flüssiger Körper mit streifendem Eintritt im Doppeltrog (Hallwachs). Die beiden Flüssigkeiten, z. B. Lösungsmittel und Lösung, sind in einem rechteckigen Glastrog durch eine Scheidewand getrennt; durch die schwächer brechende fällt Licht streifend auf die Wand. Man bestimmt den Winkel α der austretenden Lichtgrenze mit der Normalen der Austrittsfläche. Dann ist $n_2 - n_1 = \sin^2\alpha/(n_1 + n_2)$, wo $n_1 + n_2$ nur genähert bekannt zu sein braucht.



Umdrehung der Richtung und Mittelnehmen eliminiert etwaige Keilgestalt der Platten. Kleine Unterschiede lassen sich bis in die sechste Dezimale bestimmen.

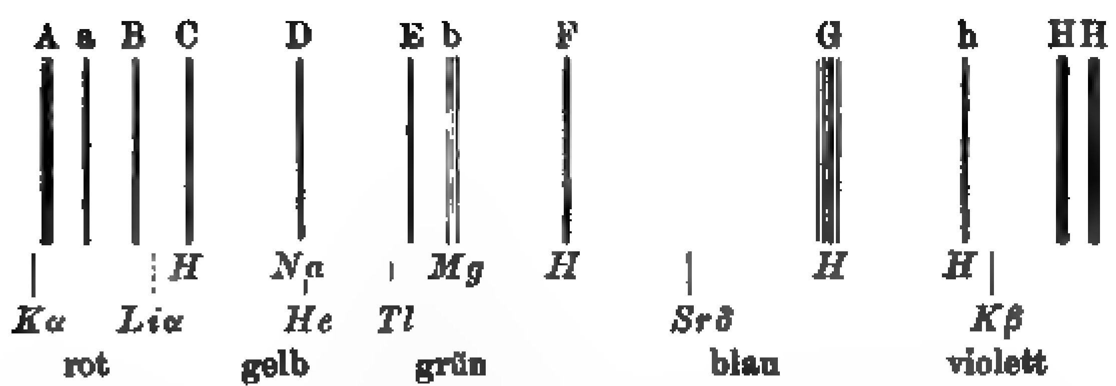
Beweis. Planparallele Schichten beeinflussen die schließliche Richtung nicht. Es ist $n_1/n_2 = \cos\beta$, also $\sin\beta = \sqrt{n_2^2 - n_1^2}/n_2 = \sqrt{(n_2 - n_1)(n_2 + n_1)}/n_2$. Dies setze man ein in $n_2 = \sin\alpha/\sin\beta$.

Näheres: Hallwachs, Wied. Ann. 60, 577. 1898.

Die Refraktometer von Abbe und Pulfrich s 68 III u. IV.

Dispersion. Wellenlänge oder Farbe.

Das B.-V. des Lichtes wächst mit abnehmender Wellenlänge oder zunehmender Schwingungszahl und muß sich deswegen auf **einfarbiges Licht von einer bestimmten Wellenlänge** beziehen. Im Sonnenlicht, welches man mit dem Heliostat horizontal auf den Spalt wirft, benutzt man die **Fraunhofer'schen Linien** (1814) Die Figur enthält die wichtigsten derselben im sichtbaren Teil des Spektrums nach ihrer ungefähren Lage im prismatischen Spektrum. Für das Gedächtnis merke man sich, daß A D F G H ungefähr gleichen Abstand von einander haben.



Wellenlängen und Schwingungszahlen s. S. 284 u. Tab. 28.

Um A und a zu sehen, stellt man den Spalt nicht zu eng und hält ein rotes Glas vor. D zeigt sich bei engem Spalte und starker Vergrößerung als eine feine Doppellinie.

Andere Lichtquellen s. in **59**.

Zur Sichtbarmachung ultravioletten Lichtes dient ein „fluoreszierendes Okular", welches am Ort des Fadenkreuzes eine fluoreszierende Platte aus Gelatine oder Uranglas trägt. Von Glas wird ultraviolettes Licht teilweise erheblich absorbiert (vgl. S. 250), so daß man auf Prismen usw. aus Quarz oder noch besser Flußspat angewiesen ist.

Der Unterschied der Brechungsverhältnisse für zwei bestimmte Farben (gewöhnlich für C und F Fraunhofer) wird **Dispersionsvermögen** genannt. Relative Dispersion heißt gewöhnlich das Verhältnis $(n_F - n_C):(n_D - 1)$.

Vgl. Tab. 22, 23 und 24.

Als Funktion der Wellenlänge λ (**65**) stellt man das B.-V. n dar durch die Reihe $n = A + B/\lambda^2 + C/\lambda^4 \cdots$ (Cauchy); oder durch $n^2 - 1 = \dfrac{A + B\lambda^2}{1 - C/\lambda^2}$ (Lommel-Wüllner); oder durch $n^2 = A + \dfrac{B}{\lambda^2 - P} - \dfrac{C}{\lambda^2 - Q}$ (Ketteler-Helmholtz).

Über mikrometrische Bestimmungen der Dispersion s. Pulfrich, ZS f. Instr. 1893, 267. — Spektrometer neuerer Form s. z. B. bei Lummer in Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl. Bd. II 1, S. 222, 231. 1897.

Anomale Dispersion. Christiansen; Kundt; 1870. In der Nachbarschaft eines intensiven Absorptionsstreifens (z. B. in Cyanin- oder Fuchsinlösungen) wird der gewöhnliche regelmäßige Gang von n mit λ unterbrochen. Von der roten Seite des Spektrums kommend wächst n mit abnehmender Wellenlänge vor dem Absorptionsgebiet unter Umständen sehr stark und setzt in dem Gebiet der wiederauftretenden Durchlässigkeit mit sehr kleinen Werten wieder ein, die dann aber mit weiter abnehmendem λ rasch wachsen.

61. Messung eines Flächenwinkels mit dem Wollaston'schen Reflexionsgoniometer.

Um die Flächenwinkel sehr kleiner Körper zu messen, bedarf es einer besonderen Orientiervorrichtung, die an manchen Spektrometern vorhanden ist. Manche Kristallflächen sind aber so unvollkommen, daß ihre Bilder besser mit bloßem Auge als mit dem Fernrohr beobachtet werden.

Die Drehaxe soll einer entfernten oberen Horizontalmarke O (Fenstersprosse, Dachfirst) parallel stehen; die zu messende Kristallkante sei der Axe bereits (s. unten) parallel gemacht. Man hält nun das Auge dicht vor den Kristall, dreht an der Axe, bis das in einer Kristallfläche gesehene Bild der genannten Marke O mit einer direkt gesehenen tiefer gelegenen ebenfalls horizontalen Marke U (Rand des Fußbodens; Spiegelbild der oberen Marke in einem hinter dem Goniometer befestigten Spiegel) zusammenfällt, und liest die Kreisteilung ab. Dann dreht man den Kreis mit dem Kristall, bis das Spiegelbild von O in der anderen Kristallfläche mit U zusammenfällt, und liest wieder ab. Der Winkel, um den man gedreht hat, ergänzt den gesuchten Winkel der beiden Flächen zu 180°.

Eine etwaige zweite, konzentrische Drehaxe ist zur „Repetition" der Winkelmessung bestimmt.

Einstellung der Kante parallel der Axe. Zur systematischen Orientierung dient ein nach drei Richtungen drehbarer Halter. A ist die Axe des Kreises, a, b, c sind die Orientierungsaxen, k der mit etwas Wachs befestigte Kristall.

1. Man stelle durch Drehung um c die Vorrichtung so, daß b die Fortsetzung von A bildet, d. h. beim Drehen von A ruhig läuft. Nun wird durch Drehen um a die Kristallfläche I zu A, also auch zu b parallel gestellt. Vgl. darüber unten.

2. Man verdrehe c um etwa 60 bis 90°, so wird sich im allgemeinen die Stellung von Fläche I geändert haben. Durch Drehung um b stellt man I wieder parallel zu A, so daß I jetzt parallel zu A und zu b, also senkrecht auf c steht. Drehen um c ändert also die Lage von Fläche I nicht mehr.

3. Durch Drehung um c stellt man die Fläche II parallel zu A.

Bei jeder folgenden Einstellung einer Axe dürfen die vorher orientierten nicht mehr gedreht werden!

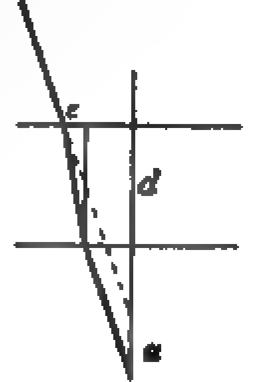
Den Parallelismus einer Fläche mit der Axe A erkennt man mittels zweier in der Ebene des Teilkreises liegender entfernter, zur Drehaxe senkrechter Marken (vertikale Fensterleiste und ein darunter gezogener Strich auf dem Fußboden; oder Schornstein, Blitzableiter usw. und sein Bild in dem festen Spiegel des Goniometers). Die Fläche ist der Axe parallel, sobald bei passender Drehung um A das Spiegelbild der oberen Marke in der Fläche mit der unteren Marke zusammenfällt.

Feinere Meßapparate von Fueß s. z. B. Liebisch, physik. Kristallogr. S. 379 Leipz. 1891; auch Czapski, ZS f. Instr. 1893, 1 u. 242; Klein, Berl. Sitzber. 1900, 248.

62. Lichtbrechungsverhältnis einer Planplatte unter dem Mikroskop.

Die Platte habe die Dicke d und das gesuchte B.-V. n.

Durch die Platte gesehen erscheint ein Objekt um $a = d(n-1)/n$ näher. Denn wenn man in den beiden, in Wirklichkeit sehr spitzen, rechtwinkligen Dreiecken, welche e als kleine Kathete haben (Fig.), die Hypotenusen den größeren Katheten d bez. $d-a$ merklich gleich annimmt, so stellt $e/(d-a)$ bez. e/d den Sinus des Einfalls- bez. Brechungswinkels des Strahles vor. Also hat man $n = d/(d-a)$, oder $a = d(n-1)/n$.



1. Ein Mikroskop sei auf ein Objekt scharf eingestellt. Bringt man zwischen das letztere und das Objektiv die Planplatte, so wird man den Abstand um eine Strecke a vergrößern müssen, um wieder deutlich zu sehen. Das B.-V. der Platte ist dann

$$n = d/(d-a).$$

2. Auf der Vorder- und der Hinterseite der Platte befinde sich je ein gut sichtbarer Punkt. Um von dem einen auf den anderen einzustellen, sei eine Verschiebung um die Strecke h notwendig. Dann ist, wie man aus obigem leicht ableitet,

$$n = d/h.$$

3. Auf der Vorderfläche der Planplatte wird ein gut sichtbarer Punkt mit weißer Farbe angebracht. Man stellt das Mikroskop auf diesen ein. Um sodann das von der Rückseite der Platte zurückgeworfene Spiegelbild des Punktes zu sehen,

wird man den Abstand zwischen Mikroskop und Platte um eine Strecke h verkleinern müssen. Das B.-V. der Platte ist

$$n = 2d/h.$$

Bei dem 3. Verfahren beleuchtet man mit auffallendem Licht und verdunkelt den Hintergrund oder noch besser, man versilbert die Platte auf der Rückseite (8, 6).

Um die Größe der notwendigen Verschiebungsstrecken des Mikroskopes genau zu bestimmen, kann die Schraubenverstellung des Mikroskopes dienen, wenn die Höhe des Schraubenganges (21, 2 u. 3) bekannt ist und wenn der Schraubenkopf eine Kreisteilung besitzt.

Die genaue Einstellung wird am besten mit einem Fadenkreuz im Okulare danach beurteilt, daß dieses keine Parallaxe gegen das Bild zeigt. Am geeignetsten ist ein Objektiv von kurzer Brennweite und nicht zu großem Durchmesser. Dann kann bei dickeren guten Platten die dritte Dezimale des B.-V. noch brauchbar werden.

Über die Bestimmung des B.-V. einer Flüssigkeit aus dem Axenwinkel eines Kristalles s. 70 am Schluß.

63. Lichtbrechungsverhältnis aus dem Winkel der totalen Reflexion (Wollaston 1802).

Der größte Brechungswinkel Φ, mit dem ein Strahl aus einem Mittel in ein stärker brechendes zweites eintreten kann, entspricht streifendem Eintritt, d. h es gilt für ihn die Bedingung sin 90°/sin Φ, oder 1/sin Φ ist gleich dem B.-V. aus dem ersten in das zweite Mittel, d. h. gleich N/n, wenn n und N die B.-V. beider Mittel gegen Luft sind Dieselbe Beziehung gilt, wenn ein in dem Mittel N verlaufender Strahl das Mittel n trifft, für den Grenzwinkel Φ der totalen Reflexion. Für ein beobachtetes Φ gilt also

$$\frac{n}{N} = \sin \Phi,$$

woraus, wenn das B.-V. von einem der Mittel bekannt ist, dasjenige des anderen berechnet werden kann.

Diese Bestimmungsweise erfordert im allgemeinen einfachere Hilfsmittel, als die von 60, und besitzt den Vorzug, auf unvollkommen durchsichtige Körper anwendbar zu sein.

Eine genaue Bestimmung muß auch hier sich auf Licht von einer bestimmten Farbe beziehen (S. 260).

I. Mit dem Prisma (F. K.).

1. Brechungsverhältnis des Prismas. Man beleuchtet die eine Fläche I eines Prismas, während das Spektrometer-

fernrohr auf die Fläche II gerichtet ist, von innen, d. h. durch die dritte Fläche hindurch, mit diffusem homogenen Licht (59). Die Grenze der totalen Reflexion an I erscheint als eine scharfe Grenzlinie zwischen hell und weniger hell. Auf diese Linie wird eingestellt. Die Richtung des Fernrohrs ist dieselbe wie die Richtung S der Figur S. 259 d, und genau so wie dort, auch nach derselben Formel, erhält man das B.-V. des Prismas.

2. Brechungsverhältnis eines anderen Körpers. Man klebt diesen Körper mit einer stark brechenden Flüssigkeitsschicht (Cassia-Öl, Arsenbromür) auf die Prismenfläche I und verfährt nun wie oben. Falsches Licht wird durch Schwärzen der störenden Flächen abgeblendet. Sowohl das Prisma wie die Flüssigkeit müssen stärker brechen als der Körper.

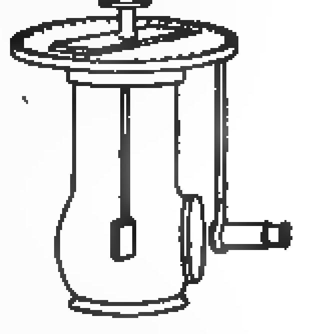
Ist N das B.-V. des Prismas, φ der Prismenwinkel, α der Winkel der Sehrichtung nach der Grenze der totalen Reflexion mit der Normalen auf der anvisierten Prismenfläche (Fig. S. 259 d), so wird das B.-V. des angeklebten Körpers

$$n = \sin\varphi\sqrt{N^2 - \sin^2\alpha} - \cos\varphi\sin\alpha.$$

Denn es ist $N = n/\sin(\varphi - \beta) = \sin\alpha/\sin\beta$, woraus der Ausdruck folgt. Vgl. F K., Wied. Ann 16, 607 1882. — Drehapparate für angedrückte Kristalle von Fueß-Liebisch s. ZS f. Instr. 1884, 185; 1885, 13.

II. Totalreflektometer (F. K.).

Unten an der Drehaxe wird, nach Entfernung des Fläschchens, der Körper mit Kork usw. so befestigt, daß seine spiegelnde Fläche zentral und der Axe parallel ist. Ersteres wird mittels einer Schneide, letzteres an einem der Axe parallelen Spiegel (beides hier nicht gezeichnet) erkannt, in dem das Auge in gleicher Höhe erscheinen muß, wie in der zu orientierenden Fläche. Rückseite und Umgebung des Körpers seien mit Tusche geschwärzt.



Das kleine Fernrohr soll auf unendlich eingestellt und der Kreisebene parallel sein. (Um dies zu prüfen oder zu bewirken kann man das Instrument in seinem Stativ um 90° umlegen.) Die richtige Stellung des Fernrohrs wird daran erkannt, daß ein damit anvisierter entfernter Punkt in der Kreisebene liegt. Ohne Umlegen orientiert man (Dorn) mit zwei Papierstreifen von einer Länge gleich dem Abstande der Fernrohraxe von der Teilung, vertikal so an zwei Fenster geklebt, daß die Oberkanten in der Kreisebene liegen. Das Spiegelbild der einen Unterkante in der schräg gestellten Fläche muß dem dicht herangehaltenen Auge in der Höhe der anderen Unterkante erscheinen. Im richtig stehenden Fernrohr müssen dann die Spiegelbilder in der Visierhöhe

auftreten. — Je kleiner oder unvollkommener die spiegelnde Fläche, desto genauer muß zentriert werden.

Nun stülpt man das mit einer stärker als der Körper brechenden Flüssigkeit (Schwefelkohlenstoff 1,63, α-Monobromnaphthalin 1,66, Methylenjodid 1,74) gefüllte Fläschchen von unten über den Körper, umgibt das Fläschchen mit gut durchscheinendem, nötigenfalls mit Petroleum bepinseltem Seidenpapier und beleuchtet auf einer Seite mit der Sodaflamme. Bei passender, durch Probieren zu findender Stellung der spiegelnden Fläche und der Lampe wird dann das auf große Entfernung akkommodierte Auge oder Fernrohr das Gesichtsfeld der Fläche in eine helle und in eine weniger helle Hälfte geteilt sehen, auf deren Grenzlinie man einstellt.

Unvollkommen plane Flächen, z. B. natürliche Kristallflächen, beobachtet man am besten ohne vergrößerndes Fernrohr. Geeignet ist das Diopter mit halber Linse, durch welche der Faden deutlich gesehen wird, während die andere Hälfte der Pupille an der Linse vorbei ein nicht vergrößertes Gesichtsfeld hat. Oder man gebraucht das Fernrohr umgekehrt.

Durch Drehen der Alhidade stellt man auf die Grenzlinie ein und liest den Teilkreis ab. Dann dreht man Fläche und Lampe nach der anderen Seite und stellt wieder ein. Der halbe Winkel zwischen beiden Stellungen ist der Grenzwinkel Φ der totalen Reflexion zwischen der Flüssigkeit und dem Körper, also $n = N \sin \Phi$, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit bedeutet.

Das B.-V. des reinen Schwefelkohlenstoffs beträgt für Natriumlicht bei 20° 1,6277 und nimmt auf +1° um 0,00080 ab. Die Temperatur muß also sorgfältig beobachtet werden. Ein Schirm, welcher zugleich den Hintergrund dunkel erhält, mit einer durch eine starke Glasplatte bedeckten Öffnung vor der Flamme vermindert die Erwärmung.

Kristalle. Doppelbrechende Objekte geben im allgemeinen zwei Brechungsverhältnisse, also zwei Grenzen; an deren innerem sowie äußerem Paar führt man die beschriebene Messung aus. Ein einaxiger Kristall wird am bequemsten in einer zur Hauptaxe senkrechten Fläche (siehe 70) untersucht. Der horizontal polarisierte (d. h. im Nicol'schen Prisma bei vertikaler Stellung der größeren Diagonale verschwindende) Strahl ist der ordentliche, der andere der außerordentliche.

Ist die Kristallfläche der optischen Axe parallel, so bekommt man beide Hauptbrechungsverhältnisse, wenn die optische Axe der Drehaxe parallel liegt. Horizontal polarisiert ist der außerordentliche Strahl.

Eine beliebig gelegene Kristallfläche liefert stets den ordentlichen Strahl; sie enthält aber auch eine zur optischen Axe senkrechte Richtung (Halbierungslinie des seitlichen Winkels in der Spaltfläche eines Rhomboeders; Grundlinie des Dreiecks in der Quarzpyramidenfläche). Diese Richtung horizontal gestellt liefert die beiden Hauptbrechungsverhältnisse.

Ein optisch zweiaxiger Kristall mit einem Schliff parallel einem Hauptschnitt (70) gibt zwei Hauptbrechungsverhältnisse, wenn eine optische Elastizitätsaxe horizontal gestellt ist. Drehung der reflektierenden Fläche in sich um 90° liefert das dritte Haupt-B.-V. und eins der obigen noch einmal.

Flüssigkeiten. *a*) Brechungsverhältnis N der Flüssigkeit im Fläschchen. Um dieses mit dem Totalreflektometer selbst zu messen, nimmt man eine kleine Planplatte von bekanntem B.-V. n (z. B. Bergkristall mit $n = 1{,}5442$ und $1{,}5533$ für Na) oder eine Luftschicht hinter einer Planplatte. Man hat

$$N = \frac{n}{\sin \Phi} \quad \text{oder bei Luft} \quad N = \frac{1}{\sin \Phi}.$$

b) Ein Flüssigkeitstropfen hinter einer Planplatte kann ebenso untersucht werden wie ein fester Körper.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 4, 1. 1878; über Kristallmessung W. Kohlrausch, ib. 6, 86. 1879; besondere Einrichtungen zu diesem Zweck auch Klein, Neu. Jahrb. f. Mineral. 1879; Klein, Kristallpolymeter, Berl. Sitzber. 1900, 248. — Über die Anwendbarkeit des Totalreflektometers auf weißes Licht mit Hilfe eines quer gestellten Spektroskops vgl. Pulfrich, Wied. Ann. 30, 487. 1887. — Über die Anwendung einer gläsernen Halbkugel anstatt der Flüssigkeit (Kristallrefraktometer nach Abbe), wodurch Grenzkurven bequemer sichtbar werden, s. Czapski, ZS f. Instr. 1890, 246 u. 269 und Pulfrich, ib. 1899, 8; Leiss, ib. 1902, 331. — Über objektive Darstellung und Photographie der Kurven und ein kombiniertes Totalreflektometer und Goniometer s. Leiss, ib. 1899, 220; ZS f. Krist. u. Miner. 30, 357. 1898.

III. Refraktometer von Abbe.

Besonders für Flüssigkeiten bestimmt. Fig. f. S. Es genügt ein Tropfen, den man zwischen die Trennungsflächen des Doppelprismas P aus stark brechendem (leicht verletzlichem!) Glase bringt. Man legt hierzu das Instrument um, schiebt das eine Prisma vorsichtig ab, und nach Aufbringen der Flüssigkeit wieder auf. Das Instrument benutzt den dem Grenzwinkel totaler Reflexion gleichen Grenzwinkel des Eindringens. Strahlen, die der Beleuchtungsspiegel S in die Flüssigkeit wirft, dringen in das obere Prisma nur innerhalb dieses Winkels ein, so daß man bei

K T P S

richtiger Neigung der Prismen in dem auf Parallelstrahlen eingestellten Fernrohr das Gesichtsfeld in homogenem Licht scharf abgegrenzt sieht.

Man macht mittels des Okularauszuges das Fadenkreuz deutlich sichtbar. Bei Anwendung von Natriumlicht hat man alsdann das Prisma mit dem Zeiger nur so zu drehen, daß die Lichtgrenze auf das Fadenkreuz fällt, dann gibt die Teilung auf dem Kreisbogen K direkt das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit für Natriumlicht an.

Unter Anwendung gewöhnlichen weißen Lichtes erhält man folgendermaßen zugleich die Dispersion der Flüssigkeit. Das Gesichtsfeld ist jetzt im allgemeinen gefärbt. Man stellt den Kompensator, d. h. die Trommelteilung T (mit welcher zwei geradsichtige Prismen sich entgegengesetzt drehen) so, daß die Färbung einer scharfen Grenze Platz macht. Nun bringt man die Grenze auf das Fadenkreuz und liest Alhidade und Trommelteilung ab. Dann sucht man eine zweite Stellung der Trommel mit scharfer Grenze, stellt wieder ein und liest ab.

Das Mittel der beiden Alhidadenstellungen gibt das Brechungsverhältnis für Natriumlicht; die Dispersion wird nach einer jedem Instrument beigegebenen Tabelle berechnet.

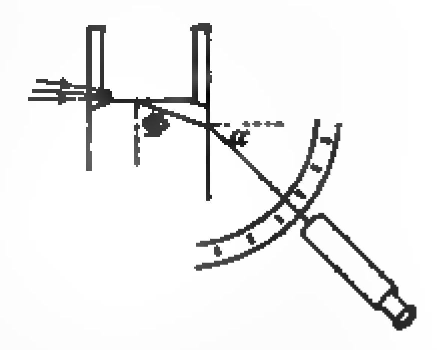
Ein fester Körper wird mit einem Tropfen einer stark brechenden Flüssigkeit (Cassiaöl, Arsenbromür) unter das obere der beiden Prismen geklebt. Durchsichtige Körper werden mittels des Beleuchtungsspiegels durch Tageslicht oder Lampenlicht durchfallend beleuchtet. Andere erleuchtet man auffallend von der Seite. Einiges Probieren wird die Grenze deutlich sichtbar liefern.

Als Probe für die Richtigkeit, event. für die Korrektion der Teilungen dienen bekannte Flüssigkeiten (Tab. 24), insbesondere das Wasser, oder eine bekannte Glas- oder Bergkristallplatte (vor. S.). Die Alhidade muß mit den Prismen sehr fest verbunden sein. Eine Unsicherheit liegt für manche Flüssigkeiten in der Temperatur.

Vgl. Abbe, Apparate z. Best. des Brechungsvermögens, Jena 1874, und Sitzber. d. Jen. Ges. f. Med. u. Nat. 1879, Febr. 21.

IV. Refraktometer von Pulfrich.

Das Instrument benutzt nicht totale Reflexion, sondern den umgedrehten Vorgang, nämlich streifenden Eintritt, der aber auf dasselbe hinausführt. Die Flüssigkeit wird auf die Oberfläche eines Glaswürfels gebracht, über welchen zu diesem Zweck ein Glascylinder gekittet ist. In $^3/_4$ bis 1 m Entfernung, ein wenig höher als die obere Glasfläche, stellt man eine Natriumflamme auf und vereinigt ihre Strahlen mit einer Sammellinse auf dem unteren Rand des Cylinders. Auf die Grenze zwischen hell und dunkel richtet man von unten das vertikal drehbare, auf unendlich eingestellte Fernrohr, dessen Teilkreis den Grenzwinkel α des Austritts mit der Normalen auf der Austritts-Glasfläche gibt.



Zur Kontrolle des Nullpunkts der Kreisteilung läßt man das mittels eines schräg angeklebten Glasplättchens beleuchtete (60, 4) Fadenkreuz an der horizontalen Fläche von oben auf sich zurückspiegeln: Die Einstellung soll 270° betragen.

Hat das Glas das B.-V. N, so hat die Flüssigkeit

$$n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}.$$

Es ist $N/n = 1/\sin\Phi$, andrerseits $N = \sin\alpha/\sin(90 - \Phi) = \sin\alpha/\cos\Phi = \sin\alpha/\sqrt{1 - n^2/N^2}$, also $N^2 - n^2 = \sin^2\alpha$ und $n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}$.

Es muß $n < N$ sein. Würfel mit $N = 1{,}615$ bez. 1,78 sind gebräuchlich. Eine Tabelle für n wird beigegeben. Die richtige Orientierung der Teilung kann mit Wasser $n_{15°} = 1{,}3337$, $n_{20°} = 1{,}3333$ geprüft werden.

Mit einer Heizvorrichtung kann in höherer Temperatur beobachtet werden. Eine Tabelle korrigiert die gleichzeitige Änderung der Brechung im Glase.

Mittels einer Trennungsfläche aus schwarzem Glase können mehrere Flüssigkeiten gleichzeitig, also bei derselben Temperatur beobachtet werden.

Feste ebene Körper lassen sich durch Vermittelung eines stärker brechenden Flüssigkeitstropfens auf die Glasfläche bringen und ebenso untersuchen. Gepulverte feste Körper können untersucht werden, indem man sie auf der Glasfläche mit einem Flüssigkeitsgemisch (Alkohol, Äther, Aceton, Benzol, Toluol, Bromnaphthalin) übergießt, welches man durch Ausprobieren abändert, bis die dem festen Körper entsprechende Lichtgrenze scharf erscheint (Le Blanc).

Pulfrich, ZS f. Instr.: die einfache Form (Wolz in Bonn) 1888, 47; die vollkommenere (Zeiß, Jena) 1895, 389. Auch Pulfrich, das Totalreflektometer usw. Leipz. 1890. Le Blanc, ZS f phys Ch. 10, 433. 1892. Eine elektrische Heizvorrichtung bei Mabery u. Shepherd, Proc. Amer. Acad. 38, 283. 1902. Vgl. auch Traube, Physikalisch chemische Methoden S. 164.

V. Mit dem Spektrometer.

a) Durch eine sehr dünne größere planparallele Platte in einem Flüssigkeitstrog mit zwei parallelen ebenen Wänden fällt paralleles homogenes Licht vom Spalt (60), den man mit dem Fernrohr durch die Platte anvisiert. Die Flüssigkeit breche stärker als die Platte; die beiden schrägen Stellungen der Platte, in denen das Spaltbild plötzlich verschwindet, liegen um $2\,\Phi$ auseinander. — Das B.-V. der Flüssigkeit selbst wird ebenso mittels einer dünnen Luftschicht in einem Glaskästchen mit planparallelen Wänden gefunden. Für die Rechnung gelten die Formeln aus II.

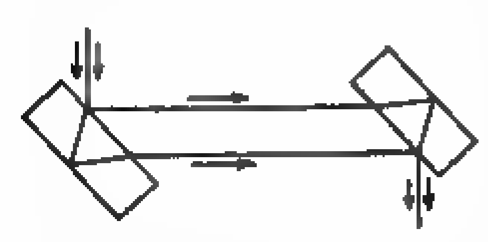
Bringt man zwischen den Trog und das Fernrohr ein geradsichtiges Prisma und beleuchtet mit Sonnenlicht, so erscheint ein Fraunhofer'sches Spektrum (S. 261). Durch Drehung der Objektplatte kann man die Grenze der totalen Reflexion auf irgend eine Linie einstellen.

E. Wiedemann, Pogg. Ann. 158, 375. 1876; Terquem und Trannin, ib. 157, 302. 1876.

b) Das Verfahren II läßt sich mit dem Spektrometer (60) ausführen, wenn man einen Flüssigkeitstrog mit Planwand fest aufstellt, in dem die Objektplatte mit dem Teilkreise drehbar ist.

63a. Bestimmung kleiner Änderungen des Brechungsverhältnisses mit dem Interferenzrefraktor (Jamin 1856).

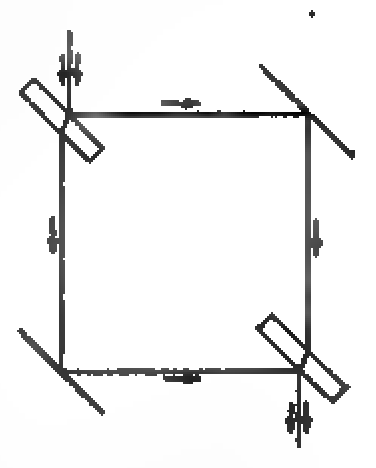
Zwei gleiche, dicke (z. B. 3 cm), planparallele, am besten rückseitig versilberte Glasplatten stehen sich parallel gegenüber, mit der Verbindungslinie ihrer Mitten einen Winkel von 45—50° bildend. Ein auf I fallender Lichtstrahl liefert durch Reflexion an der Vorder- und Hinterfläche zwei Strahlen. Durch Reflexion an II liefert jeder Strahl wieder zwei Strahlen, von denen die beiden gezeichneten mit einander austreten und, sobald die Platten etwas verdreht werden, ein System von Interferenzstreifen erzeugen (Brewster). Die übrigen Reflexe, z. B. der des oberen Strahles an der Außenfläche der zweiten Platte, seien durch Schirmchen vom Auge abgeblendet.



In den Weg der beiden Strahlen zwischen den Platten mögen zwei optisch gleiche Körper geschoben sein. Nimmt man nun an dem Wege des einen Strahles Änderungen vor, etwa bezüglich Temperatur, Druck, Konzentration, Füllung mit einem Gase usw., während man die Streifen im Auge behält, so wandern diese. Aus ihrer Verschiebung, der Länge der eingeschalteten Körper und der Wellenlänge des Lichtes läßt sich

die der Zustandsänderung entsprechende Änderung des Brechungsexponenten bestimmen (II).

Um den beiden Teilstrahlen einen, für die meisten Anwendungen bequemeren, größeren Abstand von einander zu geben, ist die Anordnung mit zwei Platten, die in derselben Ebene liegen, und mit zwei Hilfsspiegeln zweckmäßig (Mach, Zehnder). Auch hier sind die übrigen Reflexe, denen die abzublendenden Seitenbilder entsprechen, nicht gezeichnet.



Endlich kann der Zweck, Flächen zu bekommen, die einen Teil des Lichtes reflektieren und einen anderen Teil durchlassen, auch durch ganz dünne Luftschichten zwischen Prismen erreicht werden; dadurch, daß dann die Abblendung von Seitenbildern fortfällt, wird ein größeres Gesichtsfeld erzielt (Mach).

Der Gebrauch zu den Messungen unterscheidet sich bei den verschiedenen Anordnungen nicht wesentlich.

Vgl. Zehnder, ZS f. Instr. 1891, 275; Mach, ib. 1892, 89. Eine zusammenfassende Beschreibung von Lummer in der ZS Der Mechaniker 1900, S. 25 ff. — Abbildungen und Beschreibungen auch in dem Katalog der Zeiß'schen Werkstätte in Jena.

Temperaturmessung. Wenn in einem Mittel die Änderung der Wellenlänge durch die Temperatur bekannt ist, so kann der Int.-R. als Thermometer dienen. In den Grenzen, innerhalb deren in einem Gase, gegen das Vakuum gemessen, $n-1$ der Dichtigkeit proportional ist, gilt zwischen der Wellenlänge A im Vakuum und λ im Gase von der abs. Temperatur T, wenn bei 0° C. und gleichem Druck das B.-V. $= n_0$ ist, die Beziehung $A = \lambda[1 + (n_0 - 1)273/T] =$ Const. Auf einer Strecke, die im Vakuum S Wellenlängen enthält, liegt dann bei T eine um $s = S(n_0 - 1)273/T$ größere Anzahl. Die Änderung von s mit der Temperatur kann man messen und T läßt sich daraus berechnen.

Die beiden Strahlenbündel des Interferenzrefraktors gehen durch zwei parallele gleich lange Röhren, die dasselbe Gas enthalten. Die eine, welche auf die zu messende Temperatur erhitzt wird, bleibt auf Atmosphärendruck. In der anderen, auf gemessener Temperatur erhaltenen vermindert man den Gasdruck so weit, daß keine Verschiebung der Streifen auftritt, und mißt die hierzu nötige Druckänderung manometrisch. Die absoluten Temperaturen der Röhren verhalten sich dann wie ihre beiderseitigen Drucke. D. Berthelot, Ann. chim phys. (7) 26, 58. 1902. Siehe daselbst auch die Elimination der Übergangstemperaturen an den Enden des erhitzten Rohres.

I. Aufstellung des Apparates.

Die beiden Platten sind gegenseitig sehr fest aufgestellt, entweder gemeinsam auf schwerem Stativ montiert (z. B. die Ausführung der Zeißschen Werkstätte), oder, um größeren Raum zu bieten, getrennt auf besonderen Pfeilern.

Wird eine Natriumflamme, am besten in schwarzem Cylinder mit Fenster, etwa 50 cm vor der ersten Platte aufgestellt, so erblickt man, ungefähr auf unendlich akkommodierend, durch die zweite Platte die Streifen sofort oder nach kleinen Drehungen der Platte um eine Vertikal- und eine Horizontalaxe. Man dreht, bis die Streifen scharf, parallel und gerade erscheinen; auf ihre Richtung kommt es häufig nicht an. Meist wird man jedoch die vertikale oder horizontale (cf. unten u. S. 273) Richtung vorziehen.

Zum Beobachten dient am besten ein festes Fernrohr mit einer spaltförmigen Blende vor dem Objektiv, die Spaltrichtung senkrecht zu den Streifen. Sollen Bruchteile der Streifenbreiten gemessen werden (es kann dazu auch ein Kompensator dienen, siehe am Schluß), so ist ein Okularmikrometer zweckmäßig. Zu viele Streifen im Gesichtsfeld veranlassen leicht Irrtümer beim Zählen; eventuell blende man einige ab.

Nach Einführung der Versuchsröhren usw. zwischen die Platten und eventuell Abblenden der beiden äußeren Bilder werden Streifenrichtung, Streifenabstand und Fernrohr endgiltig eingestellt.

Ist Beobachtung mit weißem Licht nötig (III), so bewirkt man zunächst mit Natriumlicht horizontale (s. oben) Streifen von beträchtlichem Abstand. Mit weißem Licht (durch Schließen des Luftzuges am Brenner) wird man dann durch sehr langsames Drehen der zweiten Platte um ihre Vertikalaxe farbige Streifen in das Gesichtsfeld bringen. Der in ihrer Mitte liegende farblose Streifen wird mitten ins Gesichtsfeld gebracht, worauf man das Fernrohr auf größte Deutlichkeit einstellt.

Unter Umständen wird eine Anordnung mit parallelem weißen Licht (Sonne) vorzuziehen sein (Quincke, Pogg. Ann. 132, 50. 1867). Die unvermeidlichen Erwärmungen des Apparates und die Temperaturschwankungen des Beobachtungsraums bewirken aber leicht ein störendes Wandern der Streifen.

Ein Trog mit Alaunlösung vor der Lichtquelle und Abkürzung der Beleuchtungszeit ist auch bei schwachen Lichtquellen anzuraten.

II. Messung bei stetiger Zustandsänderung.

Läßt sich die Änderung eines Körpers so kontinuierlich und überall gleichmäßig vornehmen, daß man dabei den Gang der Streifen verfolgen kann, wie z. B. bei Druckänderung in einer Flüssigkeit, der Verdünnung eines Gases u. dgl.: so zählt man einfach, um wieviele Streifenbreiten und Bruchteile derselben sich das mit homogenem Licht (Na) erzeugte Streifensystem im Fernrohre verschiebt. Ist dann

L die Länge der durchstrahlten Schicht,

λ die Wellenlänge des Lichtes nach Tab. 23,

s die Anzahl der durchgewanderten Streifenbreiten,

n_1 und n_0 der Brechungsexponent nach und vor der Änderung,

so ist
$$n_1 - n_0 = s\lambda/L.$$

Denn wenn $\lambda_0 = \lambda/n_0$ und $\lambda_1 = \lambda/n_1$ die Wellenlängen in dem ursprünglichen und dem abgeänderten Mittel, so ist offenbar

$$s = L/\lambda_1 - L/\lambda_0 = (n_1 - n_0) L/\lambda.$$

III. Messung bei unstetiger Zustandsänderung.

Die Verschiebung der Streifen kann nicht immer zählend verfolgt werden (z. B. beim Auflösen eines Salzes bez. Ersetzen einer Lösung durch eine andere). Dann schlägt man folgenden Weg ein.

Man nimmt weißes Licht. Die (horizontalen) farbigen Streifen liefern durch ihr verschiedenes Aussehen das Mittel, den im Natriumlicht nicht unterscheidbaren Streifen eine Numerierung von einer dem farblosen Streifen (I) benachbarten schwarzen Franse an zu geben. Die durch die Zustandsänderung eingetretene Verschiebung dieses Nullpunktes wird gefunden, indem man bei einfarbigem Licht die zweite Platte um ihre Vertikalaxe, die Streifenverschiebung abzählend, so weit dreht, bis wieder im weißen Licht der Nullpunktsstreifen einsteht. Dies gibt bis auf eine Korrektion die Anzahl der infolge der Änderung des Körpers gewanderten einfarbigen Streifen, aus welcher die Änderung des Brechungsexponenten wie unter II bestimmt wird.

Nur horizontale Streifen können im weißen Licht erscheinen. Der Gangunterschied φ zweier interferierender Strahlen im Refraktor ist nämlich (Verdet-Exner l. c. am Schluß) $\varphi = 2nd(\cos b - \cos b')$, wo d und n Dicke und Brechungsexponent der Platten, b und b' die Brechungswinkel der Strahlen in der ersten und zweiten Platte sind. Damit $\varphi = 0$, muß $b = b'$ sein, was nur bei vertikaler gegenseitiger Neigung der Platten eintritt.

Die erwähnte Korrektion besteht in der Abänderung der im vorigen beobachteten Streifenzahl um eine ganze Zahl; sie entspringt aus der Dispersion.

Die Messung findet, wie wir sahen, mittels Kompensation zweier sich entgegenwirkender Gangunterschiede statt, welche nicht für alle Farben gleichzeitig möglich ist, da die beiden entgegenwirkenden „Apparate" (Refraktor und eingeschalteter Körper) die Phasenunterschiede für verschiedene Farben nicht in demselben Verhältnis einführen. Einen farblosen Streif bekommt man für denjenigen aus dem Gegeneinanderwirken der beiden Apparate resultierenden Gangunterschied, der für alle Farben dieselbe Größe behält.

Führt z. B. der eine Apparat die Gangunterschiede für Rot und Blau im Verhältnis 7:9,8 ein, der andere im Verhältnis 7:10, so wird bei

Einführung von 7,5 bez. 10,5 Wellenlängen mit dem ersten und —7 bez. —10 mit dem zweiten Apparat der resultierende Gangunterschied für Rot und Blau = +0,5 sein. Für die übrigen Farben tritt dann im allgemeinen nahe derselbe Gangunterschied 0,5 auf, so daß wir einen diesem entsprechenden schwarzen Streif bekommen.

Jener der Achromasie entsprechende Gangunterschied ändert sich mit dem Wachsen des kompensierten Gangunterschiedes. Die farblose Linie wandert also gleichsam auf dem mit Na-Licht erhaltenen kompensierten Streifensystem und durchläuft dabei verschiedene Helligkeiten von Schwarz zu Weiß, die der Helligkeit ihres Ortes im monochromatischen System entsprechen. Fällt sie auf einen dunkelen Streifen, so ist das farbige Streifensystem um eine schwarze Linie symmetrisch gruppiert, und wenn sie auf die Mitte eines hellen Streifens fällt, um eine weiße Linie. Der Nullpunkt unserer Streifennumerierung wandert also langsam auf dem System fort.

Vgl. Sirks, Pogg. Ann. 140, 621; 141, 393. 1870. Die Beobachtung dieser Wanderung liefert auch die Dispersionsänderung; s. Hallwachs, Wied. Ann. 47, 396. 1892.

Um die Korrektion zu ermitteln, wird bei einem Hilfsversuch der zu untersuchende Körper in genügend kleinen Intervallen abgeändert, bis die achromatische Linie schwarz erscheint. Dann ändert man weiter ab, bis die farblose Linie das nächste Mal wieder schwarz erscheint. Daraus ergibt sich die Größe der Zustandsänderung, bez. der entsprechenden Streifenverschiebung, für welche sich die farblose Linie um eine Streifenbreite in zu beobachtender Richtung verschiebt. Man kann dann, sobald bei einem Versuch die ganze Streifenverschiebung ermittelt ist, immer sagen, welche Nummer einer der dunkelen Nachbarstreifen der achromatischen Linie ursprünglich hatte, d. h. wie weit er vom einmal gewählten Nullpunkt absteht.

Bei einer Lösung ist die einer bestimmten Konzentrationsänderung entsprechende Wanderung der farblosen Linie von der vorausgehenden Konzentration ziemlich unabhängig.

Je nachdem sich der Nullpunkt im Sinne der Streifenwanderung oder entgegengesetzt verschiebt, ist die Nummeränderung des zur Einstellung gewählten dunkelen Nachbarstreifs der achromatischen Linie von der gesamten Streifenverschiebung abzuziehen oder zu ihr zu addieren.

Da die Bruchteile direkt mikrometrisch gemessen werden, so dienen die Beobachtungen mit den Streifen im weißen Licht nur zur Ermittelung der ganzen Anzahl Verschiebungen; die Korrektion beträgt also eine ganze Anzahl Wellenlängen.

Vgl. Siertsema, De Jamin'sche Interferentialrefractor, Proefschrift, Groningen 1890; Hallwachs l. c.

Jamin'scher Plattenkompensator. Unter einem Kompensator versteht man in der Optik eine Vorrichtung, durch welche ein Gangunterschied zweier Strahlen geändert, z. B. aufgehoben werden kann. Der Jamin'sche K. besteht aus zwei neben einander verbundenen gleich dicken, schwach gegen einander geneigten Glasplatten, die mit einander um eine ihrer Schnittlinie parallele Axe gedreht werden können. Er läßt sich, in den Strahlengang des Interferenzrefraktors eingeschoben, zur Kompensierung der Gangunterschiede statt der Drehung der zweiten Platte oft vorteilhaft benutzen (s. Quincke l. c. S. 204). Für weißes Licht ist bei der empirischen Graduierung zu beachten, was oben über die Wanderung der farblosen Linie gesagt wurde.

Arago's Keilkompensator. Zwei längs einander gleitende gleiche Glaskeile gestatten, eine meßbar veränderliche Glasdicke herzustellen. Durch diese geht der eine der beiden Strahlen, durch eine der Summe beider Keile in deren mittlerer Stellung gleich dicke Glasplatte der andere. Durch Verschieben der Keile wird der Gangunterschied geändert. Der Kompensator kann in den I.-R. eingeschoben werden, erlaubt aber auch selbständig, Brechungsverhältnisse in Flüssigkeiten zu bestimmen. Vgl. Wallot, Ann. der Ph. 11, 355. 1903.

Über die allg. Theorie des Int.-Refraktors siehe noch: Verdet-Exner, Wellentheorie d. Lichtes I, 94. 1881; Ketteler, Farbenzerstreuung d. Gase S. 29. 1865; Zehnder, Wied. Ann. 34, 91. 1888; über die Anordnung eines I.-R. auch für Dispersion: Borgesius, Wied. Ann. 54, 221. 1895.

Über Vergleichung des B.-V. zweier Gase vor 2 Spalten mittels Beugungsfransen s. Lord Rayleigh, Proc. R. S. 59, 198; ZS f. phys. Ch. 19, 364. 1896; Ramsay u. Travers, Proc. R. S. 62, 225; 64, 183; 67, 329. 1897—1901.

63b. Untersuchung optischer Inhomogenität nach der Schlierenmethode (Toepler).

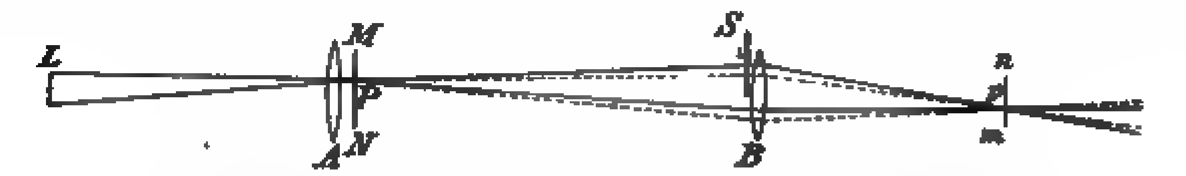
Man bringt vor eine breite Flamme oder in das konvergierende Strahlenbündel des durch eine Linse gegangenen Sonnenlichtes eine kleine, geradlinig begrenzte Öffnung, entwirft von ihr mittels einer guten Linse A in nicht zu kleiner Entfernung (über 1 m) ein scharfes reelles Bild und bringt dicht hinter diesem das Objektiv eines auf den Ort, wo die Schlieren gesucht werden, akkommodierten Fernrohrs an. Und zwar soll dieser Ort nicht weit von der Linse A entfernt sein.

Nun werde mit einer Schneide, die einer der Begrenzungskanten der zuerst genannten Öffnung parallel ist, durch allmäh-

liches Vorschieben der Ort des reellen Bildes vor dem Fernrohr verdeckt. In der geeigneten Stellung treten alsdann Ungleichheiten der Raumerfüllung, welche eine wenn auch nur kleine Änderung der Lichtbrechung bedingen, als erhellte oder verdunkelte Teile („Schlieren") des Gesichtsfeldes hervor. Um nichts zu übersehen, benutzt man nach einander verschieden gerichtete Kanten jener Öffnung.

Die Empfindlichkeit wächst mit dem Abstande. Für manche Zwecke sieht man die Schlieren auch mit dem bloßen, an den Ort des reellen Bildes gehaltenen Auge.

Das Wesen der Erscheinung besteht in folgendem. mn sei das durch Objektiv B im Fernrohr entworfene Bild der Fläche MN, die sich in der Nähe der von L aus erleuchteten Linse A befindet; in MN werden die Schlieren gesucht. Die Stelle P bildet sich in p ab. Durch Vorschieben des Schirmes S wird p allmählich dunkler und verschwindet, wenn das ganze von L auf p fallende Lichtbündel abgeblendet ist.



Befindet sich nun in P eine prismatisch begrenzte Stelle anderer Lichtbrechung als die Umgebung, so wird das Lichtbündel verschoben (sein Konvergenzpunkt p bleibt dabei an seinem Orte), und je nachdem der Schirm von der einen oder der anderen Seite vorgeschoben wird, verschwindet das Bild p später oder früher als die Umgebung: es tritt in der Nähe der Grenze bei p eine Erhellung oder Verdunkelung gegen die Umgebung auf Prismatische Wirkung aber wird ein abgegrenzter Raum anderer Brechbarkeit der Natur der Sache nach haben müssen.

Anordnung nach Abbe am Spektrometer. Der Spalt wird durch eine kleine kreisrunde Öffnung ersetzt, das Okular des Fernrohrs durch eine schwarze Kreisscheibe von solcher Größe, daß sie, an den Ort des vom Objektiv entworfenen reellen Bildes der Öffnung gebracht, dieses gerade eben verdeckt, was mit einer vorgehaltenen Lupe zu prüfen ist. Man entfernt nun die Lupe, bringt das zu prüfende Objekt zwischen die beiden Objektive und beobachtet es mit dem vor die Kreisscheibe gehaltenen, bloßen oder so bewaffneten Auge, daß man das Objekt deutlich sieht. Die Schlieren werden dann vermöge der durch sie über den Rand der Scheibe abgelenkten Strahlen als Erhellungen usw. sichtbar.

Auch in den mit dem Interferenzrefraktor (63a) erzeugten Streifen werden Schlieren eines durchstrahlten Mittels sichtbar.

Näheres, auch über die Anwendungen, bei Toepler, Pogg. Ann. 131, 33 u. 180. 1867; Über die Anordnung von Abbe s. Czapski, ZS f. Instr. 1885, 117. — Über Aufnahmen von Luftschlieren um Geschösse Mach, Wien. Sitz.-Ber. 92, 625. 1885; 95, 764. 1887; 89, 1310. 1889; 105, 605. 1896. Eine zusammenfassende Darstellung von Lummer in der ZS Der Mechaniker, 1900, S. 61.

64. Spektralanalyse (Bunsen und Kirchhoff 1860).

Licht wird analysiert mittels seiner Zerlegung in ein Spektrum: 1. durch Brechung im Prisma, 2. durch Beugung bei dem Durchgang oder bei der Reflexion am Gitter, 3. durch Interferenzen hoher Ordnung. Vgl. S. 251, 252.

Aus der Zusammensetzung des Lichtes kann auf seinen Ursprung geschlossen werden. Glühende feste und flüssige Körper geben ein zusammenhängendes Spektrum, Gase und Dämpfe liefern einzelne, wesentlich durch die chemische Natur der Körper bestimmte Farben.

Auch die Absorption des Lichtes in einem Körper läßt häufig auf dessen chemische Beschaffenheit schließen. Gase oder Dämpfe absorbieren dieselben einzelnen Farben, welche sie bei der gleichen Temperatur selbstleuchtend ausstrahlen.

Der Spektralapparat (Spektroskop) definiert eine Farbe geometrisch durch eine Skale, auf welcher ihre Bestandteile erscheinen.

Geradsichtige Spektroskope haben vor einem Spalt ein oder mehrere geradsichtige Prismensysteme und eine Linse oder ein Linsensystem, um den Spalt deutlich erscheinen zu lassen. Die Skale sitzt im Okular. Die brechende Kante der Prismen muß senkrecht zur Skale und parallel dem Spalte verlaufen.

Der gewöhnliche Spektralapparat (Fig.) hat, wie das Spektrometer, Fernrohr F und Spaltrohr S; außerdem ein Rohr R mit einer Mikrometerskale. Das Bild der Skale wird in der dem Fernrohre zugewandten Prismenfläche gespiegelt.

I. Einstellung des Spektralapparates.

Es ist die angegebene Reihenfolge der Operationen innezuhalten.

Der Spalt soll einem fernen Objekt entsprechen und deutlich erscheinen Wenn die richtige Auszugsstellung

des Spaltrohrs gegeben ist, so hat man nur das Fernrohr auf Deutlichkeit des Spaltbildes einzustellen; sonst stelle man erst das Fernrohr auf ein fernes Objekt ein, richte es dann auf den Spalt und verschiebe diesen so, daß er deutlich erscheint.

Das Prisma soll die Minimumstellung erhalten. Man beleuchtet den Spalt mit der Sodaflamme, stellt das Prisma in nahezu richtiger Stellung vor die Spaltlinse, orientiert sich mit bloßem Auge ungefähr über die Richtung des austretenden Strahles und sucht mit dem Fernrohr das Bild des Spaltes. Nun dreht man das Prisma (indem man wenn nötig mit dem Fernrohr folgt), bis das Spaltbild im Fernrohr umkehrt, und stellt in dieser Lage das Prisma fest.

Das reflektierte Bild der Skale soll deutlich erscheinen. Die Skale wird durch eine nicht zu nahe (20 cm) aufgestellte schmale, kleine Flamme erleuchtet. Nachdem durch Drehen des Skalenrohres das Skalenbild im Fernrohr gefunden ist, zieht man das Skalenrohr heraus, bis ihr deutliches Bild sich bei dem Bewegen des Auges vor dem Okulare nicht gegen das Spaltbild verschiebt.

Ein bestimmter Skalenteil, bei den den Zeichnungen von Bunsen und Kirchhoff angepaßten Skalen der Teil 50, soll mit der Natriumlinie zusammenfallen. Man dreht das Skalenrohr, bis diese Stellung erreicht ist, und stellt es fest.

II. Auswertung der Skale.

Um zu wissen, welchen Punkten der Skale die den einzelnen chemischen Elementen angehörenden Linien entsprechen, kann man die Spektra der Stoffe einzeln beobachten und die Skalenteile der Linien (nebst Angabe ihrer ungefähren Helligkeit, Breite, Farbe und ihrer Schärfe) notieren. Bequemer ist die Anwendung der nach Bunsen-Kirchhoff's Skale veröffentlichten Abbildungen oder der auf dieselbe Skale bezogenen Tab. 22, auf welche man den Apparat folgendermaßen reduziert.

Man beobachtet auf der Skale einige bekannte Linien an den Enden und in der Mitte des Spektrums (Sonne a, D, F, G, H; oder Kα, Liα, Na, (He), Srδ, Kβ; Fig. S. 261), trägt auf kariertes Papier die beobachteten Skalenteile als Abszissen, die entsprechenden der B.-K.'schen Skale als Ordinaten auf und ver-

bindet die entstandenen Punkte durch eine Kurve. Selten wird diese erheblich von einer Geraden abweichen. Aus der Zeichnung findet sich dann zu einem beliebigen beobachteten Skalenteil der entsprechende der B.-K.'schen Skale als Ordinate. — Wenn die Skale des Apparates der B.-K.'schen nahe kommt, was oft der Fall ist, so stellt man Na auf den Strich 50 ein und macht ebenfalls einen Satz von vergleichenden Beobachtungen. Dann zeichnet man eine Kurve für die Korrektionen, indem man die Unterschiede gegen die B.-K.'sche Skale als Ordinaten zu der Skale selbst als Abszisse graphisch aufträgt.

Mit Hilfe von Tab. 23 läßt sich auch eine Kurve zeichnen, welche die Skalenteile auf Wellenlängen reduziert.

Die Dämpfe erzeugt man mit einer Salzperle am Platindraht im Bunsenbrenner; die Öse des Drahtes soll geschlossen sein. Das Anschmelzen von Perlen ist meist leichter, wenn man das Erhitzen des Drahtes von hinten vorschreiten läßt. — Perlen aus seltenen Substanzen kann man durch elektrisches Glühen anschmelzen.

Man reinigt den Draht am wirksamsten dadurch, daß man ihn wiederholt in Salzsäure und reines Wasser taucht und dann jedesmal in der Spitze der Bunsenflamme oder vor dem Lötrohr oder in der Gebläseflamme ausglüht.

Vgl., auch über Spektrallampen, 59, S. 250.

Präparate. Reines Lithiumpräparat erhält man aus Li_2CO_3, welches man wegen seiner geringen Löslichkeit mit Wasser ausschütteln kann. KNO_3 ist sehr rein im Handel. Li_2SO_4 und K_2SO_4, rein käuflich oder durch Umkristallisieren unschwer zu reinigen, geben andauerndere Flammen als die Chloride oder Nitrate. Strontium- oder Bariumsalze reinigt meist das Glühen selbst. — NaCl und KCl werden, um das Zerknistern zu vermeiden, vor dem Spektralgebrauch erhitzt. Angenehmer als das leicht verknisternde oder rasch verdampfende Kochsalz ist geglühte Soda.

III. Analyse.

Die Körper werden aus dem Zusammenfallen ihrer Spektrallinien mit den Linien bekannter Stoffe erkannt (vgl. II). Dabei notiert man nicht nur die Lage, sondern auch die ungefähre Stärke, Breite und Schärfe der beobachteten Linien. Z. B. fallen Srβ und Liα der Lage nach zusammen; Srβ aber ist verwaschen, Liα ganz scharf. Graphisch kann man die Streifen übersichtlich darstellen, indem man überall die Lichtstärke an irgend einem Punkt der Skale als Ordinate über diesem Punkte aufaßt und so die Kurven für die Spektra zeichnet.

Bezüglich der Unterscheidung der alkalischen Erden beachte man vorzugsweise die (lichtschwachen) charakteristischen blauen Linien von Strontium und Calcium.

Immer wird die Perle in den Saum der Flamme gebracht, der glühende feste Teil so tief, daß er kein störendes kontinuierliches Spektrum gibt. Es ist anzuraten, daß man einmal mit engem Spalte beobachte, um dicht neben einander liegende Linien zu unterscheiden, und dann mit weiterem Spalte zur Auffindung lichtschwacher Linien; desgleichen einmal mit kleiner Gasflamme für die leicht flüchtigen Stoffe (K, Li), das andere Mal mit großer Flamme für schwer flüchtige (Sr, Ba, Ca). Die Spektra der letzteren treten oft erst nach längerer Zeit deutlich hervor. — Das Schwächerwerden eines Spektrums bei längerer Dauer des Versuchs hat häufig seinen Grund darin, daß flüchtigere Verbindungen durch das Glühen in die schwerer flüchtigen Oxyde verwandelt werden. Dann läßt sich die Lichtstärke momentan steigern durch Anfeuchten der Perle am Platindraht mit reiner Salzsäure. Verbindungen wie etwa die Sulfate der alkalischen Erden, die, an sich kaum flüchtig, durch Salzsäure nicht verwandelt werden, glüht man vor dem Befeuchten mit Salzsäure in dem unteren, reduzierenden Teil der Flamme.

Falsches Licht blendet man ab: durch einen schwarzen Schirm hinter der Gasflamme, durch eine Kapsel über dem Prisma, welche den Weg nach den drei Rohren frei läßt, endlich durch eine auf das Fernrohr gehängte Blende aus dunklem Papier, die zugleich das Schließen des anderen Auges überflüssig macht. Die Skale selbst wird nicht stärker beleuchtet, als zum Erkennen notwendig ist! Im Interesse sehr lichtschwacher Linien mag man die Skale vorübergehend abblenden.

Die Bunsen'sche Gasflamme selbst gibt eine Anzahl schwacher, besonders grüner und blauer Linien. Um Irrtümer zu vermeiden, mag man sie vorher beobachten und die stärksten notieren. Den unteren Teil der Flamme, wo sie besonders stark auftreten, benutze man überhaupt nicht zur Beobachtung. Die Natriumlinie sieht man in den meisten Präparaten. Auch die Luft enthält meist so viel Natrium, daß die Reaktion schon in der freien Flamme hervortritt; durch Wattefilter vor dem Brenner läßt sich dies vermindern. Vgl. z. B. Beckmann, ZS f. phys. Ch. 40. 465. 1902.

Ultraviolettes Spektrum. Über die Durchlässigkeit der Mittel vgl. S. 250. Siehe auch Reflexionsgitter. Man untersucht mit dem fluoreszierenden Okular (S. 261) oder durch Projektion auf einen fluoreszierenden Schirm oder durch Photographie.

Ultrarotes Spektrum. Die Beobachtung geschieht 1. durch Wärmewirkung, vgl. 72a; 2. durch Photographie mittels Leuchtfarbe (Draper, Lommel). Eine zuvor zu schwachem Leuchten gebrachte mit Balmain'scher Leuchtfarbe bestrichene ebene Platte wird der Strahlung ausgesetzt. Die Strahlen im sichtbaren Spektrum bis zu F und mehr noch ultrarote Strahlen löschen das Leuchten mehr oder weniger aus. Legt man die exponierte Platte nachher gut schließend auf eine photographische Negativplatte, so gibt sie daselbst ein negatives Bild, welches auf gewöhnlichem Wege positiv kopiert werden kann.

Vgl. Lommel, Wied. Ann. 40, 681 u. 687. 1890.

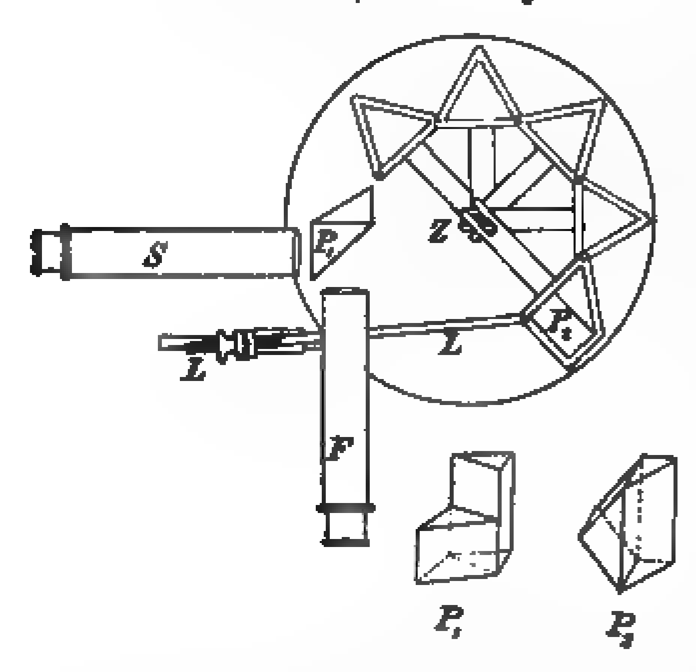
Absorptionsspektra. Von Bedeutung kann auch die Spektralanalyse weißen Lichtes sein, welches durch farbige Körper, insbesondere Lösungen, hindurchgegangen ist. Scharfe Linien treten hier selten auf. Über Photometrieren siehe 72 V.

Vergleichung zweier Spektra. Mit einem Reflexionsprisma, welches den halben Spalt bedeckt, kann man zwei Spektra über einander entwerfen. Die eine Lichtquelle wird in der Richtung des Spaltrohres aufgestellt, so daß ihr Licht die unbedeckte Hälfte durchsetzt, die andere stellt man schräg so, daß ihr Licht vom Prisma in den Spalt reflektiert wird. Auch kann man die Spektra abwechselnd erzeugen und die gegenseitige Lage der Linien mit einem Fadenmikrometer im Okular bestimmen. Sonnen- und Eisenspektrum, letzteres gewöhnlich als Funkenspektrum (S. 250), sind als Normale geeignet.

Genau untersucht von Kayser u. Runge, Abh. d. Berl. Akad. 1890; besonders von Rowland, Astronomy and Astrophysics 12, 321. 1893; Mem. Amer. Acad. XII, 101. 1896

Mehrere Prismen (Kirchhoff, Angström, Rutherford). Man dreht die Prismen, mit dem ersten anfangend, jedes in die Stellung der Minimalablenkung (S. 257) und achtet darauf, daß kein Licht vorbei geht. Das Fernrohr, welches gleichzeitig hier nur einen Teil des Spektrums umfaßt, muß gedreht werden. Trotzdem geben feststehende stark zerstreuende Prismengruppen auch so nicht das ganze Spektrum.

Neuere Spektroskope verbinden die Prismen mit dem Fernrohr durch einen Mechanismus, der für jeden Strahl die Minimalablenkung festhält und so das ganze Spektrum sichtbar macht, z. B. in der Weise der Figur. Das Fernrohr F blickt in die obere Hälfte, das Spaltrohr S in die untere Hälfte der Prismen. Das total reflektierende Prisma P_1 bedeckt die untere Hälfte des ersten 30°-Prismas Das durch die Prismen gegangene Licht wird in P_2 total reflektiert und passiert die Prismen rückwärts nach dem Fernrohr. Dieses steht fest; der durch Gelenke zusammengehaltene Prismenkreis wird mittels der Stange L und der Führung seiner Radien um den Zapfen Z auf die Krümmung gebracht, die der jeweiligen Brechbarkeit des Lichtes angemessen ist. Zu Messungen kann der Faden im Fernrohr in Verbindung mit der Trommelteilung dienen.



Das Entwerfen objektiver Spektra betr vgl. S. 251.

Stufen- und Plattenspektroskope s. S. 252.

Beugungsgitter. Ein durchsichtiges Gitter stellt man zwischen Spaltrohr und Fernrohr (65). — Auch Reflexionsgitter von hinreichender Dispersion lassen sich auf dem Tisch des Spektrometers gebrauchen; die schwache Krümmung eines Hohlgitters bedingt nur einen geänderten Auszug des Spalt- oder Fernrohrs. — Ein von der Hohlfläche selbst entworfenes objektives Spektrum (S 252) wird mit der Lupe beobachtet oder photographiert.

Photographie des Spektrums. Über empfindliche Platten für die verschiedenen Farben vgl. Vogel, die Photogr. farbiger Gegenstände, Berlin 1888. - Aufnahmen im äußersten Ultraviolett verlangen luftfreie Spektralapparate und Platten ohne Gelatine; Schumann, Wien Ber. 102, 415 u. 625. 1893; Beibl. 1894, 187. Über Photographieren mit dem Rowlandschen Gitter s. Kayser, Spektralanalyse in Winkelmann's Handbuch und Handbuch der Spektroskopie S. 603. — Ein Steinheil'sches Spektroskop zum Photographieren s. bei H. Lehmann, ZS f. Instr. 1902, 261.

65. Wellenlänge eines Lichtstrahles.

Die Wellenlängen derselben Lichtschwingung in verschiedenen Mitteln stehen mit den Fortpflanzungsgeschwindigkeiten in direktem, also mit den Brechungsindices der Mittel im umgekehrten Verhältnis.

I. Beugungsgitter (Fraunhofer).

Durch die Öffnungen eines engen Gitters geht Licht erstens geradlinig hindurch, zweitens entstehen auf beiden Seiten von der Mittelrichtung Helligkeitsmaxima „erster, zweiter usw. Ordnung", die bei einer sehr großen Zahl gleicher und gleichweit von einander abstehender Gitteröffnungen für homogenes Licht scharf begrenzt sind. Fällt das Licht senkrecht auf das Gitter, so bilden die Richtungen dieser Maxima mit der Mittelrichtung Winkel $\delta_1, \delta_2, \delta_3$ ..., welche, wenn l den Abstand benachbarter Öffnungen und λ die Wellenlänge bedeutet, durch die Beziehungen gegeben sind

$$\sin\delta_1 = \frac{\lambda}{l}, \quad \sin\delta_2 = \frac{2\lambda}{l}, \quad \sin\delta_3 = \frac{3\lambda}{l} \text{ usw.}$$

Denn in jeder von diesen Richtungen unterscheiden sich die Weglängen von den einzelnen Gitteröffnungen aus um ganze Vielfache einer Wellenlänge von einander. Die Lichterschütterungen, welche von den verschiedenen Öffnungen ausgehend einen entfernten Schirm (oder ein auf Parallelstrahlen eingestelltes Fernrohr) treffen, sind also in gleichem Schwingungszustande und summieren sich. Jede andere Richtung enthält gebeugtes Licht in unregelmäßigen Abständen von den Öffnungen und deswegen in den verschiedensten Schwingungszuständen, die sich bei der Vereinigung gegenseitig vernichten. — Zusammengesetztes Licht erzeugt also nach beiden Seiten des Gitters reine Spektra

Die Gitterplatte kommt auf den Tisch des Spektrometers (60), die Platte senkrecht zum Spaltrohr, die geteilte Fläche dem Fernrohr zugewandt, die Teilstriche der Drehaxe parallel. Letzteres wird daran erkannt, daß die Spaltbilder oder Spektra bei dem Anvisieren mit dem nach beiden Seiten gedrehten Fernrohr in konstanter Höhe erscheinen, was mittels einer Marke auf dem Spalt leicht kontrolliert wird. Fernrohr und Spaltrohr sind zuvor auf unendlich eingestellt (60, 2). Unter Anwendung homogenen Lichtes wird dann außer dem mittleren hellen Bild des Spaltes ein erstes, zweites usw. abgelenktes Bild auf jeder Seite beobachtet. Bedeuten $\delta_1 \delta_2 \delta_3$ ... die Ablenkungswinkel der Bilder gegen das mittelste Bild, so ist die Wellenlänge der Lichtsorte

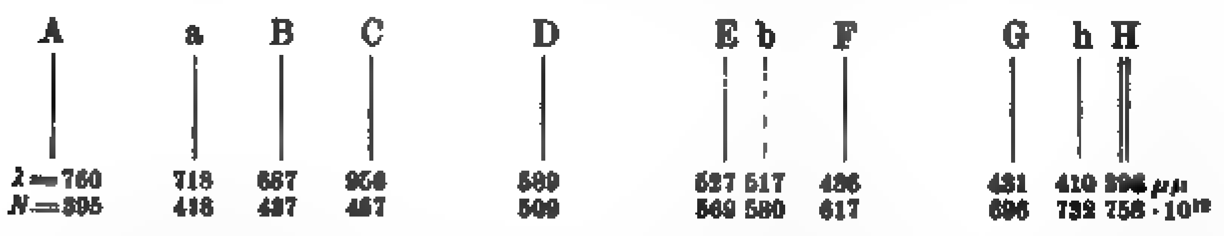
$$\lambda = l\sin\delta_1 = \tfrac{1}{2}l\sin\delta_2 = \tfrac{1}{3}l\sin\delta_3 \text{ usw.} \qquad 1.$$

Die genau senkrechte Stellung der Gitterplatte ist dadurch charakterisiert, daß zusammengehörige Seitenbilder bei dieser Stellung den kleinsten Abstand haben. — Genauer visiert man den Spalt mit dem Fernrohr an, fixiert dieses, bedeckt den Kollimator mit dunkelem Papier und stellt das Gitter mittels Spiegelung senkrecht. Vgl. beleuchtetes Fadenkreuz 60, 4.

Als Längeneinheiten für Lichtwellen werden gebraucht das Mikron (μ), d. h. $\mu = 10^{-3}$ mm, oder $\mu\mu = 10^{-6}$ mm, oder auch 10^{-7} mm („Angström-Einheit"). — Wellenlängen in Luft s. Tab. 23.

Eine in μ ausgedrückte, in der Luft gemessene Wellenlänge λ bedeutet die sekundliche Schwingungszahl $N = 300 \cdot 10^{12}/\lambda$.

Beugungsspektrum. Nicht homogenes Licht wird durch das Gitter in Spektra zerlegt, in denen nach obigen Formeln das Licht von größerer Wellenlänge (rot) am stärksten abgelenkt erscheint. Bei Sonnenlicht, in welchem zur Definition und Einstellung der Farbe die Fraunhofer'schen Linien geeignet sind, ist das erste Spektrum und der größte Teil des zweiten rein; von da an greifen die Spektra übereinander. Im Beugungs- oder „Normalspektrum" (Fig.) ist das Licht nach



den Wellenlängen λ verteilt, also anders als im Dispersionsspektrum (S. 261), in welchem der brechbarere Teil relativ breiter erscheint. N ist die Schwingungszahl während einer Sekunde.

II. Zurückführung einer Wellenlänge auf eine andere mittels Koinzidenz. Gitterspektra verschiedener Ordnung.

Sind in den Spektren $m$ter bez. $n$ter Ordnung die Wellenlängen λ_m bez. λ_n gleich abgelenkt, so ist nach den Gleichungen 1. $m\lambda_m = n\lambda_n$ also $\lambda_m : \lambda_n = n : m$.

Die Ordnungszahlen m und n sind ganze Zahlen, lassen sich also, falls sie nicht bekannt sind, aus einer genäherten Kenntnis von λ_m und λ_n ableiten, die meist gegeben oder nötigenfalls leicht zu beschaffen ist.

So kann man durch verschiedene Kombinationen die Wellenlängen, auch im Ultraviolett und Ultrarot (S. 281), auf wenige genau gemessene (Tab. 23) zurückführen. Kleine Unterschiede in den Ablenkungen werden mikrometrisch subjektiv oder in photographischen Aufnahmen gemessen.

Langley, Wied. Ann. 22, 598. 1884.

III. Durch Talbot'sche Streifen im Spektrum.

Die Pupille wird vor einem Spektralapparat von der Seite des Violett her zur Hälfte mit einem dünnen durchsichtigen, etwa 0,2 mm dicken Blättchen bedeckt. Dadurch entstehen Streifen, deren größte Dunkelheit an den Orten liegt, wo der Gangunterschied der durch die Luft und das Blättchen gegangenen Wellen ein ungerades Vielfaches von $\frac{1}{2}\lambda$ beträgt.

Dicke und Brechungsverhältnis der Platte für eine Farbe (z. B. Fraunhofer'sche Linie) von der Wellenlänge λ seien d und n. Dann ist die Wellenlänge in der Platte $=\lambda/n$ und der obige Gangunterschied $=(n-1)d/\lambda$. Für eine kleinere Wellenlänge λ' gelte n', also der Gangunterschied $(n'-1)d/\lambda'$. Die Anzahl p der Streifenbreiten zwischen den beiden Farben ist gleich der Differenz der beiderseitigen Gangunterschiede $p=d[(n'-1)/\lambda'-(n-1)/\lambda]$. Sind d, λ, n und n' (63) bekannt, so kommt hieraus

$$\lambda' = \frac{n'-1}{p/d+(n-1)/\lambda}.$$

Umgekehrt läßt sich, wenn λ, n, λ' und n' bekannt sind (Tab. 23 u. 24), die Dicke d ermitteln. Ist dies z. B. im sichtbaren Spektrum geschehen, so lassen sich nachher Wellenlängen im Ultrarot oder Ultraviolett bestimmen.

Esselbach, Pogg. Ann. 98, 513. 1856, nach Helmholtz.

IV. Interferometer von A. Michelson.

Ring-Interferenz geneigten Lichtes zwischen parallelen Platten (Haidinger). Gegeben sei eine durch parallele Ebenen P und P_1 begrenzte Schicht. Auf P falle homogenes Licht, werde zum Teil reflektiert und zum Teil durchgelassen. Letzterer Teil erfahre an P_1 eine Reflexion und interferiere nach seinem Wieder-Durchgang durch P mit dem an P direkt reflektierten Teile. Die Durchlässigkeit sei ev. (durch Versilbern usw.) so reguliert, daß beide Teile schließlich eine ungefähr gleiche Intensität haben, so daß entgegengesetzte zusammentreffende Schwingungszustände sich aufheben. Je nach dem Gangunterschiede tritt dann Verdunkelung oder Erhellung ein; der Gangunterschied aber ist durch die Neigung des Strahles gegen die Schicht bestimmt. Ein auf **unendlich akkommodiertes** Auge oder Fernrohr, bei dem also **parallele** Strahlen zur Interferenz kommen, beobachtet dann Kreisfransen, die um die senkrechte Durchsichtsrichtung zentriert verlaufen und deren Auftreten beweist, daß die Schicht sehr vollkommen planparallel ist. Vgl. 66 V.

Nähert man die Flächen einander langsam, so wandert das Kreis-

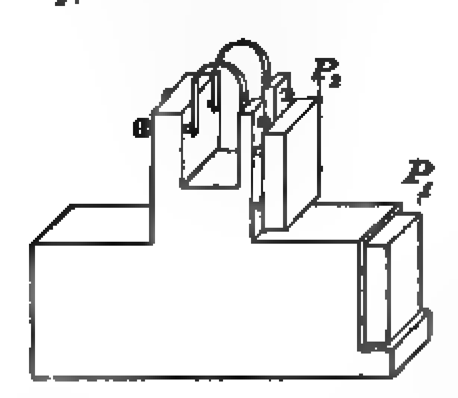
system nach außen, unter abwechselnder Erhellung und Verdunkelung der Mitte und dem Entstehen neuer Kreise von hier aus, indem hier jedesmal ein voriger früherer Interferenzzustand sich wiederholt, wenn der Gangunterschied um eine, der Plattenabstand also um eine halbe Wellenlänge geändert worden ist. Man zähle diese Perioden, bis die Flächen in Berührung sind; die Hälfte der Zahl drückt den ursprünglichen Abstand in Wellenlängen aus.

Vgl. Mascart, Ann. chim. phys. 23, 116. 1871; Lummer, Wied. Ann. 23, 49. 1884. S. auch die Anwendung zum Prüfen des Parallelismus von Platten S. 290.

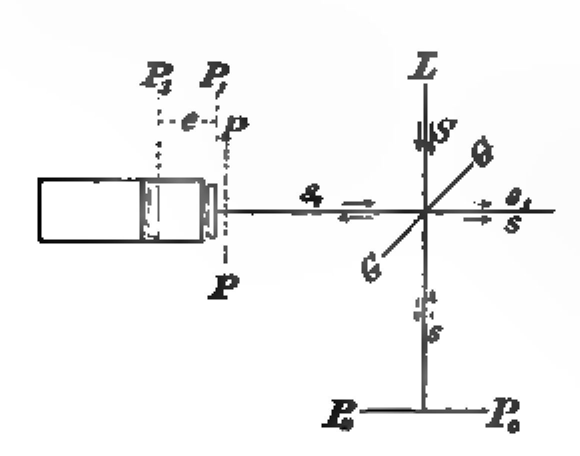
Erkannt wird die Berührung daran, daß die Interferenz, welche bei kleinem Abstand auch in weißem Licht sichtbar wird, mit dem letzteren den farblosen Zustand zeigt, der eben der Berührung entspricht, (der z. B., wenn P und P_1 Hinter- und Vorderflächen desselben durchsichtigen Mittels sind, dunkel, bei reflektierenden Silberschichten hell ist).

Wir gehen hier nicht darauf ein, daß in Wirklichkeit dieser Zustand selbst nicht mehr scharf zu beobachten ist und daß deswegen die Anordnung bei Michelson vermöge einer schwachen Neigung ein wenig verändert ist. Hierdurch treten nämlich in kleinem Abstande der Flächen wandernde Fizeau-Newton'sche Streifen auf, deren farblose Mittelfranse zur Beobachtung benutzt wird.

Bei Michelson ist die in Wellenlängen auszumessende Länge der senkrechte Abstand e der beiden vollkommen ebenen Oberflächen P_1 und P_2, die durch die versilberten Vorderflächen zweier Glasplatten gebildet werden, welche an einem Bronze-Barren justierbar befestigt und vollkommen parallel gemacht worden sind. Zu der letzten feinen Justierung dient der schwache regulierbare Druck der Federn auf die Stützen der Platten. — Diese neben einander liegenden Ebenen lassen sich nicht direkt auf einander beziehen, sie werden deswegen einzeln auf eine konstant liegende Vergleichsebene P bezogen, die aber nicht wirklich, sondern als das Bild einer wirklichen (spiegelnden) Ebene P_0 in dem unter 45° geneigten Winkel G vorhanden ist.



Stellen wir uns G zunächst als einen unendlich dünnen, teilweise reflektierenden und teilweise durchlassenden Spiegel vor, so ist das Schema der Anordnung im Grundriß durch die Figur gegeben. Ein von der Lichtquelle L kommender Strahl S zerlegt sich an G. Der durchgehende Teil s wird an P_0 in sich zurückgeworfen und hat nach seiner Reflexion an G dieselben Eigenschaften,



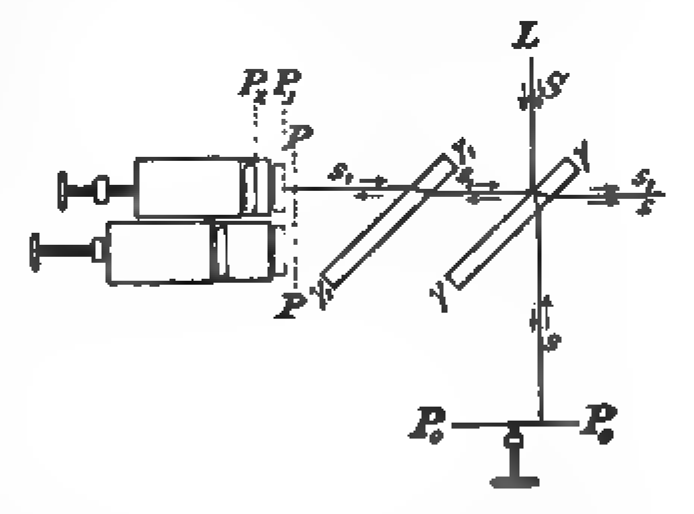
wie wenn er von dem Spiegelbilde P der Fläche P_0 in G zurückgeworfen wäre.

Der an G reflektierte Teil s_1 von S treffe etwa auf P_1, er wird daselbst reflektiert und interferiert nach seinem Durchtritt durch G mit s. Der Gangunterschied von s und s_1 entspricht dem Doppelten des Abstandes zwischen den Ebenen P und P_1.

Werden andere Strahlenrichtungen hinzugenommen, so entsprechen nun die Interferenzen zwischen s und s_1 genau dem oben unterstellten Falle, und die Kreisfransen werden, wenn P_1 jetzt allmählich vorgeschoben wird, ihre Wanderung ausführen und schließlich zeigen, daß P_1 genau in P hineinfällt.

Nachdem dies erreicht ist, beobachtet man nun an P_2, schiebt es vor und zählt die Perioden, bis P_2 in P fällt. Die halbe Anzahl mißt den Abstand $P_1 P_2$ in Wellenlängen.

An die Stelle des oben angenommenen unmeßbar dünnen Spiegels G tritt wirklich eine vorn schwach versilberte Glasplatte γ. Die Symmetrie des Strahlenganges von s und s_1 wird wiederhergestellt durch Einschalten einer unversilberten gleichen Platte γ_1 in s_1. Benutzt werden die gezeichneten Strahlen, von denen ein jeder die Glasdicke dreimal durchsetzt hat. Andere Reflexionen usw. werden abgeblendet. γ_1 erleichtert durch seine Drehbarkeit zugleich das Herstellen der Ausgangs-Koinzidenz von P_1 mit P (vgl. oben).



Zu scharfer Interferenz sind die rote, grüne oder blaue Cd-Linie sogar bei Gangunterschieden von ca. 500000 Wellenlängen (über 1 dm) noch fähig. Auszählen einer solchen Größe ist freilich nicht mehr möglich. Direkt gezählt wurden deswegen von Michelson nur die 1200—1600 Wellen eines Etalons von 2^{-8} dm = 0,3906 mm. Auf diesen wurden acht ebenso angeordnete Stücke von 2^{-7}, 2^{-6} ... bis 1 dm ohne Zählen zurückgeführt. Kombinierte Beobachtungen mit den drei Cd-Farben lassen nämlich die von vorn herein nahe bekannten ganzen Anzahlen der Wellen sicher ableiten; die Bruchteile werden durch Beobachtung ermittelt. Das ganze Dezimeter wird schließlich komparatorisch auf das Originalmeter zurückgeführt.

Die Resultate, für Luft von 15° und 760 mm, $\lambda_r = 0{,}6438472$, $\lambda_{gr} = 0{,}5085824$, $\lambda_{bl} = 0{,}4799911 \cdot 10^{-3}$ mm haben nach Michelson einen wahrscheinlichen Fehler von einigen Einheiten der letzten Stelle.

Michelson, Trav. et Mém. du Bur. Internat. Bd. XI, 1895.

Messungen mit einem geänderten Interferometer Fabry u. Perot, Ann. chim phys. (7) 22, 564. 1901; 25, 98. 1902.

V. Newton'sche Ringe (1676).

Wird Licht an zwei hinter einander liegenden Flächen reflektiert, so verstärken oder schwächen sich die beiden Wellenzüge je nach ihrem Gangunterschiede. Derselbe Zustand wiederholt sich immer nach einer Zunahme des Gangunterschiedes um λ, also des Abstandes der Flächen um $\frac{1}{2}\lambda$. Hieraus leitet sich die folgende Regel ab.

Eine auf einer Planplatte liegende Kugelfläche von sehr großem Krümmungsradius r (66) werde mit homogenem Licht beleuchtet. Zwei nach ihrer Ordnungszahl um k unterschiedene Ringe mögen bei senkrechter Ansicht die Halbmesser a_1 und a_2 zeigen. Dann hat das Licht in dem Mittel zwischen den reflektierenden Flächen die Wellenlänge

$$\lambda = (a_2^2 - a_1^2)/(kr).$$

Mittels der Formel kann man auch mit Licht von bekanntem λ (Na 0,000589 mm) einen unbekannten Radius r bestimmen. — Befindet sich zwischen den Gläsern irgend ein Mittel von anderem Brechungsverhältnis, so daß Reflexionen entstehen, so kann man dieses B.-V. n aus der gemessenen Wellenlänge λ und derjenigen λ_0 in Luft als $n = \lambda_0/\lambda$ bestimmen.

Beweis. Zu einem Ringe vom Halbmesser a gehört (Fig.) eine Höhe unter dem Kugelmittelpunkt $= \sqrt{r^2 - a^2}$ oder, wenn a/r sehr klein ist, nach Formel 8, S. 9 $r - \frac{1}{2}a^2/r$. Der Höhenunterschied beträgt demnach in unserem Falle $\frac{1}{2}(a_2^2 - a_1^2)/r$ und ist gleich $\frac{1}{2}k\lambda$.

66. Messung eines Krümmungshalbmessers.

I. Mit dem Sphärometer.

Das Sphärometer (21, 7) wird zuerst auf einer als eben bekannten (vgl. V) Fläche und dann auf der zu messenden Fläche eingestellt. Die Stellungen der mittelsten Spitze bei beiden

Versuchen unterscheiden sich von einander um eine Höhe h. Nennt man l die Seite des gleichseitigen Dreiecks, welches die drei festen Spitzen als Eckpunkte hat, so ist der Krümmungshalbmesser

$$r = \tfrac{1}{6} l^2/h + \tfrac{1}{2} h.$$

Denn wenn H die Höhe in dem von den Seiten l gebildeten Dreiecke, so ist $r^2 = (r-h)^2 + (\tfrac{2}{3}H)^2$ oder $2rh = \tfrac{4}{9}H^2 + h^2$. Da ferner $H^2 = \tfrac{3}{4}l^2$, so folgt obiger Ausdruck.

Man mißt l am einfachsten, nachdem man die Sphärometerspitzen auf Papier abgedrückt hat. Unterscheiden die drei Seiten sich um ein weniges, so darf man den Mittelwert einsetzen.

Neuere Sphärometer haben anstatt der Meßschraube einen Maßstab, an welchem die Verschiebungen der Spitze abgelesen werden; außerdem anstatt der drei Basisspitzen einen Kreis mit scharfer Kante vom Radius R. Dann ist $r = \tfrac{1}{2}(R^2/h + h)$.

Bamberg, ZS f. Instr. 1887, 297; Abbe, ib. 1892, 307.

Im Handel sind für optische Zwecke bequeme Sphärometer mit Zeigerübertragung, die, auf die Fläche aufgedrückt, den Krümmungshalbmesser oder seinen reziproken Wert ohne weiteres ablesen lassen. Auf ihre Richtigkeit müssen sie geprüft werden.

II. Durch Spiegelung (R. Kohlrausch).

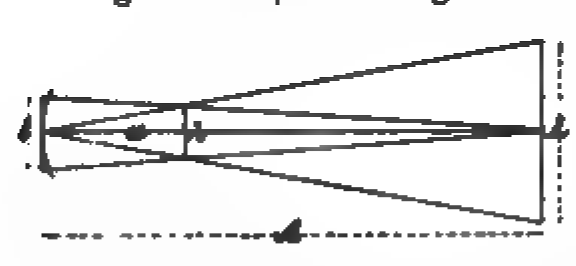
Eine spiegelnde Kugelfläche entwirft von einem leuchtenden Punkte ein Bild, entweder ein virtuelles aufrechtes (hinten), oder ein reelles verkehrtes (vorn), letzteres aber nur in dem Falle, daß der Punkt außerhalb der Brennweite eines **konkaven** Spiegels liegt. Die Brennweite ist $f = \tfrac{1}{2}r$. Bedeutet A den Abstand des leuchtenden Punktes vom Spiegel, so ist die Bildweite a gegeben durch die Beziehung $1/A + 1/a = 1/f$; den Abstand eines virtuellen Bildes oder die Brennweite eines Konkavspiegels hat man hier negativ zu rechnen. Die Bildgröße λ verhält sich zur Gegenstandsgröße L $\lambda : L = a : A$.

Die Methode ist anwendbar auf spiegelnde, nicht zu schwach gekrümmte, wenn auch kleine Flächen. Zwei schmale Lichter werden in nicht zu kleiner Entfernung A vor dem Mittelpunkt der aufrecht stehenden Fläche im gegenseitigen Abstande L angebracht und mitten zwischen ihnen ein Fernrohr, welches auf die Fläche eingestellt wird. Dicht vor der Fläche, parallel mit der Verbindungslinie der Lichter wird ein kleiner, am besten auf Glas geteilter Maßstab befestigt. Die Lichter geben zwei in der Fläche reflektierte Bilder, deren Abstand l auf dem kleinen Maßstabe mit dem Fernrohr beobachtet wird. Dann gilt

bei einer konvexen, bei einer konkaven Fläche

$$r = \frac{2Al}{L-2l} \qquad\qquad r = \frac{2Al}{L+2l}$$

Beweis für eine konkave Fläche. L stellt hier die Gegenstandsgröße dar, die Bildgröße sei λ. Das objektive Bild liege um a vor der Kugelfläche, dann gilt $\lambda : L = a : A$. Man sieht aber λ auf den Maßstab projiziert in der Länge l. Offenbar ist $l : \lambda = A : (A-a)$, also $l : L = a : (A-a)$ oder $l : (L+l) = a : A$, also $1/a = (L+l)/Al$. Setzt man dies in die Gleichung $1/A + 1/a = 2/r$, so kommt $2/r = (L+2l)/Al$ oder $r = 2Al/(L+2l)$.



Bei der konvexen Fläche liegen Krümmungsmittelpunkt und Bild hinten. Man hat im Beweise die Vorzeichen von r und a umzukehren.

Je geringer die Krümmung ist, desto größer muß die Entfernung A im Verhältnis zu L genommen werden, erstens, damit diese Formeln giltig sind, dann aber auch, weil in kleiner Entfernung die Bilder nicht mit dem Maßstab gleichzeitig scharf gesehen werden. Durch Verkleinerung der Öffnung des Fernrohrobjektives kann man sie übrigens verschärfen.

Bei der Messung einer Hohlfläche kann man den Maßstab auch an dem Ort der Bilder aufstellen, d. h. da, wo er mit diesen dem Fernrohr deutlich erscheint. Dabei mißt man λ, und wenn die Skale jetzt von der Verbindungslinie der Flammen um B absteht, so ist in den Formeln für l einzusetzen $\lambda \cdot A/B$. — Mit einem Theodoliten braucht man keinen Maßstab; man mißt den Winkel φ der Bilder und berechnet, da $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}l/A$ ist, $r = 4A^2/(L \operatorname{ctg} \frac{1}{2}\varphi \pm 4A)$.

Genauer und bequemer ist anstatt Maßstab und Fernrohr das Helmholtz'sche Ophthalmometer (22 a).

Als Lichter sind Benzinflämmchen zweckmäßig. Auch die Ränder eines Fensters kann man gebrauchen, wenn das Fernrohr dicht vor diesem aufgestellt wird.

An Linsen entstehen auch Bilder von der Hinterfläche. Bei Bikonkav- oder Bikonvexlinsen sieht man an der aufrechten oder verkehrten Lage der Bilder, welche die richtigen sind. Durch Schwärzen der Hinterfläche fallen die anderen fort.

III. Aus der Brennweite.

Mit geringen Abänderungen läßt sich nach 67, 1, 3 oder 5 die Brennweite eines Konkav-, nach 67, 11 die eines Konvexspiegels ermitteln. Der Krümmungshalbmesser ist gleich der doppelten Brennweite.

IV. Schwach gekrümmte Flächen.

Ein Fernrohr wird so eingestellt, daß ein Gegenstand (etwa eine Teilung), der sich im Abstande A vor dem Objektiv

befindet, deutlich erscheint. Mit dem so eingestellten Fernrohr werde in dem zu untersuchenden Spiegel das Bild eines Objektes deutlich gesehen, wenn der Abstand des Objektes vom Spiegel $= a$, derjenige des Objektives vom Spiegel $= e$ (etwa $= \frac{1}{2} A$) ist. Dann findet man den Krümmungshalbmesser

$$r = 2a \cdot \frac{A-e}{A-e-a}.$$

Positives r bedeutet Hohlspiegel, negatives r Konvexspiegel.

Zur Erkennung des Deutlichsehens dient die Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz des Fernrohrs.

Vgl. auch die Methode 65 V mit Newton'schen Ringen.

V. Prüfung von Planflächen.

a) Vgl. das Verfahren S. 256.

b) Man betrachtet in einem auf sehr große Entfernung eingestellten Fernrohr das Spiegelbild eines ebenso weiten Objektes in der Fläche, wenn diese nahe vor das Objektiv gehalten wird. Das Bild darf keine Parallaxe gegen das Fadenkreuz zeigen. Ein geübtes Auge kann diese Untersuchung auch unbewaffnet mit ziemlicher Schärfe ausführen.

c) Einen kleinen Planspiegel prüft man am einfachsten, indem man mit ihm ein Spiegelbild der Sonne auf eine ferne Wand wirft. Das Bild muß rund sein und den scheinbaren Durchmesser der Sonne zeigen. Die Prüfung ist sehr empfindlich. Gibt eine Platte zwei Kreisbilder, so sind die Oberflächen wohl eben, aber nicht parallel. Solche Platten sind als Deckgläser oder vorn versilberte Spiegel ohne weiteres verwendbar; hinten spiegelnde richte man für Skalenablesungen so, daß ihre Prismenkante senkrecht auf den Teilstrichen steht.

Prüfung durch Lichtinterferenz. *d*) Eine anderweitig als plan bekannte Fläche wird mit der zu prüfenden in Berührung gebracht. Die dann durch Beleuchtung mit Natriumlicht auftretenden Streifen müssen geradlinig und parallel verlaufen.

Prüfung einer planparallelen Platte in sich. *e*) Das feinste Reagens auf Parallelismus liefern die durch Reflexion homogenen Lichtes an der Vorder- und Hinterfläche auftretenden Interferenzkurven, nämlich erstens die Kurven, welche man an dünnen Platten nicht konstanter Dicke bei Akkommodation auf

die Platte beobachtet (65 V) und deren Verlauf, analog den Höhenkurven einer Landkarte, den Stellen gleicher Dicke entspricht, die also z. B. an keilförmigen Planplatten geradlinig verlaufen.

f) An sehr vollkommen parallelen Platten, wo jene Kurven für die Beobachtung zu weit auseinander liegen, treten, und zwar auch bei großer Dicke, bei Akkommodation auf große Entfernung, vermöge der verschiedenen Neigung der die Platte durchsetzenden Strahlen, Ringe um die Richtung des senkrechten Durchtritts herum auf (Haidinger). Eine Abweichung vom Parallelismus macht sich durch Abweichung der Kurven von der Kreisform bemerklich oder auch dadurch, daß bei Parallelverschiebung der Platte im Zentrum des Systems ein Wechsel von hell und dunkel eintritt, so oft die Plattendicke sich um $\frac{1}{4}$ Wellenlänge des Lichtes ändert. Vgl. 65 IV.

Siehe über die Theorie dieser Kurven und ihre Verwendung zum Prüfen Lummer, Wied. Ann. 23, 49. 1884; auch Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl. II 1, 920. 1897, und über einen Abbe'schen Prüfungsapparat Czapski, ZS f. Instr. 1885, 149.

67. Brennweite.

Brennpunkt F eines brechenden (oder reflektierenden) Systems von Flächen, welches homozentrisches Licht wieder in einen Punkt vereinigt, z. B. einer sphärischen Linse, ist der Punkt, in welchem zur Axe des Systems parallel einfallende Strahlen sich nach dem Durchgang (oder der Reflexion) schneiden.

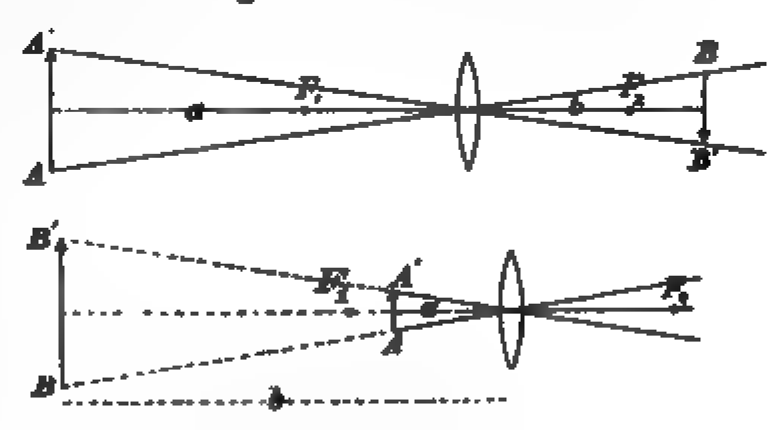
Der Abstand des Brennpunktes von einer Linse, streng genommen von der zugehörigen Hauptebene der Linse (s. S. 295), ist ihre Brennweite. Diese ist, wenn, wie wir annehmen, die Strahlen in dasselbe Mittel austreten, aus dem sie eingefallen sind, auf beiden Seiten gleich groß. Bei Zerstreuungslinsen gibt man der Brennweite das negative Vorzeichen. Nummer einer Brille nennt man ihre Brennweite, in der Regel in Pariser Zollen ausgedrückt.

Die Stärke einer Linse wird durch die reziproke Brennweite bestimmt; von einer Linse oder einer Linsenkombination, welche die Brennweite f Meter besitzt, sagt man, sie habe eine Stärke von $1/f$ Dioptrien. Die Stärke eines Systems von hinter einander gesetzten Linsen ist gleich der Summe (Vorzeichen!) der einzelnen Stärken, wenn die Dicke des Systems klein ist gegen die Brennweiten.

Aus den beiden Krümmungshalbmessern r und r' und dem Brechungsverhältnis n einer Linse erhält man ihre Brennweite f oder ihre Stärke $1/f$

$$f = \frac{1}{n-1}\frac{rr'}{r+r'}; \quad \frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right).$$

Wenn $n = 1,5$ (schwach brechendes Glas), so wird also $\frac{1}{f} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)$, d. h. die reziproke Brennweite ist gleich dem Mittel aus den reziproken Krümmungsradien. Ist eine Linsenfläche konkav, so wird ihr Krümmungshalbmesser mit negativem Vorzeichen eingesetzt.



Von einem leuchtenden Gegenstande AA' entwirft die Linse ein Bild BB'; die Sammellinse, je nachdem er außerhalb oder innerhalb der Brennweite liegt (Figg.), ein reelles verkehrtes oder ein virtuelles, vergrößertes aufrechtes Bild. — Die Zerstreuungslinse gibt nur virtuelle, verkleinerte Bilder.

Gegenstandsweite a und Bildweite b sind mit einander und mit der Brennweite f durch die Beziehung verbunden:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}; \quad b = \frac{af}{a-f}. \qquad 1.$$

Die Bildgröße BB' verhält sich zur Gegenstandsgröße AA' stets wie die Bildweite zur Gegenstandsweite:

$$BB' : AA' = b : a. \qquad 2.$$

Die Abstände und Größen virtueller Bilder, sowie Brennweiten von Zerstreuungslinsen sind mit negativen Vorzeichen einzusetzen.

Andere übersichtliche Beziehungen entstehen, wenn man jeden der beiden Abstände von dem zugehörigen Brennpunkte aus rechnet; er möge dann für den Gegenstand p, für dessen Bild q heißen, so daß $a = p + f$, $b = q + f$ ist. Diese Werte in Gl. 1 u. 2 eingesetzt erhält man leicht

$$pq = f^2 \quad \text{und} \quad BB' : AA' = q : f \quad \text{oder} \quad f : p.$$

Unberücksichtigt bleiben im folgenden die sog. Aberrationen der Linsen. Die „chromatische Abweichung“ entsteht durch die Abhängigkeit der Brennweite vom Brechungsverhältnis. Sie äußert sich bei weißem Licht in dem Auftreten einer Reihe von Brennpunkten für die verschiedenen Farben bez. in farbigen Säumen um die Bilder. Die „sphärische Abweichung“ wird dadurch bedingt, daß an Linsen, deren Durchmesser nicht sehr klein gegen die Brennweite ist, die äußeren Zonen eine merklich kleinere Brennweite haben als die innern. Auch bildet sich, sobald Strahlen nicht sehr flach gegen die Axe verlaufen, im allgemeinen ein Gegenstand verzerrt, ein ebener Gegenstand gewölbt ab.

Gerade diese Eigenschaften kommen bei der Untersuchung von Linsen zu feineren Zwecken in Betracht, besonders bei Objektiven für Fernrohre, Mikroskope und für Photographie. — Angaben über den Gegenstand und seine umfangreiche Literatur (besonders von Abbe) in den physikalischen und optischen Lehrbüchern. — Neue Meßmethoden für große und kleine

Objektive mit Benutzung photographischer Aufnahmen vor und hinter dem Brennpunkt sowie außerhalb der Axe, Untersuchung der einzelnen Zonen usw. bei J Hartmann, ZS f. Instr. 1904, 1, 33 u. 97

Zentrierung. Es ist wichtig, daß die Linsenaxe (die Verbindungslinie der Krümmungsmittelpunkte) in die Richtung vom Objekt nach dem Bilde gebracht wird, weil andernfalls der Bildabstand zu klein bestimmt wird. Die Axenrichtung findet man z. B. mit einer kleinen Flamme in geeignetem Abstande vor der Linse: liegen die beiden, in der Vorder- und Rückfläche gesehenen Spiegelbilder stets in der durch Auge, Flamme und Linsenmittelpunkt gehenden Ebene, so steht die Flamme in der Axe.

Brennweite einer Sammellinse.

1. Mit der Sonne. Man erzeugt mit der Linse ein Sonnenbild auf einem Stückchen Glas und stellt letzteres so, daß das Bild scharf begrenzt ist. Der Abstand des Glases von der Linse ist die Br.-W.

2. Mit dem Fernrohr. Ein Fernrohr wird auf Deutlichsehen eines sehr entfernten Gegenstandes eingestellt. Man visiert darauf mit dem Fernrohr durch die vor sein Objektiv gebrachte Linse nach einem ebenen Objekt (z. B. Papier mit Schrift). Der Abstand von der Linse, in dem das Objekt deutlich erscheint, gibt die Br.-W.

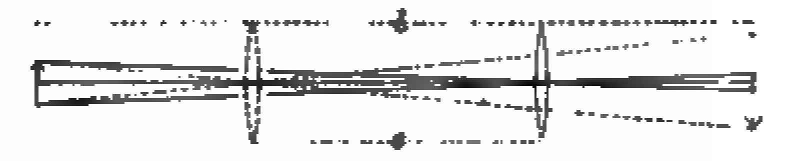
Mit fernsichtigen Augen kann man die Bestimmung genähert auch ohne Fernrohr ausführen. Man zwingt sich, auf große Entfernung zu akkommodieren dadurch, daß man mit dem einen Auge an der Linse vorüber nach einem fernen Gegenstande sieht, und blickt mit dem anderen durch die Linse nach einem verschiebbaren Gegenstande (Bleistiftspitze). Erscheint der Gegenstand deutlich, so ist sein Abstand von der Linse die Br.-W.

3. Aus Gegenstands- und Bildweite. Im Abstande a von der Linse stellt man ein Licht auf, oder besser einen Blechschirm mit einem Loch und einem Drahtkreuz darin vor einer Flamme, auf der anderen Seite der Linse einen weißen Schirm in einem solchen Abstande b, daß ein deutliches Bild des Lichtes oder des Kreuzes entsteht (Fig. 1, vor. S.). Über Zentrierung des Lichtes siehe oben. Wenn f die Br.-W., so ist

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \quad \text{oder} \quad f = \frac{ab}{a+b}.$$

Ist Abstand des Objekts und des Bildes gleich, so gibt also seine Hälfte die Br.-W. Eine dünne Linse kann man z. B. dicht vor einen Spiegel bringen und einen Schirm mit erleuchteter kleiner Öffnung so stellen, daß dicht neben dieser ihr deutliches Bild auf dem Schirm erscheint.

4. Durch Verschiebung (Bessel). Befindet sich ein Gegenstand in einem konstanten, die 4fache Br.-W. übersteigenden Abstande l von einem Schirm, so gibt es zwei Zwischenstellungen, in denen die Linse ein deutliches Bild entwirft.



Die Verschiebung zwischen beiden Stellungen, die sich genauer messen läßt als Abstände von der Linse, betrage die Länge e. Dann ist die Br.-W. der Linse

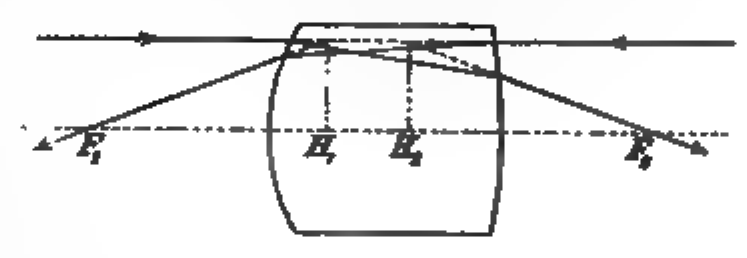
$$f = \frac{1}{4}(l - e^2/l).$$

Als Gegenstand kann ein Fadenkreuz dienen und anstatt des Schirmes ein eben solches mit Lupe, wobei das Zusammenfallen von Objekt und Bild aus der Abwesenheit der Parallaxe beurteilt wird.

Beweis. Die Abstände des Objektes und des Bildes von der Linse sind bei diesen Versuchen offenbar $\frac{1}{2}(l+e)$ und $\frac{1}{2}(l-e)$. Hieraus folgt $1/f = 2/(l+e) + 2/(l-e) = 4l/(l^2-e^2)$, q. e. d.

5. Aus der Gleichheit von Objekt und Bild. Wenn die Größe des Bildes gleich der des Gegenstandes ist, so ist ihr gegenseitiger Abstand gleich der vierfachen Br.-W.

Hauptpunkte. Kann man nicht, wie bis hierher angenommen wurde, die Dicke einer Linse oder eines Systems gegen die Brennweite und die Bildweiten vernachlässigen, so sind alle Abstände von zwei Ebenen aus zu rechnen, die man die Hauptebenen nennt. Ihre Schnittpunkte H_1 und H_2 mit der Axe, die Hauptpunkte, liegen, wenn das Eintritts- und das Austritts-Mittel dasselbe ist, stets zu den beiden Brennpunkten F_1 und F_2 symmetrisch. In der Figur gehört H_1 zur linken, H_2 zur rechten Seite. Der Abstand H_1F_1 oder H_2F_2 stellt die Brennweite f vor. Die Konstruktion von Hauptpunkten s. unten.



In Glaslinsen (genau für $n = 1{,}5$) von nicht zu großer Dicke ist H_1H_2 gleich $\frac{1}{3}$ der Dicke. Bei beiderseitig gleicher Krümmung teilen also die Hauptpunkte die Linsendicke d in drei gleiche Teile. —

Eine plankonvexe oder plankonkave Linse hat ihren einen Hauptpunkt in der gekrümmten Fläche, der andere liegt von da um $\frac{1}{3}d$ nach innen.

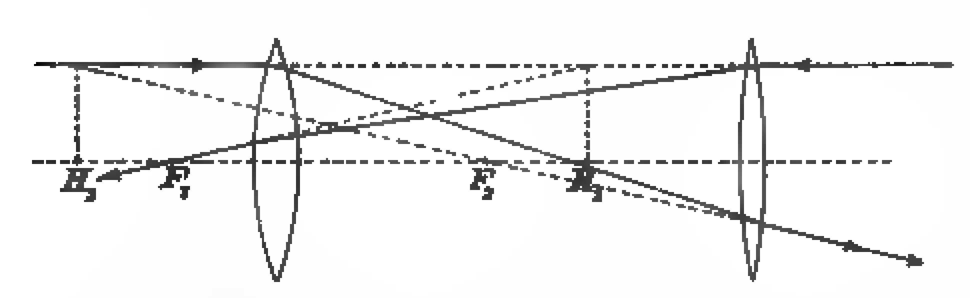
Es gelten u. a. die Sätze (Fig. v. S.):

1) Ein parallel der Axe links einfallender Strahl geht nachher durch F_2 so, wie wenn er geradlinig vom Schnittpunkte des einfallenden Strahles mit der H.-Ebene H_2 käme. Die Hauptpunkte lassen sich hiernach konstruieren.

2) Ein von links in der Richtung nach dem H.-P. H_1 einfallender Strahl geht nach dem Durchtritt durch die Linse parallel zu sich selbst weiter, wie wenn er geradlinig vom Punkte H_2 käme.

Die Linse wirkt demnach so, als ob die Strecke H_1H_2 fehlte.

Auch ein Linsensystem hat zwei Brennpunkte und zwei Hauptpunkte, die, mit der Maßgabe, daß sie zu einander symmetrisch liegen, so daß eine einzige Brennweite $H_1F_1 = H_2F_2$ resultiert, einzeln beliebig innerhalb oder außerhalb verteilt sein können. Vgl. als Beispiel die Figur, eine dem Campani'schen Okular ähnliche Verbindung zweier verschiedener Sammellinsen.



Ohne daß man die Lage der Hauptpunkte zu kennen braucht, geben die folgenden Methoden die richtigen Brennweiten von Linsen oder von Systemen.

6. Aus der Größe stark vergrößerter oder verkleinerter Bilder. a) Man stelle um ein weniges außerhalb des Brennpunktes einen hell beleuchteten Maßstab auf, am besten von Glas mit durchfallendem Licht, und gegenüber, auf der anderen Seite der Linse, einen weißen Schirm in einem solchen Abstande A von der Linse, daß auf ihm das stark vergrößerte Bild der Teilung deutlich erscheint. Ist l die Länge eines Skalenteiles, L die Länge seines Bildes, so gilt

$$f = A\frac{l}{L+l}.$$

b) Oder man stellt umgekehrt einen scharf begrenzten Gegenstand in größerer Entfernung von der Linse auf und mißt sein auf der anderen Seite der Linse entworfenes, nun stark verkleinertes Bild. Zu diesem Zwecke dient ein Mikrometer auf Glas mit vorgesetzter Lupe, welches so gestellt wird, daß Mikrometerteilung und Bild des Gegenstandes durch die Lupe deutlich

gesehen werden. In obiger Formel ist dann l die Länge des Bildes, L die des Gegenstandes, A des letzteren Abstand von der Linse.

Beweis. Die Abstände A und a des Bildes und des Gegenstandes von den zugehörigen Hauptebenen der Linse hängen durch die Formel $1/A + 1/a = 1/f$ zusammen. Die Größen beider verhalten sich $L:l = A:a$. Durch Einsetzen von $1/a = L/(Al)$ in die erste Gleichung entsteht obiger Ausdruck. Da A gegen die Dicke der Linse groß ist, so kann man anstatt des Abstandes von der Hauptebene merklich den gemessenen Abstand von der Linse setzen.

7. Verfahren von Meyerstein.

a) Linsen größerer Brennweite. Man fixiere auf einer Holzschiene zwei in mm geteilte kleine Glasskalen, die Teilungen einander zugewandt, in einer gegenseitigen Entfernung e, die merklich größer ist als die vierfache Brennweite. Man verschiebe die Linse zwischen den Skalen, bis das (verkleinerte) Bild der ersten gegen die zweite keine Parallaxe zeigt, und bestimme mit einer Lupe das Größenverhältnis Bild : Objekt $= v$; zugleich messe man den Abstand l_1 eines mit der Linse fest verbundenen Punktes — z. B. am Rande der Fassung — von dem Objekte. Nach Umkehrung der Linse wiederhole man die Operationen; aus den beiden v, die sich nur durch Versuchsfehler unterscheiden, wird das Mittel genommen. Der Abstand des mit der Linse fest verbundenen Punktes vom Objekt sei nun l_2, so ist

$$f = \frac{l_1 + l_2 - e}{1/v - v}.$$

Beweis. Vom Mittelpunkt beider Hauptpunkte (S. 295) hat das Objekt den Abstand $A = \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$, das Bild also $B = e - \frac{1}{2}(l_1 + l_2)$. Sind a und b die Abstände des Objekts und des Bildes von den Hauptpunkten selbst, so ist offenbar $a - b = A - B = l_1 + l_2 - e$. Nun gilt $v = b/a$, also $1/v - v = a/b - b/a$, wofür man schreiben kann $(a - b)(1/a + 1/b)$ oder $(l_1 + l_2 - e) \cdot 1/f$, q. e. d.

b) Bei Fernrohr- und Mikroskop-Okularen, sowie bei Mikroskop-Objektiven ist das Bild zu klein, um wie oben gemessen zu werden; zudem liegt es oft im Innern des Systems.

Man benutzt daher mit Vorteil ein horizontal gelagertes Mikroskop von langer Sehweite mit Okularmikrometer und als Objekt, in etwa $1/2$ m Entfernung, rechteckige Klötze geeigneter Größe oder farbige Papierscheiben auf weißem Hintergrund. v folgt sofort aus der Breite des Objektes, der Größe des Bildes

und dem Werte eines Skalenteiles. l_1 und l_2 lassen sich leicht direkt abmessen. Um auch e zu erhalten, bringe man nach Entfernung der Linse eine Nadelspitze in die deutliche Sehweite des Mikroskopes und messe ihre Entfernung vom Objekt.

Vgl. Meyerstein, Wied. Ann. 1, 315. 1877.

8. Verfahren von Abbe. Man bestimme für eine Lage des Objektes die Vergrößerung v (Bildgröße/Objektgröße), verschiebe das Objekt um eine gemessene Strecke Δ und finde nun die Vergrößerung v'. Dann ist

$$f = \frac{\Delta}{1/v' - 1/v}.$$

Aus $v = b/a$ und $1/f = 1/a + 1/b$ folgt $a = f(1 + 1/v)$. Ebenso folgt $a + \Delta = f(1 + 1/v')$. Also ist $\Delta = f(1/v' - 1/v)$, q. e. d.

Die Hilfsmittel sind die gleichen wie unter 7. Die Methode besitzt den Vorteil, daß eine Bestimmung des Bildortes nicht nötig ist.

Über Abbe's Fokometer vgl. Czapski, ZS f. Instr. 1892, 185; Müller-Pouillet, Physik, 9. Aufl., Bd. II 1 (Lummer) S. 875. 1897

9. Lage des Brennpunkts eines starken Linsensystems. Die Aufgabe liegt besonders an Okularen oder Mikroskop-Objektiven vor. Wir wollen den Abstand der Brennebene von dem Rande der Fassung messen (vgl. **68** III 2). Man klebt auf das Ende der Fassung eine Glasplatte mit einer Zeichnung, Teilung oder dgl., die Zeichnung nach innen, und legt das Ganze zwischen einerseits einen gut sichtbaren Gegenstand, Fensterrahmen, Flamme, dessen Abstand gegen die Brennweite als unendlich groß angesehen werden darf, und andrerseits ein horizontales, meßbar verschiebbares Mikroskop von mäßiger Vergrößerung, die Glasplatte dem letzteren zugekehrt. Die Verschiebung des Mikroskops zwischen dem Deutlichsehen der Zeichnung auf der Glasplatte und des durch das System entworfenen Bildchens des Objekts, etwa nach dem Ausbleiben der Parallaxe gegen ein Fadenkreuz des Mikroskops beurteilt, gibt direkt die gesuchte Größe (Dorn).

Zerstreuungslinsen.

10. Diese geben kein objektives Bild. Man verbindet sie mit einer stärkeren Sammellinse von bekannter Br.-W. F' und mißt nun die gemeinschaftliche Br.-W. F beider zusammen nach

einer der vorhin angegebenen Methoden. Dann findet sich die negative Br.-W. f der Konkavlinse allein aus

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{F} - \frac{1}{F'} \qquad f = \frac{FF'}{F'-F}.$$

11. Man mißt die Größe des Zerstreuungsbildes, welches die Linse von der Sonne auf einem Schirm in gegebenem Abstande entwirft. Bedeutet d den Durchmesser der Linsenöffnung, D den Durchmesser des Zerstreuungsbildes, A den Abstand des Schirmes von der Linse, so ist

$$f = \frac{Ad}{d - D + 0{,}0094\,A};$$

0,0094 ist die doppelte Tangente des scheinbaren Halbmessers der Sonne. Bei schärferen, nicht zu kleinen Linsen kann man $0{,}0094\,A$ vernachlässigen und hat die einfache Regel: derjenige Abstand des Schirmes, bei welchem das Zerstreuungsbild den doppelten Durchmesser der Linse hat, ist die Br.-W.

12. **Brennweite schwacher Linsen.** (Vgl. 66 IV.) Ein Fernrohr sei auf ein Objekt im Abstande A vom Objektive deutlich eingestellt. Man bringt die Linse dicht vor das Objektiv und sucht nun den Abstand A' des Objektes, in dem dieses jetzt deutlich erscheint. Dann ist

$$f = \frac{AA'}{A - A'}.$$

Negative Br.-W. bezeichnet eine Zerstreuungslinse.

Das Deutlichsehen wird an der Abwesenheit der Parallaxe des Bildes gegen das Fadenkreuz erkannt.

13. **Astigmatische Linsen.** Diese haben zwei Hauptbrennweiten für die beiden aufeinander senkrechten Hauptkrümmungen. Man erkennt jedes „Bild" eines leuchtenden Punktes daran, daß die Abbildung sich zu einer Geraden zusammenzieht, deren Richtung zugleich die eine Hauptkrümmungs-Richtung gibt. — Eine schief gehaltene sphärische Linse wirkt wie eine astigmatische, deren eine Br.-W. kürzer ist, als die der sphärischen.

68. Vergrößerungszahl usw. eines optischen Instrumentes.

I. Lupe.

Vergrößerungszahl einer Lupe nennt man die Größe, in welcher eine Länge durch die Lupe gesehen erscheint, geteilt durch die Größe,

mit der sie dem freien Auge in der kleinsten deutlichen Sehweite erscheint. Diese Vergrößerung ist also für verschiedene Augen ungleich.

Die Vergrößerungszahl m wird aus der Brennweite berechnet. Wird nämlich durch f die Brennweite, durch A die kleinste deutliche Sehweite des unbewaffneten Auges bezeichnet, so ist

$$m = 1 + A/f.$$

Für das mittlere Auge wird A gleich 25 cm gesetzt.

Beweis. Wird ein kleiner Gegenstand von der Länge l in einem Abstande a unter die Lupe gelegt, so daß sein (virtuelles) Bild im Abstande A erscheint, so ist $1/a = 1/A + 1/f$. Das Bild habe die Länge L, so ist die Vergrößerung $L/l = A/a = 1 + A/f$.

II. Fernrohr.

Vergrößerungszahl heißt das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein ferner Gegenstand im Fernrohre erscheint, zu dem Winkel, unter welchem er mit bloßem Auge gesehen wird.

1. Allgemein anwendbar ist folgendes Verfahren. Das Fernrohr wird in einem gegen die eigene Länge großen Abstande vor einem Maßstabe (Papierskale, Ziegeldach, Tapetenmuster) aufgestellt, auf welchem zwei Punkte hinreichend markiert sind, um mit bloßem Auge gesehen zu werden. Das eine Auge sieht nach dem Maßstabe durch das Fernrohr hindurch, das andere sieht nach ihm neben dem Fernrohr vorbei, so daß die mit beiden Augen gesehenen Bilder sich decken. Wenn so die direkt gesehene Länge zwischen den Marken n Teile des im Fernrohr gesehenen Maßstabes bedeckt, während die wirkliche Länge N Teile beträgt, so ist die Vergrößerungszahl $m = N/n$.

Die Beobachtung wird erleichtert dadurch, daß man das Fernrohr durch Ausziehen des Okulars so stellt, daß die beiden Bilder bei einer Drehung der Augenaxen sich tunlichst wenig gegen einander verschieben. Kurzsichtige Augen müssen natürlich mit der Brille bewaffnet sein.

2. Innerhalb kürzerer Abstände verfährt man so (v. Waltenhofen): Man stellt das Fernrohr auf große Entfernung ein, befestigt dann vor seinem Objektiv eine ganz schwache dünne Konvexlinse (Brillenglas von etwa 2 m Brennweite) und stellt das so vorgerichtete Fernrohr vor einem Maßstabe derart auf, daß dessen Teile deutlich erscheinen. Man beobachtet wie unter Nr. 1 mit beiden Augen. Decken n im Fernrohr gesehene Teile N mit

bloßem Auge gesehene Teile und beträgt der Abstand des Maßstabes vom Objektiv a, vom Auge A, so ist die Fernrohrvergrößerung gleich

$$\frac{N}{n}\frac{a}{A}.$$

3. Bei Fernrohren mit konvexem Okular läßt sich fast immer folgendes Verfahren anwenden. Nach Einstellung auf unendlich ersetzt man das Objektiv durch eine rechteckige Blende. Durch die noch übrigen Linsen wird dann ein objektives Bild der Blende entworfen, dessen Größe auf einem Glasmaßstäbchen vor dem Okular mit der Lupe gemessen wird. Die wirkliche Größe dividiert durch diese Bildgröße gibt die Vergrößerung.

Die Objektivöffnung selbst kann statt der Blende benutzt werden, wenn ihre Randstrahlen nicht etwa durch Diaphragmen abgehalten werden, was häufig der Fall ist. Eine Blende von eckiger Gestalt läßt dies erkennen.

Beweis für das Kepler'sche Fernrohr. Bei der Einstellung auf unendlich ist der Abstand des Objektivs vom Okular gleich der Summe der Brennweiten $F+f$. Die Blende gibt demnach ein Bild im Abstande $b=(F+f)f/F$ vor dem Okular (S. 293, Gl. 1). Also ist $L/l=(F+f)/b=F/f$. F/f aber gibt bekanntlich die Vergrößerung.

4. Genauer ist das folgende Verfahren (Gauß). Ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr ergibt bei umgekehrtem Strahlengange eine Verkleinerung gleich der Vergrößerung bei gewöhnlichem Gange. Man mißt mit einem Theodolit die Winkelgröße eines sehr entfernten Objektes: erstens direkt, zweitens durch das verkehrt vor den Theodoliten gestellte Fernrohr hindurch. Der Quotient der beiden Winkel ergibt die astronomische Vergrößerung.

Für einen beschränkten Raum läßt sich die Methode folgendermaßen abändern. Dem Okular des auf unendlich eingestellten Fernrohres gegenüber bringe man in wenigstens 1 m Entfernung einen horizontalen Stab mit zwei (besser mehreren) zur Mitte symmetrischen Marken an. Deren gegenseitiger Abstand sei $=a$. In dem vor das Objektiv gesetzten Theodolit mögen diese Marken unter dem Winkel ω erscheinen. Der zugehörige Eintrittswinkel φ ergibt sich daraus, daß die Strahlen von den Marken durch die Okularblende des Fernrohrs (genauer

den Okularkreis) gehen müssen. Ist A der Abstand des Stabes von der letzteren, so hat man $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}a/A$ und die Fernrohrvergrößerung $= \varphi/\omega$.

Statt eines Theodoliten kann auch ein Spektrometerfernrohr dienen; noch vorteilhafter ein mikrometrisch bewegliches Ablesefernrohr mit aufgeklebtem Spiegel, auf den man ein Hilfsfernrohr mit Skale richtet.

5. Aus den Brennweiten und Abständen der Gläser läßt die Vergrößerung sich berechnen. Z. B. ist sie für das Kepler'sche und das Galilei'sche Fernrohr gleich dem Verhältnis der Objektiv- zur Okularbrennweite. Bei der Br.-W.-Bestimmung zusammengesetzter Okulare werden meistens die Methoden **67**, 7b oder 8 zur Anwendung kommen müssen.

Größe des Gesichtsfeldes.

Ist l der wirkliche Abstand zweier an den Enden eines Durchmessers des Gesichtsfeldes gesehener Punkte von einander, a ihre Entfernung vom Fernrohr, so ist die Größe des Gesichtsfeldes in Bogengraden ausgedrückt $= 57{,}3^0 \cdot l/a$.

Zur Messung kann ein entfernter Maßstab dienen. Wenn man nicht über eine große Entfernung verfügt, so setzt man wie bei 2. dem auf unendlich eingestellten Fernrohr eine schwache Sammellinse vor und rückt den Maßstab in die jetzige deutliche Sehweite. a ist dann der Abstand des Maßstabes von der Linse.

III. Mikroskop.

Vergrößerungszahl nennt man hier das Verhältnis des Winkels, unter welchem ein kleiner Gegenstand im Mikroskop gesehen wird, zu dem Winkel, unter welchem er in der Sehweite 25 cm erscheint.

1. Die Bestimmung der Vergrößerung entspricht der unter II 1 angegebenen. Unter das Mikroskop wird ein Objekt von bekannter Länge (Mikrometerteilung) gebracht. 25 cm unter der Okularhöhe legt man einen mm-Maßstab neben das Mikroskop. Während das eine Auge durch das Mikroskop nach dem Objekt sieht, blickt das andere nach dem Maßstab, und nun muß, wie bei II 1, die Projektion des im Mikroskop gesehenen Bildes auf den Maßstab gemessen werden. Bedeckt das Bild N Teile, während der Gegenstand wirklich die Länge von n Teilen hat, so ist N/n die Vergrößerungszahl.

Bequemer bringt man dicht über dem Okular einen kleinen unter 45° geneigten Spiegel an, dessen Belegung in der Mitte weggenommen ist, und stellt 25 cm entfernt seitlich von ihm den Maßstab vertikal auf, so daß mit demselben Auge durch das Spiegelglas hindurch das Bild des Objektes im Mikroskop, und im Spiegel reflektiert das Bild des Maßstabes gesehen wird.

Anstatt mit dem Maßstabe zu vergleichen, kann man das Bild auch auf eine Fläche in 25 cm Abstand vom Auge abzeichnen (projizieren) und nachher ausmessen.

2. **Bei sehr starker Vergrößerung**, wenn das Verfahren 1. versagt, kann man die Formel benutzen: Vergrößerung $= S \cdot T/(f_1 f_2)$. S ist die deutliche Sehweite (25 cm), f_1 und f_2 sind die Brennweiten (**67**, 6 bis 8) des Objektivs und Okulars. T ist die reduzierte Tubuslänge, d. h. der Abstand des unteren Brennpunktes des Okulars vom oberen des Objektivs. Sie wird aus dem gegenseitigen Abstande der Okular- und Objektivfassung im Rohr, unter Rücksichtnahme auf die Abstände der beiden Brennebenen von den Enden der Fassungen erhalten; vgl. **67**, 9.

3. Über **Längenmessung mit dem Mikroskop** vgl. **21**, 4.

4. **Öffnungswinkel und numerische Apertur eines Mikroskop-Objektives.**

Der **Öffnungswinkel** ($2u$) ist der Winkel zwischen den äußersten Strahlen, welche von einem deutlich gesehenen Axenpunkt aus durch das Mikroskop treten können. Die Begrenzung des Strahlenkegels erfolgt in der Regel an der Unterfläche des Objektivs.

Es bezeichne n den Brechungskoeffizienten des Mediums, aus welchem die Strahlen in das Objektiv übergehen, dann heißt $a = n \sin u$ die **numerische Apertur** des Objektivs. Bei Trockensystemen ist $n = 1$, also $a = \sin u < 1$. Bei Immersionssystemen gilt n für die Flüssigkeit (Wasser, Zedernholzöl, Monobromnaphthalin), und hier kann $a > 1$ werden.

Nach Lister kann man die numerische Apertur eines Trockensystems bestimmen, indem man vor dem horizontal (im Dunkeln) aufgestellten Mikroskop eine Kerze verschiebt, bis eine Hälfte des Gesichtsfeldes hell erscheint, und dann symmetrisch zur ersten Kerze eine zweite so aufstellt, daß auch die andere Hälfte gerade erhellt wird. Ist der gegenseitige Abstand der Kerzen e und ihre Ebene um A vom deutlich gesehenen Punkte entfernt, so hat man $\operatorname{tg} u = e/2A$.

Apertometer von Abbe. Dieses mißt auch Aperturen über 1. Einem flachen Halbcylinder aus Glas (9 cm Durchmesser, 1,2 cm Höhe) ist in der Richtung des Durchmessers ein Reflexionsprisma von 45° angeschliffen, während der Mittelpunkt durch eine kleine Öffnung in einem aufgekitteten versilberten Deckgläschen markiert ist. Die obere Fläche trägt 2 Teilungen, dem Öffnungswinkel und der Apertur entsprechend; als Indices dienen 2 rechtwinklig gebogene geschwärzte Messingplättchen.

Das Apertometer wird auf den Tisch des Mikroskopes gesetzt und dieses (ev. nach Einfügung der Immersions-Flüssigkeit) zunächst auf Deutlichsehen der kleinen Öffnung eingestellt. Blickt man nach Herausnahme des Okulars in das Rohr, so sieht man bei schwächeren Objektiven das vom Objektiv entworfene Bildchen der beiden Indices, deren Spitzen man auf den Rand des Gesichtsfeldes einstellt, worauf man an der Teilung abliest.

Bei stärkeren Objektiven wird das Bildchen für Beobachtung mit dem unbewaffneten Auge zu klein. Man benutzt dann ein Hilfsmikroskop, das man bei den Instrumenten von Zeiß durch Einschrauben eines besonderen schwachen Objektives in das untere Ende des Tubusauszugs und Einsetzen eines Okulares herstellt. Bei andern Instrumenten wird man ein geeignetes Objektiv mit einem Kork im Tubusauszug anbringen können.

Von der numerischen Apertur hängt die sog. auflösende Kraft des Mikroskopes ab, d. h. die Größe der kleinsten unterscheidbaren Objekte. Eine Teilung von der Strichweite s wird bei zentraler Beleuchtung noch aufgelöst, falls $s \geqq \lambda/a$; bei günstiger schiefer Beleuchtung, falls $s \geqq \frac{1}{2}\lambda/a$, wo λ die Wellenlänge des Lichtes in Luft ist (Abbe).

Über Sichtbarmachen „ultramikroskopischer" Gegenstände durch intensive Beleuchtung vgl. Siedentopf u. Zsigmondy, Ann. der Ph. 10, 1. 1903.

69. Polarisationswinkel eines Körpers.

Polarisiert (Malus 1808) heißt das Licht, wenn es nicht wie das gewöhnliche ungeordnet allseitig gleich weit schwingt; wir nehmen nach der Elastizitätstheorie von Fresnel an, daß mit der Polarisationsrichtung die kleinste Schwingungskomponente zusammenfällt. Fehlt eine Komponente ganz, d. h. schwingt das Licht nur in einer Ebene, so heißt es vollständig oder geradlinig polarisiert.[1] Den einfachsten Zustand unvollständiger Polarisation gibt das elliptisch polarisierte Licht, bei dem die Ätherteilchen

---

1) Nach der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie liegen dann in der Polarisationsebene die magnetischen, senkrecht zu ihr die elektrischen Schwingungen (Wiener). Wir folgen den Anschauungen und dem Sprachgebrauch der Elastizitätstheorie des Lichtäthers.

Ellipsen beschreiben. Sind die Ätherbahnen Kreise, so heißt das Licht zirkular polarisiert.

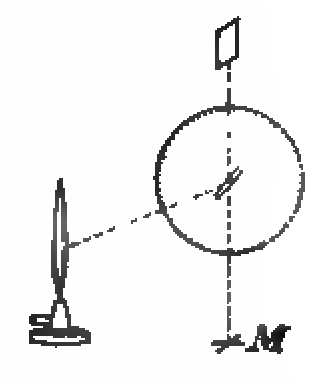
Durch Reflexion an durchsichtigen Körpern (vgl. 71a II und ebendort auch Metallreflexion) wird das gewöhnliche Licht im allgemeinen in teilweise polarisiertes verwandelt, indem vorwiegend die der spiegelnden Fläche parallele Komponente reflektiert wird. Das eindringende Licht ist also senkrecht zur Einfallsebene polarisiert, aber niemals vollständig. Das zurückgeworfene Licht ist in der Einfallsebene polarisiert, und zwar vollständig bei demjenigen Einfalls- oder Reflexionswinkel, für welchen der eindringende und der zurückgeworfene Strahl auf einander senkrecht stehen. Hieraus folgt, wenn ω diesen „Polarisationswinkel" und n das Lichtbrechungsverhältnis des Spiegels bedeutet,

$$n = \operatorname{tg} \omega.$$

Ist n bekannt, so kann ω hiernach berechnet werden; für Glas vom B.-V. 1,5 ist $\omega = 56°$. Umgekehrt ergibt sich n, wenn ω gemessen ist; große Genauigkeit ist dabei aber nicht zu erwarten.

Um die Erscheinung zu sehen, beleuchtet man den Spiegel mit einer in der Einfallsebene hinreichend ausgedehnten Lichtquelle, etwa durchscheinendem Papier vor einer Flamme oder, wenn die Einfallsebene vertikal steht, mit einer langen Gasflamme aus einem Spitzbrenner, und beobachtet das reflektierte Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsrichtung (größere Diagonale) senkrecht zur Einfallsebene des Lichtes liegt. Bei richtiger Stellung erscheint im Gesichtsfeld ein verwaschener dunkeler Streifen; die der Mitte des letzteren entsprechende Visierrichtung bildet mit der Spiegelnormalen den Polarisationswinkel.

An einem festen Körper kann man ω messen, indem man ihn an der Drehaxe eines Goniometers (60, 61) oder des Totalreflektometers (63 II) befestigt, die spiegelnde Fläche mit der Axe zusammenfallend. Durch einen feststehenden Nicol, dessen größere Diagonale der Drehaxe parallel ist, visiert man die Fläche mit dem Fernrohr an oder auch mit bloßem Auge, dessen Sehrichtung durch eine Marke M hinter dem (durchsichtigen) Körper fixiert ist, und dreht die Fläche so,



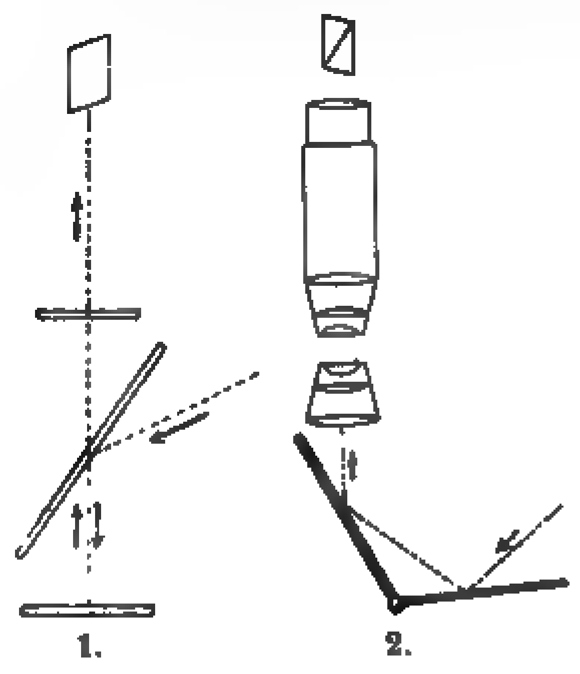
daß der dunkele Fleck in die Visierrichtung kommt. Nachdem die Teilung abgelesen ist, stellt man die Lichtquelle symmetrisch auf die andere Seite, dreht die Fläche ebendahin, sucht wieder den dunkelen Fleck und dreht, bis er abermals in der Visierrichtung liegt. Die Drehung zwischen den beiden Stellungen beträgt 2ω. Die Anordnung mit einem Vertikal-Goniometer s. Fig. Bei der zweiten Einstellung kommt die Flamme rechts zu stehen.

Flüssigkeitsoberflächen kann man so nicht behandeln. Sie müssen mit einer vertikal drehbaren Visiervorrichtung mit Nicol angesehen werden. ω ist der Neigungswinkel der Richtung, in welcher die verdunkelte Stelle erscheint, gegen die Vertikale. Behufs genauer Messung kann man die Flüssigkeit und die Lichtquelle einmal links, das andere Mal rechts stellen und so 2ω bestimmen.

70. Polarisationsapparat. Untersuchung doppelbrechender Körper. Kristalle.

Polarisationsapparat.

So heißt eine Verbindung von zwei das Licht polarisierenden Vorrichtungen. Die dem Auge zugewandte Polarisationsvorrichtung heißt Analysator, die andere wohl Polarisator schlechtweg. Polarisatoren sind Nicol'sche Prismen (deren Polarisationsrichtung mit ihrer größeren Diagonale zusammenfällt); oder unbelegte Glasplatten oder Sätze aus solchen, auch wohl schwarze Glasplatten, an denen man das Licht unter dem Polarisationswinkel (von etwa 56°) spiegeln läßt; oder Sätze von auf einander gelegten Glasplatten, durch welche das Licht unter dem genannten Neigungswinkel hindurch geht; oder Turmalinplatten, die vorzugsweise eine Schwingungskomponente absorbieren. Die beiden letztgenannten Mittel polarisieren unvollständig. — Doppelbrechende Prismen (Kalkspat, Quarz) zerlegen das Licht in zwei senkrecht zu einander schwingende Strahlen; die gleichzeitige Farbenzerstreuung kann durch ein angekittetes Glasprisma, oder auch Kristallprisma von anders orientierter Axenrichtung (Rochon, Wollaston), aufgehoben sein.



Der gewöhnliche, durch sein breites Gesichtsfeld angenehme Nörrenberg-sche Pol.-Apparat (Fig. 1) benutzt als Polarisator eine durchsichtige Glasplatte, die um 56° gegen die Horizontale geneigt ist. Schräg einfallendes Tageslicht wird polarisiert nach unten auf einen horizontalen Spiegel reflektiert, der es nach oben zurückwirft und nach einem, allerdings mit einer Schwächung verbundenen Durchgang durch die schräge Glasplatte dem Analysator zuführt, in der Figur einem Nicol'schen Prisma. Auf die horizontale Glasplatte kommt der Kristall usw.

Für manche Zwecke bedarf man Lichtes von mannigfaltiger Richtung im Kristall (eines „großen Gesichtsfeldes"). Dann werden zwischen den

Kristall und die Polarisatoren Konvexlinsen eingeschaltet (Nörrenberg'sches Polarisationsmikroskop, Fig. 2). Der äußere Spiegel mit Metallbelegung dient nur zur Beleuchtung und wird dem Orte der Lichtquelle entsprechend gestellt. Der andere, ein Satz unbelegter Glasplatten, muß die vorgeschriebene Neigung haben. Statt dessen kann auch unten ein Nicol vorhanden sein. — Zur Beobachtung kleiner Körper im polarisierten Lichte unter dem gewöhnlichen Mikroskop bringt man zwischen Beleuchtungsspiegel und Körper ein Nicol'sches Prisma und legt ein zweites auf das Okular des Mikroskops.

Vgl. hierzu Klein, Berl. Sitzber. 1893, 221. — Über Polarisationsinstrumente überhaupt z. B. Groth oder Liebisch, Kristallographie. Eingehende Regeln zur Unterscheidung der Kristalle unter dem Mikroskop s. z. B. Lehmann, Molekularphysik I 295. 1888.

Meistens gebraucht man den Polarisationsapparat mit „gekreuzten Polarisationsvorrichtungen", wobei das Gesichtsfeld dunkel erscheint. Die beiden, in diesem Falle auf einander senkrechten Polarisationsebenen der Vorrichtungen sollen „Hauptebenen" des Apparates heißen.

I. Untersuchung doppelbrechender Körper.

Ein Körper bricht das Licht einfach, wenn er amorph oder regulär kristallisiert ist; doppelt, wenn er einem nicht regulären Kristallsysteme angehört oder aus anderen Ursachen, wie Druck, Zug, rasche Kühlung, nach verschiedenen Richtungen ungleich beschaffen ist. Das Licht zerlegt sich hierbei in zwei Wellenzüge, welche senkrecht zu einander polarisiert sind. Aus der ungleichen Fortpflanzungsgeschwindigkeit der beiden Schwingungen entsteht sowohl die Doppelbrechung, wie im Polarisationsapparat, sobald die Schwingungen sich nach dem Austritt aus einer Kristallplatte wieder zu einer Welle vereinigt haben, die Interferenz. Denn diese Welle hat im allgemeinen einen anderen Polarisationszustand, als vor dem Eintritt in den Kristall, so daß durch dessen Einbringen in den Apparat das Gesichtsfeld verändert wird. Vgl. 71a I.

Es gibt in jedem Körper — von drehenden (71) abgesehen — mindestens eine Richtung, in der eine Lichtwelle unzerlegt fortgepflanzt wird; sie heißt optische Axe. Im amorphen Körper oder einem Kristall des regulären Systems ist in diesem Sinne jede Richtung eine optische Axe. Die anderen Körper haben entweder eine oder zwei optische Axen.

Über die Messung von Lichtbrechungsverhältnissen vgl. 63.

Über Schleifen und Polieren von Kristallplatten s. 8, 17.

Ob ein durchsichtiger Körper einfach oder doppelt bricht, erkennt man am besten mit gekreuzten Polarisatoren. Einfach brechende Körper lassen das Gesichtsfeld dunkel, mit Ausnahme der meistens flüssigen Körper, welche das Licht drehen, ohne Doppelbrechung gewöhnlicher Art zu besitzen (71). Ein doppelbrechender Körper erhellt, bez. färbt im allgemeinen das Gesichtsfeld.

Aufsuchen der Schwingungsrichtungen des Lichtes in einer Platte aus einer doppelbrechenden Substanz. Man bringt die Platte zwischen die gekreuzten Polarisationsvorrichtungen. Wenn die Mitte immer dunkel bleibt, so zeigt dies an, daß die Platte senkrecht zur optischen Axe geschnitten ist. Sonst hat sie stets zwei um 90° verschiedene Lagen, bei denen das Gesichtsfeld bez. die Mitte des Feldes dunkel bleibt. In diesen Stellungen fallen die Schwingungsrichtungen der beiden die Platte durchsetzenden Wellenzüge in die Hauptebenen des Apparates. — Vgl. **71a** I.

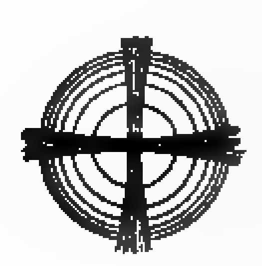
Herstellung von Komplementärfarben. In jeder anderen Stellung ist das Gesichtsfeld mehr oder weniger erhellt, bez. es treten in hinreichend dünnen Platten (Gipsblättchen) Farben auf, die von der Dicke abhängen und dadurch entstehen, daß die verschiedenen im weißen Licht enthaltenen Farben wegen ihrer ungleichen Wellenlängen und Fortpflanzungsgeschwindigkeiten vermöge der Interferenz ungleich stark austreten. Am intensivsten ist die Färbung in der gegen die Dunkelstellung um 45° gedrehten Lage der Platte. Stellt man nun durch Drehen einer der Polarisationsvorrichtungen um 90° auf helles Gesichtsfeld ein, so wird die ganze Erscheinung, also auch die Farbe, an jeder Stelle genau komplementär. — Ein doppelbrechendes Prisma (S. 306) als Analysator zeigt die komplementären Erscheinungen gleichzeitig neben einander.

II. Einaxige Kristalle.

Zu diesen gehören die Kristalle des hexagonalen und des quadratischen Systems. Die Richtung der optischen Axe fällt mit der kristallographischen Hauptaxe zusammen. Eine Ebene, welche die optische Axenrichtung enthält, heißt ein Hauptschnitt. Beispiele sind Kalkspat, Natronsalpeter, Turmalin, Blutlaugensalz, Eis, Quarz. Über letzteren vgl. aber 71.

Von den beiden Schwingungen, in welche das einen einaxigen Kristall durchsetzende Licht zerfällt, folgt die eine dem gewöhnlichen Brechungsgesetz (ordentlicher Strahl); sie findet stets zur optischen Axe, also zu dem durch den ord. Strahl gelegten Hauptschnitt senkrecht statt (ist „nach dem Hauptschnitt polarisiert"). Eine der oben festgestellten Schwingungsebenen enthält also die optische Axe des Kristalls. Die andere Schwingung fällt in einen Hauptschnitt.

Ringfiguren. Eine zur optischen Axe senkrecht geschnittene Platte werde zwischen die gekreuzten Polarisationsvorrichtungen gebracht. Die Mitte bleibt stets dunkel. In einem Apparat mit größerem Gesichtsfelde — Turmalinzange, Polarisations-Mikroskop — erstreckt sich diese Dunkelheit von der Mitte in die beiden Hauptebenen des Apparates (dunkeles Kreuz); die vier Quadranten sind von Ringen durchsetzt, welche im einfarbigen Lichte (rotes Glas vor das Auge halten!)



abwechselnd hell und dunkel, im weißen Lichte gefärbt erscheinen. Lichtdrehende Körper (Quarz) zeigen das dunkele Kreuz im allgemeinen nicht.

Je enger die Ringe beisammen liegen, desto größer ist bei gleich dicken Platten die „Doppelbrechung", d. i. der Unterschied der Lichtgeschwindigkeiten des ordentlichen und des außerordentlichen Strahles.

Durch Drehung des Analysators um 90° entsteht an jedem Punkte der komplementäre Zustand; das Kreuz wird hell, rote Ringe werden grün, blaue gelb usw.

Unterscheidung positiver und negativer Kristalle.

Ein Kristall, welcher den außerordentlichen Strahl stärker bricht (langsamer fortpflanzt) als den ordentlichen, heißt positiv und umgekehrt.

Man erkennt das Vorzeichen mit einer sog. Viertelwellen-Glimmerplatte, d. h. einer so dicken Platte, daß die beiden Schwingungen einen Gangunterschied von $\frac{1}{4}$ Wellenlänge erfahren (**71 a** I). Die Glimmerplatte legt oder hält man zwischen die Kristallplatte und den Analysator, und zwar so, daß die in der Regel durch einen Pfeil bezeichnete Ebene der optischen Axen der Glimmerplatte um 45° gegen die Hauptebenen des Apparates gedreht ist. Dann zeigt die zu untersuchende Kristallplatte nicht mehr das schwarze Kreuz mit den gleichen Ringquadranten, sondern die Ringstücke sind in benachbarten Quadranten gegen einander verschoben, und in der Nähe des nunmehr hellen Mittelpunktes sind zwei dunkele Flecke entstanden. Liegen diese Flecke in der optischen Axenebene der Glimmerplatte, so ist der Kristall negativ und umgekehrt.

Das Glimmerplättchen läßt sich leicht in erforderlicher Dicke abspalten. Man erkennt seine Brauchbarkeit und die Richtung seiner optischen Axenebene am einfachsten dadurch, daß man es einmal auf einen bekannten Kristall (Kalkspat, negativ) anwendet. Die Axenebene des Glimmers läßt sich auch aus seiner Lemniskatenfigur (S. 311) bestimmen.

Obige Erscheinung erklärt sich unter Zugrundelegung der Fresnel'schen Hypothese in folgender Weise: angenommen, die Kristallplatte sei negativ, also von den den Kristall schräg durchsetzenden Strahlen pflanzen sich die außerordentlichen, d. i. die im Apparate radial schwingenden, rascher fort als die ordentlichen, peripherisch schwingenden Strahlen. In einer gewissen geneigten Richtung, d. h. an der Kristallfigur in einer gewissen Entfernung vom Mittelpunkte, welche innerhalb des ersten dunkelen Ringes liegen muß, wird der radial schwingende Strahl dem anderen im Kristall

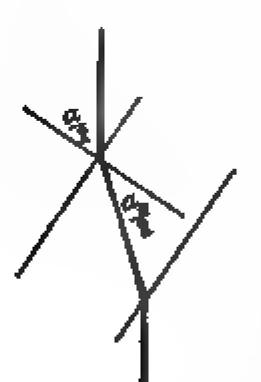
um $\frac{1}{4}\lambda$ vorauseilen; denn dem ersten dunkelen Ringe entspricht ja ein Gangunterschied von $\frac{1}{2}\lambda$.

Nun pflanzt eine Glimmerplatte einen sie durchsetzenden Strahl, wenn er in der Axenebene schwingt, am langsamsten fort; unsere Viertelwellenplatte verzögert also die in ihrer Axenebene schwingende Lichtkomponente gegen die andere um $\frac{1}{4}\lambda$. Faßt man nun von den oben genannten Strahlen, deren radiale Komponente im Kristall um $\frac{1}{4}\lambda$ vorausgeeilt war, diejenigen ins Auge, welche in der Axenebene der Glimmerplatte liegen, so sieht man, daß hier der Gangunterschied im Kristall durch die Glimmerplatte aufgehoben wird, das Gesichtsfeld also seine natürliche Beschaffenheit d. h. Dunkelheit haben muß. Daher entstehen die beiden dunkelen Flecke in der Axenebene der Glimmerplatte.

Daß ein positiver Kristall sich umgekehrt verhalten muß, folgt von selbst. — Zugleich übersieht man leicht, daß die Durchmesser der Ringe in zwei Quadranten um $\frac{1}{4}$ Ringabstand vergrößert, in den anderen beiden Quadranten um ebensoviel verkleinert sein müssen.

III. Zweiaxige Kristalle. Optischer Axenwinkel.

Ein Kristall aus dem rhombischen oder einem schiefaxigen System hat zwei optische Axen, deren gegenseitige Neigung der innere optische Axenwinkel α_0 heißt. Der Kristall besitzt, entsprechend der Elastizität des Äthers nach den drei auf einander senkrechten optischen Elastizitätsaxen [1]) (die im rhombischen System natürlich mit den kristallographischen Axen zusammenfallen) drei Hauptbrechungsverhältnisse, die nach ihrer Größe geordnet n_1, n_2, n_3 heißen mögen. Die optischen Axen liegen in der durch die Axen der größten und der kleinsten Elastizität gehenden Ebene. Sie bilden im Kristall mit der Axe der größten Elastizität je den Winkel $\frac{1}{2}\alpha_0$, gegeben durch die Beziehung



$$\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha_0 = \frac{n_1^2}{n_2^2}\cdot\frac{n_2^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2} \quad \text{oder} = \frac{1-(n_3/n_2)^2}{1-(n_3/n_1)^2}.$$

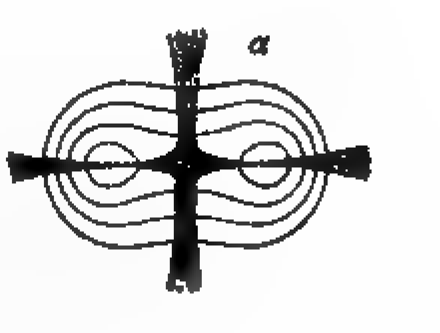
Wenn $\alpha_0 < 90^0$, so heißt der Kristall positiv und umgekehrt.

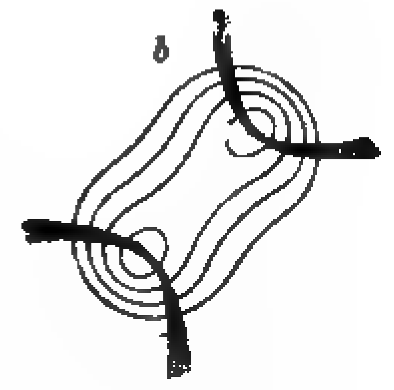
Der äußere Axenwinkel α, d. h. der Winkel der Strahlen, deren Schwingungen im Kristall sich nach den Richtungen der beiden optischen Axen fortgepflanzt haben, ist gegeben durch $\sin\frac{1}{2}\alpha = n_2 \cdot \sin\frac{1}{2}\alpha_0$; s. Figur.

Beispiele: Kalisalpeter, Arragonit, Topas, Glimmer, Gips, Baryt, Kupfervitriol

Ringfiguren. Aus einem optisch zweiaxigen Kristall sei eine zur Mittellinie der beiden Axen senkrechte Platte geschliffen. Im gekreuzten Polarisationsapparat liefert die Platte, wenn das Gesichtsfeld hinreichend groß ist, eine Figur, im homogenen Licht (gefärbte Gläser vorhalten!) aus hellen und dunkelen, im weißen Licht aus gefärbten Lemniskaten,

1) In der Sprache der elektromagnetischen Lichttheorie: nach den drei Hauptrichtungen der Dielektrizitätskonstante.

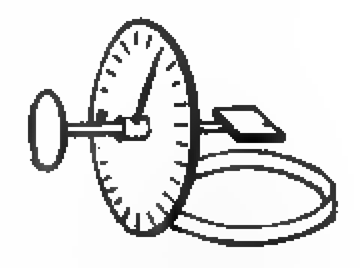




welche von einem dunkelen Kreuz oder von hyperbolischen dunkelen Ästen durchzogen sind. Die beiden Punkte in den dunkelen Ästen, um welche sich die Lemniskaten zusammenziehen, bezeichnen die optischen Axen des Kristalles. Fällt die Verbindungslinie der beiden Axenbilder mit einer Hauptebene des Apparates zusammen, so erscheint das dunkele Kreuz (*a*). Dreht man die Kristallplatte von hier aus um 45°, so erscheinen hyperbolische Äste symmetrisch gegen die Lemniskaten (*b*)

Optischer Axenwinkel.

Eine kleine Meßvorrichtung (Fig.), bestehend aus einem geteilten Kreis, an dessen Drehungsaxe die Kristallplatte mit Wachs oder mit einem Kork befestigt wird und die mit einem Ring auf den unteren Teil des Nörrenbergschen Apparates aufgesetzt wird, ist leicht herzustellen. Besondere Axenwinkelapparate nach v. Lang und nach Groth; auch Kristallpolymeter von Klein (Fueß'sche Werkstätte).



Man markiert an der Kristallplatte die zur Verbindungslinie der optischen Axenbilder senkrechte Richtung und befestigt die Platte dann an der Drehaxe des Teilkreises, so daß diese Richtung in der Drehaxe liegt.

Zur Einstellung der Axenrichtungen ist Fig. *b* am geeignetsten; man hat die beiden gekreuzten Hauptebenen des Polarisationsapparates also symmetrisch um 45° geneigt gegen die Drehaxe zu machen. Nun stellt man eins von den optischen Axenbildern (Scheitelpunkt der Hyperbel) in die Visierrichtung des Apparates (Fadenkreuz) ein und liest die Kreisteilung ab. Der Winkel α, um welchen man alsdann drehen muß, damit der andere Scheitelpunkt in die Visierlinie des Apparates fällt, ist der **scheinbare** oder **äußere** optische Axenwinkel, d. h. der Winkel der Strahlen, deren Wellen den Kristall in der Richtung der Axen durchlaufen haben, nach ihrem Austritt in die Luft.

Den wirklichen Winkel α_0 im Kristall erhält man (vgl. Fig. S. 310) aus dem scheinbaren α und dem mittleren Hauptbrechungsverhältnis n_2 (vgl. vor. S.) mittels der Beziehung $\sin \frac{1}{2} \alpha_0 = (\sin \frac{1}{2} \alpha) : n_2$.

Bei weiter auseinander stehenden Axen erscheint natürlich nur eine Axe zur Zeit im Gesichtsfeld. Wenn der Winkel noch größer ist, so kann es vorkommen, daß wegen der Brechung und der totalen Reflexion überhaupt kein Licht, welches die Platte in der Richtung der Axen durchlaufen hat, in die Luft austritt. In diesem Falle kann man die Messung innerhalb einer Flüssigkeit ausführen, die von zwei ebenen, zur Sehlinie senkrechten Glasflächen begrenzt wird. Das Verfahren ist im übrigen das nämliche wie vorhin. Der hier beobachtete Axenwinkel sei α', so findet man α, wenn N das Brechungsverhältnis der Flüssigkeit ist, aus der Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}\alpha = N \sin \tfrac{1}{2}\alpha'.$$

Da der Axenwinkel von der Farbe abhängt, so verlangt die genaue Messung eine bestimmte Lichtsorte, z. B. das Licht der Natriumflamme oder auch des roten Kupferglases, welches man vor das Auge hält. Der Unterschied der Axenwinkel in verschiedenen Farben heißt Axendispersion für diese Farben.

Brechungsverhältnis N einer Flüssigkeit. Eins der einfachsten Mittel, dieses zu bestimmen, ist die Messung eines und desselben Axenwinkels (z. B. Baryt) in der Luft α und in einer Flüssigkeit α'. Es gilt dann die vorige Gleichung.

71. Optisches Drehvermögen. Saccharimetrie (Arago und Biot 1811—1819).

Wird das dunkele Gesichtsfeld eines Polarisationsapparates (70) hell durch das Einschieben eines durchsichtigen Körpers, so ist dieser entweder doppelbrechend oder er dreht die Schwingungsebene des polarisierten Lichtes. Ein Körper letzterer Art heißt „optisch aktiv"; man nennt ihn „rechts drehend", wenn die Schwingungsebene des Lichtes sich im umgekehrten Sinne des Korkziehers verschiebt, d. h. wenn dieselbe dem empfangenden Auge in der Richtung des Uhrzeigers gedreht erscheint.

Spezifische Drehung $[\alpha]$ nennt man bei festen Körpern (Kristallen) den Drehungswinkel für die Längeneinheit des durchstrahlten Körpers. Bei Flüssigkeiten und Lösungen aktiver Körper in einem inaktiven Lösungsmittel bezieht man die Drehung auf die Masseneinheit des drehenden Körpers. Enthält die Flüssigkeit in 1 cm³ die Masse k gr des Körpers und gibt die Schicht von der Länge l den Drehwinkel α, so ist die spez. Drehung also $[\alpha] = \alpha/(lk)$. Hat eine Lösung das spez. Gewicht s und den Prozentgehalt p des Stoffes, so daß $k = \frac{1}{100} ps$ ist, so wird also $[\alpha] = 100\,\alpha/(lps)$. Als Normaltemperatur wird gewöhnlich 20° gewählt. Die spez. Drehung pflegt sich mit wachsender Konzentration der Lösung

etwas zu verändern, was man in zugefügten Korrektionsgliedern darstellt. Molekulares Drehvermögen heißt die spez. Drehung multipliziert mit dem Molekulargewicht des Körpers.

Die Drehung hängt stark von der Farbe ab; brechbareres Licht wird stärker gedreht; „Dispersion" der Drehung. — Über Beobachtung mit spektral zerlegtem Licht vgl. den Schluß. Farbige Lichtquellen in 59a.

Zuckerlösungen. Diese werden am häufigsten untersucht. Die spez. Drehung des in Wasser gelösten Rohrzuckers ist für Natriumgelb $= 66{,}5°/\text{dm}$, d. h. der Drehwinkel α durch eine l dm lange Schicht einer Lösung, welche in 100 cm³ s gr Zucker enthält, beträgt in Bogengraden

$$\alpha = 0{,}665° \cdot s\,l, \quad \text{woraus } s = 1{,}504\,\alpha/l.$$

Für das weiße Licht im Mittel pflegt gesetzt zu werden

$$\alpha = 0{,}71° \cdot s\,l, \quad \text{woraus } s = 1{,}41\,\alpha/l.$$

Streng genommen wächst die Drehung mit dem Zuckergehalte der Lösung ein wenig verzögert an. Genauer ist für Natronlicht bei 20° (Schmitz und Tollens) nach der Berechnung von Landolt

$$\alpha = (0{,}6667\,s - 0{,}000095\,s^2)\,l \quad \text{oder} \quad s = 1{,}500\,\frac{\alpha}{l} + 0{,}00032\left(\frac{\alpha}{l}\right)^2.$$

Von der Temperatur hängt die Drehung in Rohrzuckerlösungen sehr wenig ab. Gilt $[\alpha_{20}]$ für 20°, so ist für eine andere Temperatur t (Schönrock)

$$[\alpha_t] = [\alpha_{20}]\,[1 - 0{,}000217\,(t - 20)].$$

Quarz. Das spez. Drehvermögen in der Richtung der Axe ist für Natronlicht bei der Temperatur t gleich $21{,}72\,[1 + 0{,}00015\,(t - 20)]$ (Gumlich); für die grüne Quecksilberlinie gleich $25{,}52\,[1 + 0{,}00018\,(t - 15)]°/\text{mm}$ (Macé de Lépinay).

Setzt man die Drehung für Natrongelb gleich Eins, so stellen sich die Drehungen für die anderen Farben, bei Quarz und Zucker fast genau in gleichem Verhältnis, im Mittel etwa folgendermaßen dar:

Mittleres	Rot	Gelb	Grün	Blau	Violett
Drehung =	$^3/_4$	1	$^4/_3$	$^5/_3$	$^9/_4$

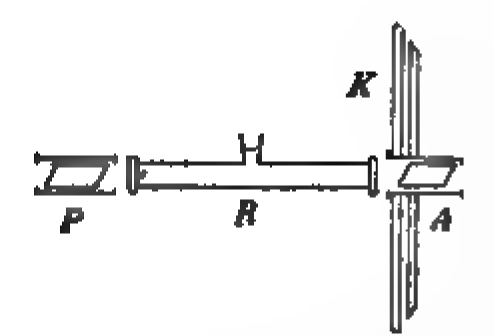
Hiernach kann man mit Hilfe der für Natrongelb gegebenen Zahlen die Färbungen übersehen. Genauere Angaben für Quarz s. Tab. 24.

Das Drehvermögen d kann als Funktion der Wellenlänge λ (Tab. 22) durch den Ausdruck $d = a/\lambda^2 + b/\lambda^4$ dargestellt werden.

Die eingehendste Behandlung der drehenden Körper, der Methoden und Apparate bei Landolt, Optisches Drehungsvermögen, 2. Aufl. 1898; Zahlenmaterial ferner in Landolt u. Börnstein, Tabellen.

I. Polarimeter mit drehbarem Nicol.

1. Mitscherlich 1811. Das Instrument besteht aus dem festen polarisierenden Nicol P und dem auf dem Teilkreise K drehbaren analysierenden Okular-Nicol A. Ein weitsichtiges Auge verlangt außerdem eine schwache Lupe vor A oder die Brille.



Man stellt eine Natronflamme hinter dem Instrument vor einem schwarzen Schirm auf. Das von dem Leuchtgase herrührende bläuliche Licht wird durch gelbes Glas oder eine Lösung von Kaliumbichromat beseitigt.

Man bringt eine mit Wasser gefüllte Röhre *R* zwischen die Nicol'schen Prismen und dreht den Okular-Nicol so, daß die Mitte des Gesichtsfeldes dunkel erscheint. Darauf wird die mit der Flüssigkeit bez. der Lösung gefüllte Röhre eingeschoben, wodurch das Gesichtsfeld in der früheren Kreisstellung hell wird. Die Anzahl Grade, um welche man den Okular-Nicol drehen muß, damit wieder die Mitte dunkel wird, ist der Winkel α; Drehung im Sinne des Uhrzeigers bedeutet Rechtsdrehung.

Die Deckplatten der Röhren darf man nicht zu fest anschrauben, weil die sonst entstehende Doppelbrechung des Glases die Einstellung stört. — Die Lösung soll klar, ev. filtriert, und sehr gleichmäßig gemischt und temperiert sein.

Der Nullpunkt der Drehung läßt sich dadurch auf den Nullpunkt der Teilung bringen, daß man einen der Nicol in seiner Fassung dreht.

Den Drehwinkel eines festen Körpers, z. B. einer zur Axe senkrecht geschnittenen Quarzplatte, mißt man ebenso wie oben, indem man den Körper zwischen die beiden Nicol bringt, wobei die Röhre zum Abblenden äußeren Lichtes dienen kann. Die optische Axe des Quarzes muß genau in der Visierrichtung liegen, wenn man nicht großen Täuschungen ausgesetzt sein will. Man orientiert die Platte nach dem Spiegelbilde des eigenen Auges oder einer kleinen vor das Auge gehaltenen Flamme; die Axenrichtung sei mit dem Polarisationsmikroskop (S. 306) kontrolliert.

Genaueres bei Brodhun u. Schönrock, ZS f. Instr. 1902, 353.

Auch mit weißem Licht läßt sich eine genäherte Messung ausführen. Weil die einzelnen Farben verschieden stark gedreht werden, so entsteht hier nach Einbringen des drehenden Körpers kein Dunkel mehr, sondern ein Wechsel von Farben. Man stellt auf die „empfindliche Farbe" ein, in welcher das Gelb ausgelöscht ist, d. h. auf ein Violett, welches den ziemlich schroffen

Übergang von Blau in Rot bildet. Für die Berechnung gilt bei Zuckerlösungen die Konstante 1,41 (S. 313).

Sollte man unsicher sein, ob der Winkel größer oder kleiner als 180° ist, so beobachte man mit rotem Lichte (Kupferglas) und mit Natrongelb. Die beiden Drehungen verhalten sich durchschnittlich etwa gelb : rot = 5 : 4.

Einen Zweifelfall, ob ein Körper links oder rechts dreht, entscheidet man mit weißem Lichte, nämlich danach, daß in dem richtigen Sinne der Drehung des Okulars der empfindliche Farbenwechsel von blau nach rot stattfindet.

Abänderungen des Mitscherlich'schen Polarimeters zum Zwecke schärferer Einstellung.

Man beachte, daß ein Fernrohrauszug zum Deutlichsehen verstellt werden muß, wenn Flüssigkeiten und Luftschichten wechseln.

2. Doppelquarzplatte. Zwei neben einander stehende, gleich dicke links und rechts drehende Quarzplatten, am günstigsten 3,75 mm dick, werden zwischen *P* und *R* (Fig.) eingesetzt, genau senkrecht zur Sehlinie.

Bei gekreuzten wie bei parallelen Nicol erscheinen beide Platten im Natronlicht gleich hell, im weißen Licht gleich gefärbt. Platten von 3,75 mm zwischen parallelen Nicol geben die violette sog. empfindliche Farbe und sind auch im Natronlicht, welches sie um etwa 80° drehen, sehr empfindlich.

Nach dem Einbringen einer drehenden Substanz erscheinen beide Hälften ungleich. Den Drehwinkel α der Substanz findet man als den Winkel, um den man nachdrehen muß, um die Gleichheit wieder herzustellen. Ist die Drehung beträchtlich, so verhindert die Farbenzerstreuung weißen Lichtes eine vollständige Gleichheit der Doppelplatte, so daß man auf Natronlicht usw. angewiesen ist.

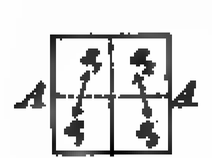
3. Polaristrobometer (Wild). Hier entstehen vermöge einer eingeschobenen Savart'schen Platte (zwei Quarze oder Kalkspate unter 45° gegen die Axe geschnitten, mit rechtwinklig gekreuzten Hauptschnitten) Streifen im Gesichtsfeld, welche bei homogenem Licht hell und dunkel, bei weißem Licht farbig sind. Das Okular wird zunächst so weit herausgezogen, daß diese Streifen möglichst scharf erscheinen.

Die polarimetrische Einstellung geschieht auf das Ver-

schwinden der Streifung in der Mitte des Gesichtsfeldes, welches in vier je um 90° verschiedenen Stellungen mit gleicher Empfindlichkeit eintritt, falls die Hauptschnitte des Polarisators und der Savart'schen Platte auf die gegenseitige Neigung von 45° fixiert sind. An neueren Instrumenten ist diese Neigung variabel gemacht. Dadurch kann die Empfindlichkeit in einem Quadrantenpaare — auf Kosten des anderen — gesteigert werden. Dann benutzt man natürlich nur das empfindlichere (dunklere) Paar.

Die Instrumente haben häufig noch eine zweite Kreisteilung, welche bei Anwendung einer 200 mm langen Röhre direkt den Gehalt von 1 Liter einer Lösung an gr Zucker ergibt.

Halbschattenapparate. Das Gesichtsfeld ist in zwei Hälften geteilt, in denen beiden sich polarisiertes Licht, aber von verschiedenen Schwingrichtungen s_1 und s_2 (Fig.) befindet. Nullpunkt der Stellung des Analysators ist diejenige Stellung, in welcher die beiden Hälften gleich hell erscheinen, d. h. in welcher die Schwingungsebene A des Analysators gleiche Winkel mit den Schwingungsebenen in den beiden Hälften des Gesichtsfeldes bildet.



Die größte Empfindlichkeit des relativen Helligkeitswechsels entsteht, wenn die Richtungen s_1 und s_2 sich wenig von einander unterscheiden und die Richtung A den stumpfen Winkel zwischen ihnen halbiert; vgl. Fig. Doch ist der Kleinheit der Neigung $s_1 s_2$ durch die abnehmende Lichtstärke eine Grenze gesetzt. Man probiert die für die Lichtstärke und für die Durchsichtigkeit des Körpers, dessen Drehung gemessen werden soll, günstigste Stellung aus.

Der Nullpunkt ist immer erst nach dieser Regulierung zu bestimmen.

Nach Einschieben des drehenden Körpers wird wieder auf gleiche Helligkeit eingestellt. α ist der Winkel, um den gedreht werden muß, um die gleiche Helligkeit der beiden Hälften wieder herzustellen.

In neuester Zeit werden auch Instrumente mit mehr als zweiteiligem Gesichtsfelde konstruiert, bei denen der Kontrast der Helligkeiten die Genauigkeit der Einstellung vergrößert.

4. Halbschattenapparat nach Laurent. Man beleuchtet mit Natriumlicht. Die Hälfte des Gesichtsfeldes ist vor dem Polarisator von

einer Kristallplatte bedeckt (Glimmer- oder Quarzplatte, parallel zur Axe geschnitten), welche die beiden Schwingungskomponenten, in die der Strahl bei dem Eintritt in die Kristallplatte zerfällt (Fig. *a*), um eine halbe Wellenlänge gegen einander verschiebt. Bei dem Austritt (Fig. *b*) setzen sich beide Komponenten wieder zu einer einzigen Welle zusammen, deren Schwingungsebene also gegen die des eintretenden Strahles gedreht ist, so daß aus der belegten und der unbelegten Hälfte, ähnlich wie bei dem Doppelquarz, Strahlen von verschiedener Schwingungsrichtung heraustreten. Vgl. 71a I.

5. Halbschattenapparat nach Lippich. Das Licht durchläuft zuerst ein größeres Polarisationsprisma mit geraden Endflächen (Glan'sches Prisma), dann ein zweites ähnliches, welches nur das halbe Gesichtsfeld einnimmt. Ersteres ist mit Hilfe eines Hebelarms um seine Längsaxe drehbar, so daß der Winkel zwischen den beiden Polarisationsebenen verändert und dadurch die größte Empfindlichkeit bewirkt werden kann. Erst dann wird der Nullpunkt bestimmt.

Die Beobachtung erfordert homogenes Licht, welches aber beliebige Wellenlänge haben kann.

6. Ein Cornu-Jellet'sches Prisma, d. h. ein Kalkspat, der nach einer Richtung, die von der Normalen auf dem Hauptschnitt ein wenig abweicht, zerschnitten und in entgegengesetzter Lage wieder verkittet ist, gibt gleichfalls zwei Hälften des Gesichtsfeldes, auf deren gleiche Helligkeit man einstellt.

II. Bestimmung eines Drehvermögens im Spektrum.

Beleuchtet man den Polarisationsapparat (Mitscherlich) mit gemischtem Licht (Sonne), so kann man das durchgegangene Licht mit einem Spektralapparat zerlegen. Die gekreuzte Stellung der Nicol zeigt sich darin, daß das ganze Spektrum dunkel ist. Das Einschalten einer drehenden Substanz erhellt das Spektrum. Dreht man den Analysator nach, so tritt im Spektrum ein dunkeles Band auf, welches von dem roten nach dem violetten Ende wandert und dessen Mitte der vollkommen ausgelöschten, den Fraunhofer'schen Linien zu entnehmenden Wellenlänge (S. 284; Tab. 23) entspricht. Durch die Stellung des Analysators wird also der Drehwinkel dieser Wellenlänge gemessen.

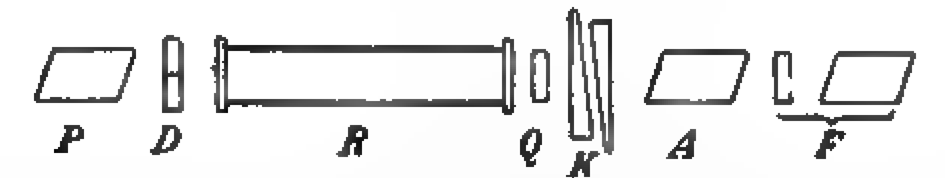
III. Saccharimeter mit Quarzkeilen (Soleil).

Die Drehung der Polarisationsebene durch eine Zuckerlösung kann durch eine entgegengesetzt drehende Quarzplatte kompensiert werden, und zwar nicht nur für einfarbiges, sondern für beliebiges

Licht, weil die Farbenzerstreuung im Quarz derjenigen in der Zuckerlösung sehr nahe proportional ist (S. 313). Man kann also die Drehung in Zuckerlösungen zwischen den bisher beschriebenen Vorrichtungen, anstatt sie durch Nachdrehen des Nicol zu messen, aus der Größe der Verschiebung von Quarzkeilen ableiten, welche zur Kompensation notwendig ist.

Soleil'sches Saccharimeter.

Das Licht tritt durch den polarisierenden Nicol *P* ein und geht von da durch die Doppelquarzplatte *D* (vgl. I 2). Hierauf folgt das Rohr *R*,



welches mit der Lösung gefüllt werden kann Dann der Kompensator, bestehend aus einer rechtsdrehenden Quarzplatte *Q* und den beiden linksdrehenden Quarzkeilen *K*, welche sich mittels eines Triebes gegen einander verstellen lassen, also zusammen einen Linksquarz von veränderlicher Dicke vorstellen. In einer mittleren Stellung ist die Gesamtdicke derjenigen des Rechtsquarzes *Q* gleich, so daß *Q* und *K* zusammen keine Wirkung haben. Diese Stellung soll der Einstellung Null auf der mit dem Trieb verbundenen Teilung entsprechen. Es folgt dann der analysierende Nicol *A*, dessen Polarisationsebene derjenigen von *P* parallel sein soll.

Da Zuckerlösungen usw. gefärbt sein können und da nicht alle Augen für den gleichen Farbenwechsel empfindlich sind, so ist die violette Übergangsfarbe nicht immer die empfindlichste. Deswegen hat man in der Regel dem Auge zugewandt (bei manchen Instrumenten auch wohl umgekehrt auf der Seite der Flamme) noch einen Farbenregulator *F*. Dieser besteht wieder aus einer Quarzplatte und einem drehbaren Nicol, mit dessen Drehung die Farbe des Gesichtsfeldes sich ändert. Auf den Nullpunkt des Instrumentes hat diese Drehung keinen Einfluß.

Es ist zu beachten, daß zum Beurteilen gleicher Färbung nicht alle Augen geeignet sind, so daß im Handelsverkehr die Anwendung weißen Lichtes beanstandet wird — Mit einfarbigem, z. B Natrium- oder mittels Kaliumchromatlösung gereinigtem Auerlicht, stellt man statt auf gleiche Färbung auf gleiche Helligkeit ein. Die Berechnung ist in beiden Fällen die nämliche. Vgl. Schönrock, Ann. der Ph. 14, 406. 1904.

Man legt das leere oder mit Wasser gefüllte Rohr ein, beleuchtet mit einer weißen Flamme oder mit Tageslicht und zieht zuerst das mit dem Okular verbundene, oben nicht mit gezeichnete kleine Fernrohr so weit heraus, daß die Quarzplatten scharf begrenzt erscheinen. Um die zweckmäßigste

Färbung zu erhalten, stellt man mittels der Zahnstange zunächst auf nicht ganz gleiche Färbung der Halbkreise ein. Durch Drehung des Farbenregulators (siehe oben) bewirkt man dann die Färbung, welche den größten Unterschied der Halbkreise gibt, meist weißlich, in rot und grün umschlagend.

Nun stellt man mit dem Trieb auf gleiche Färbung ein und liest die Teilung ab, bringt die Zuckerlösung ein, stellt wieder ein und liest ab, beide Einstellungen einige Male wiederholend.

Es entspricht die Verschiebung um 1, bez. auch 0,1 Teilstrich einer Drehung des Natriumlichtes bei den Saccharimetern

Soleil-Ventzke um 0,3466° und Soleil-Duboscq um 0,217°.

Der Zuckergehalt z von 100 cm³ der Lösung in gr wird bei Anwendung der 2 dm langen Röhre hiernach und aus der spez. Drehung des Zuckers S. 318 gefunden, wenn die Verschiebung von der leeren auf die gefüllte Röhre p Teile betragen hat:

Soleil-V. $z = 0{,}260 \cdot p$, Soleil-D. $z = 0{,}163 \cdot p$.

Als Normaltemperatur gilt in der Saccharimetrie 20°. — Zu bemerken ist, daß mit 0,2600 berechnet, der Gehalt z in Luft gewogenen Zucker bedeutet. (Die früher giltige Zahl 0,2605 bezog sich auf das „Mohr'sche ccm", welches um 2 Promille größer ist als das jetzt angenommene richtige.

Für Zuckersorten, deren Gehalt an reinem Zucker gefunden werden soll, ergibt sich also die Regel: man löse 26,0 bez. 16,3 gr des Rohrzuckers zu 100 cm³ Lösung, dann zeigt die Verschiebung des Maßstabes den reinen Zuckergehalt in Prozenten an.

Die Probe für richtige Teilung ist durch die Anwendung einer „Normal-Lösung" von 26,0 bez. 16,3 gr in 100 cm³ gegeben. Die Verschiebung muß dann 100 Teilstriche betragen.

Soll der Nullpunkt der Teilung mit dem Zuckergehalt Null zusammen fallen, so stellt man bei leerer Röhre den Index auf Null und dreht am hinteren Nicol'schen Prisma, bis die Quarzplatten gleich gefärbt sind.

Bestimmung des Zuckergehaltes, wenn noch andere drehende Substanzen vorhanden sind.

Die polarimetrische Elimination[1]) anderer drehender Substanzen als Rohrzucker beruht darauf, daß der rechtsdrehende Rohrzucker durch 10 Minuten langes Erwärmen mit Salzsäure auf etwa 70° in linksdrehenden Invertzucker, ein Gemenge von Dextrose und Lävulose, verwandelt wird. — Während Rohrzuckerlösungen von der Temperatur so gut wie unabhängig

1) Technisch ist die Elimination mittels Fehling'scher Lösung gebräuchlich.

drehen, wird die Invertzuckerlösung ziemlich stark beeinflußt. Eine invertierte Lösung von der Länge l dm, welche in 100 cm³ s gr früheren Rohrzuckers enthält, dreht die Polarisationsebene des Natriumlichtes bei der Temperatur t' um den Winkel

$$[0{,}2330 - 0{,}00304(t' - 20)] \cdot sl.$$

Um in einer Rohrzuckerlösung, bei der man nicht sicher ist, daß andere drehende Substanzen ausgeschlossen sind, die Drehung durch den Zucker allein zu bestimmen, ergibt sich aus dem Vorstehenden das folgende Verfahren. Nachdem die Drehung (d. h. der Winkel α oder die Verschiebung p der Quarzkeile) der gewöhnlichen Lösung bestimmt worden ist, nimmt man 100 cm³ der Lösung, versetzt sie mit 10 cm³ konzentrierter Salzsäure und erwärmt 10 Minuten lang auf 70°. Nach der Abkühlung füllt man mit dieser invertierten Lösung eine um den zehnten Teil längere Röhre als die erste (oder wenn dieselbe Röhre benutzt wird, so multipliziert man die jetzt beobachteten Winkel mit 1,1) und beobachtet die nunmehr erfolgende Drehung α' (bez. p') nach links. Die Temperatur der Lösung bei dieser zweiten Beobachtung sei t'. Um schließlich die Drehung durch den Rohrzuckergehalt allein zu bekommen, teilt man die Summe $\alpha + \alpha'$ oder $p + p'$ durch $1{,}350 - 0{,}00457\,(t' - 20)$.

Denn wenn die zu eliminierende Drehung durch den Nichtzucker gleich β gesetzt wird, so hat man (S. 318 und oben)

$$\alpha = 0{,}665\,sl + \beta,$$
$$\alpha' = [0{,}2330 - 0{,}00304(t' - 20)]\,sl - \beta.$$

Folglich

$$\alpha + \alpha' = [0{,}8980 - 0{,}00304(t' - 20)]\,sl = [1{,}350 - 0{,}00457\,(t' - 20)] \cdot 0{,}665\,sl.$$

$0{,}665\,sl$ ist aber die Drehung durch den Zuckergehalt allein.

Zusammenstellung der technischen Meßmethoden für Rohrzucker in Frühling u. Schulz, Anleitung usw., 5. Aufl. 1897, sowie bei Herzfeld, ZS Verein Zuckerindustr. 49, 545. 1899.

71a. Erzeugung und Untersuchung elliptischen Lichtes. Babinet's Kompensator. Metallreflexion.

I. Schwingungsformen des Lichtes nach dem Durchtritt durch eine Kristallplatte.

Die Betrachtungen und Untersuchungen werden stets am einfachsten, wenn man von linear polarisiertem, d. h. nur in einer Ebene schwingendem Licht (69) ausgeht.

Solches Licht von der Wellenlänge λ gehe durch eine Platte aus einem doppelbrechenden Kristall in einer anderen Richtung, als der einer

optischen Axe. Die eintretende Schwingung zerfällt im Kristall nach zwei zu einander senkrechten, durch die Natur des Kristalles und die Lage des Strahles gegen die optischen Elastizitätsaxen des Kristalles bestimmten Richtungen in Komponenten, die sich mit ungleichen Geschwindigkeiten (Wellenlängen) fortpflanzen. Die durch die Strahlenrichtung gehenden Ebenen, welche diese Komponenten enthalten, sollen die Hauptebenen heißen. Bei dem Wiederaustritt in das unkristallinische Mittel setzen die dann vorhandenen beiden Komponenten sich wieder in eine einzige Schwingung zusammen. Vgl. auch 70.

1. Fällt die Schwingungsrichtung des eintretenden Lichtes in eine der Hauptebenen, so wird das Licht nicht geändert, weil die eine der Komponenten gleich Null ist.

2. Ferner ist das Licht nach seinem Durchtritt ungeändert, wenn der Gangunterschied der beiden Schwingungen im Kristall λ, 2λ, 3λ usw beträgt, weil in diesem Falle die Komponenten bei dem Austritt dieselben gegenseitigen Beziehungen haben, wie bei dem Eintritt.

3. Der Gangunterschied betrage $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{3}{2}\lambda$ usw.; dann bleibt das austretende Licht geradlinig polarisiert, schwingt aber im allgemeinen in einer anderen Ebene als beim Eintritt. Bildet die Schwingungsrichtung vor dem Eintritt mit einer Hauptebene den Winkel ω (Einfallsazimut), so bildet die des austretenden Lichtes mit derselben Hauptebene den gleichen Winkel ω nach der entgegengesetzten Seite; vgl. die Figur, die den Bewegungszustand des durch seine Gleichgewichtslage hindurchgehenden Ätherteilchens bei dem Eintritt und dem Austritt des Strahles andeutet, gesehen in der Richtung des Strahls; die punktierten Linien bedeuten die Komponenten im Kristall, die ausgezogenen die Schwingungen in der Luft. Spezieller Fall: $\omega = 45°$; das austretende Licht hat eine um 90° gedrehte Schwingungsrichtung.

Eintritt Austritt

4. Die Schwingung des eintretenden Lichtes sei gegen die Hauptebenen um 45° geneigt. Der Gangunterschied betrage $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$, $\frac{9}{4}\lambda$ usw. Das austretende Licht ist zirkular polarisiert, d. h. die Bahnen der Ätherteilchen sind Kreise. Denn wenn z. B. die horiz. Komponente gegen die vertikale um $\frac{1}{4}$ Schwingung zurückgeblieben ist, so passiert das Ätherteilchen bei dem Austritt der Welle bezüglich der Vertikalbewegung die Gleichgewichtslage mit der größten Geschwindigkeit zu einer Zeit, in der es horizontal ohne Geschwindigkeit in der Elongation ist. Es hat eine auf einer Kreisperipherie tangentiale Geschwindigkeit. $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{7}{4}\lambda$ usw. gibt die Kreisbewegung entgegengesetzt gerichtet, wie $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ usw. Ebenso wird die Schwingungsrichtung umgekehrt, wenn die Schwingungsebene des eintretenden Lichtes um 90° geändert wird.

Eintritt Austritt

Anstatt $\frac{1}{2}\lambda$, $\frac{1}{4}\lambda$ usw. kann natürlich, wenn s eine ganze Zahl ist, überall gesetzt werden $s\lambda + \frac{1}{2}\lambda$, $s\lambda + \frac{1}{4}\lambda$ usw.

5. In allen anderen Fällen tritt elliptisch polarisiertes Licht aus. Falls das Azimut der eintretenden Schwingung gegen die Hauptebenen $=45^\circ$ war (vgl. Nr. 4), so ist das Axenverhältnis der Schwingungsellipse für den Gangunterschied $k \cdot \lambda$

$$a/b = \mathrm{tg}(k \cdot 180^\circ).$$

Die Ellipsen sind um so gestreckter bez. um so runder, je näher der Gangunterschied 0, $\frac{1}{2}\lambda$, λ, $\frac{3}{2}\lambda$ usw. bez. $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ usw. beträgt. Vgl. auch die Figur S. 325. — Bei den Gangunterschieden $\frac{1}{4}\lambda$, $\frac{3}{4}\lambda$ usw. fallen die Axen der Ellipse in die Hauptebenen.

II. Änderung des Lichtes durch Reflexion, insbesondere an Metallen.

Im vorigen wurde das Licht nur durch die Phasenverschiebung der Schwingungskomponenten geändert. Bei der Reflexion tritt nun weiter eine ungleiche Schwächung auf, welcher die beiden „Hauptkomponenten", nämlich die parallel und die senkrecht zur Einfallsebene schwingende Komponente, hier im allgemeinen unterliegen.

Reflexion an durchsichtigen Körpern.

Sehen wir von einzelnen sehr stark brechenden Körpern, wie Diamant, von der Reflexion in Kristallen sowie von der Totalreflexion ab, so besteht die Änderung des Lichtes hier nur in ungleicher Schwächung der beiden Komponenten. Bedeuten α und β den Einfalls- und den Brechungswinkel, so beträgt (Fresnel 1823) der reflektierte Bruchteil der Intensität für Lichtschwingungen: zur Einfalls-Ebene

senkrecht (d. h. in der E.-E. polarisiert) $\sin^2(\alpha-\beta)/\sin^2(\alpha+\beta)$,
parallel (d. h. senkrecht zur E.-E. polarisiert) $\mathrm{tg}^2(\alpha-\beta)/\mathrm{tg}^2(\alpha+\beta)$.

Der zweite Ausdruck wird Null für den „Polarisationswinkel", d. h. wenn $\alpha+\beta=90^\circ$; vgl. S. 305.

Eine merkliche gegenseitige Phasenverschiebung findet hier nicht statt. Linear polarisiertes einfallendes Licht bleibt daher auch nach der Reflexion stets linear polarisiert; war es schräg zur Einf.-Ebene polarisiert, so erleidet es durch die Reflexion im allgemeinen eine Drehung seiner Pol.-Ebene, es schwingt nachher in einem anderen Azimut.

Reflexion an Metallen.

Bei der Reflexion an stark absorbierenden Substanzen wirken beide Änderungen zusammen; die Hauptkomponenten erleiden durch Metallreflexion sowohl eine ungleiche Schwächung wie eine gegenseitige Phasenänderung. Linear polarisiert einfallendes Licht ist also nach der Reflexion im allgemeinen elliptisch polarisiert.

Die beiden Änderungen hängen von der Natur des Metalles, von der Wellenlänge des Lichtes und jede in ihrer Art vom Einfallswinkel ab. Die Phasenverschiebung wächst von dem Betrage Null bei senkrechter bis zu $\frac{1}{2}\lambda$ bei streifender Reflexion.

Die Eigenschaften eines bestimmten Metalles, aus denen die einzelnen

Erscheinungen sich ableiten lassen, pflegen zusammengefaßt zu werden in die beiden Begriffe seines Haupteinfallswinkels und Hauptazimuts.

Haupteinfallswinkel Φ eines Spiegels heißt derjenige Winkel, den der einfallende Strahl mit dem Lot bilden muß, damit die beiden Hauptkomponenten durch die Reflexion eine gegenseitige Verschiebung um $\frac{1}{4}\lambda$ erleiden.

Hauptazimut A. Unter dem eben definierten Haupt-Einfallswinkel falle auf den Spiegel Licht, dessen Pol.-Ebene gegen die E.-Ebene um 45° geneigt ist. Die bei der Reflexion entstandene Phasendifferenz werde aufgehoben (vgl. IV), so daß lineares Licht entsteht. Den Winkel A, den die Pol.-Ebene nunmehr mit der Einfalls- oder Reflexionsebene bildet, nennt man das Hauptazimut des Spiegels.

Aus Φ und A berechnet sich für einen beliebigen E.-W. φ die bei der Reflexion entstehende relative Phasenverschiebung Δ und das Azimut a der wiederhergestellten linearen Polarisation, wenn man $\operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sin\varphi \operatorname{tg}\varphi}{\sin\Phi \operatorname{tg}\Phi} = \vartheta$ setzt, mit genügender Annäherung aus den beiden Formeln:

$$\operatorname{tg}\Delta = \sin 2A \operatorname{tg} 2\vartheta \qquad \cos 2a = \cos 2A \sin 2\vartheta.$$

Quincke, Pogg. Ann. 128, 551. 1866.

Optische Konstanten des Metalles. Nimmt die Lichtamplitude bei dem Durchlaufen einer der Wellenlänge gleichen Strecke im Verhältnis $e^{-2\pi k}$ ab, so heißt k der Extinktionsindex (Absorptionsindex). Die Theorie ergibt

$$k = \operatorname{tg} 2A \text{ und für das B.-V. } n \quad n\sqrt{1+k^2} = \sin\Phi \operatorname{tg}\Phi.$$

Das Reflexionsvermögen R (Bruchteil der reflektierten Lichtintensität) bei senkrechtem Einfall ist hierdurch bestimmt (vgl. auch S. 338) als

$$R = \frac{n^2(1+k^2)+1-2n}{n^2(1+k^2)+1+2n}.$$

Da bei vielen Metallen $2n$ gegen $n^2(1+k^2)$ klein ist, so nähert R sich hier dem Werte Eins.

Gefunden wurde von Drude z. B. für Natriumlicht

	Φ	A	k	n	R
Silber	75,7°	43,6°	20,4	0,18	0,95
Gold	72,3	41,6	7,6	0,37	0,85
Quecksilber	79,6	35,7	2,9	1,73	0,78

Vgl. Drude, Optik S. 338. 1900.

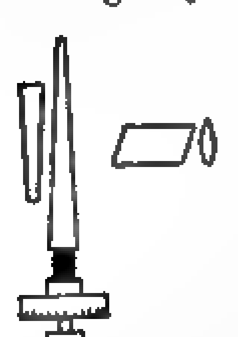
Über Extinktionskoeffizient u. Reflexionsvermögen vgl. auch Tab. 25a u. 72 VI. Zwischen k und der dort definierten Größe h besteht die Beziehung $h:k = 2\pi:\lambda$.

III. Babinet'scher Kompensator.

Der Babinet'sche Kompensator gibt die Möglichkeit, in den Weg eines Lichtstrahles eine Kristallplatte von beliebiger wirksamer Dicke einzuschalten. Dies benutzt man einerseits, um in der unter I beschriebenen Weise in einen Lichtstrahl Phasendifferenzen einzuführen, andererseits auch, um vorhandene Phasendifferenzen zu beseitigen oder abzuändern;

mit anderen Worten, man kann z. B. linear pol. Licht in zirkulares oder elliptisches Licht verwandeln oder andererseits elliptisches in lineares oder in zirkulares.

Zu dem Zwecke liegen hintereinander zwei sehr schwach keilförmige Quarzplatten von gleichem Keilwinkel, die in ihrer Mitte gleich dick sind. Die Schneiden sind einander parallel, aber auf entgegengesetzter Seite gelegen Beide Keile haben die optische Axe parallel der einen Begrenzungsebene, der eine aber parallel der Schneide, der andere senkrecht dazu. Der längere Keil ist in seiner Richtung mittels einer Mikrometerschraube verschiebbar, deren Drehung an einer Trommel abgelesen wird. Man visiert mit der Lupe durch einen Nicol („Analysator") nach der Mitte des feststehenden kleineren Keils, die durch einen Faden (oder eine Blende) markiert sei. Liegen an dieser Stelle gleich dicke Schichten der beiden Keile hintereinander, so tritt hier der durchgegangene Strahl ungeändert aus. Wenn man nun den beweglichen Keil verschiebt, so wird dadurch die gegenseitige Phase der beiden Schwingungskomponenten, welche mit den durch die optischen Axen der Quarze bestimmten Hauptebenen des Apparates zusammenfallen, um einen dieser Verschiebung proportionalen Betrag geändert.



Der Analysator ist über einer Teilung drehbar; zunächst möge seine Polarisationsebene (größere Diagonale des Rhombus) z. B. um 45° gegen die Hauptschnitte der Quarze geneigt sein.

Wert ε eines Trommelteils. Um den Trommelteil in Gangunterschied auszuwerten (selbstverständlich für Licht von einer bestimmten Wellenlänge), läßt man das betreffende Licht durch einen Nicol, dessen Polarisationsebene unter 45° gegen die Hauptschnitte geneigt ist, einfallen und beobachtet es nach seinem Durchgang mit dem Okular-Nicol. Wir wollen annehmen, daß die beiden Nicol gekreuzt sind. Irgendwo wird im Gesichtsfeld ein dunkeler Streifen erscheinen, den man mit der Trommel auf den Faden einstellt. Die Trommelstellung sei jetzt $= p_0$. Dann dreht man die Trommel, bis der nächste dunkele Streifen auf dem Faden liegt. Die jetzige Trommelstellung (die ganzen Umdrehungen natürlich mitgezählt) sei $= p_1$. Dann entspricht also der Trommelunterschied $p_1 - p_0$ gerade einer Wellenlänge, d. h. es bedeutet die Verschiebung um einen Trommelteil eine Änderung des Gangunterschieds um $\lambda/(p_1 - p_0)$, und es ist

$$\varepsilon = 1/(p_1 - p_0).$$

Wenn also die Trommel auf dem Teilstrich p steht, so bewirkt der Kompensator eine relative Verschiebung der beiden Wellenkomponenten um $\varepsilon(p - p_0)\lambda$.

s ist bei der geringen Dispersion des Quarzes für verschiedene Farben ungefähr deren Wellenlänge λ umgekehrt proportional.

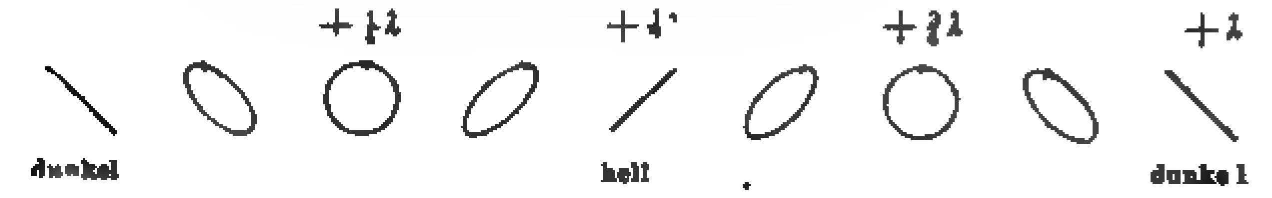
Bestimmung des absoluten Nullpunktes des Kompensators. An den dunkelen Stellen beträgt der Gangunterschied ein ganzes Vielfaches der Wellenlänge; ob 0, λ, 2λ ..., kann man dem bisher angewandten homogenen Licht nicht ansehen, für welches diese Frage auch fast immer gleichgiltig ist.

Um aber denjenigen Streifen zu finden, in welchem der Gangunterschied 0 ist, d. h. wo die Quarze gleich dick sind, braucht man nur weißes Licht anzuwenden. Dann findet man nur einen wirklich dunkelen Streifen, der eben den Nullpunkt bezeichnet. Die übrigen sind wegen der verschiedenen Wellenlänge der Lichtsorten gefärbt.

IV. Erzeugung beliebig elliptischen Lichtes aus linear polarisiertem mit dem Babinet'schen Kompensator.

Wir lassen, wie eben, in den Kompensator homogenes, lin. pol. Licht von 45° Schwingungsazimut gegen die Hauptebenen des Apparates einfallen, gewonnen z. B aus gewöhnlichem Natriumlicht mittels eines vor den Apparat geeignet gestellten Nicol. In dieses Licht führen nun die Quarzkeile, je nach dem Orte, wo das Licht sie durchsetzt, verschiedene Phasendifferenzen ein, infolge deren in dem austretenden Licht alle möglichen Schwingungsformen nebeneinander vertreten sind. Man erkennt diese mit dem analysierenden Okular-Nicol.

Die nachfolgende Figur deutet die Schwingungszustände des durchgegangenen Lichtes in dem Bezirk zwischen zwei dunkelen Streifen für den Fall an, daß das eintretende Licht von links oben nach rechts unten schwingt (d. h., nach Fresnel, daß die kurze Diagonale des polarisierenden Nicol so gerichtet ist) und daß der analysierende Nicol gegen den Polarisator gekreuzt ist. In den dunkelen Streifen ist das Licht ungeändert (vgl. I, 2); mitten dazwischen ist durch Voraneilen um $\frac{1}{2}\lambda$ linear polarisiertes Licht von einer um 90° gedrehten Schwingungsrichtung entstanden und maximale Erhellung eingetreten (vgl. I, 3).



In je ¼ Abstand von den dunkelen Streifen haben wir Voraneilen um ¼ bez. $\frac{3}{4}\lambda$, also zirkular polarisiertes Licht. An den anderen Stellen schwingt das Licht elliptisch. — In der einen Hälfte findet die Schwingung links, in der anderen rechts herum statt.

(Wie man sieht, entspricht die Figur dem Falle, daß von links nach rechts gerechnet die horizontale Schwingungskomponente gegen die vertikale verzögert ist.) Wird der Analysator gedreht, so ändern die Stellen zirkular polarisierten Lichtes ihre Helligkeit überhaupt nicht. An den Stellen linearer Polarisation dagegen wechselt nach je 90° Drehung größte Helligkeit mit Dunkelheit.

Axenverhältnis der Ellipsen. Die Elliptizität eines Lichtes ist durch das Verhältnis a/b der beiden Hauptaxen der Ellipse charakterisiert. Aus den Quarzkeilen austretendes Licht, welches sich im Fadenkreuz befindet, während die Trommel auf dem Teilstrich p steht, hat, vorausgesetzt, daß es linear mit dem Azimut 45° eingetreten war, das Axenverhältnis (vgl. I Nr. 5)

$$a/b = \operatorname{tg}[\varepsilon \cdot 180^0 (p - p_0)].$$

V. Untersuchung der Schwingungsform eines in den Kompensator eintretenden Lichtes.

Man behalte im Auge, daß vollkommene Dunkelheit an einer Stelle im Kompensator anzeigt, daß erstens daselbst lin. pol. Licht austritt und daß zweitens die Pol.-Ebene dieses Lichtes auf der des analysierenden Nicol senkrecht steht.

Wir setzen homogenes Licht von einer Farbe voraus, für welche nach vor. Seite ε bestimmt wurde.

Dieses Licht soll eine der behandelten elementaren Schwingungsformen haben, also nicht etwa natürliches Licht mit polarisiertem gemischt sein, sondern Licht von einer bestimmten Schwingungsellipse, wie es aus geradlinig polarisiertem etwa nach dessen Durchgang durch einen Kristall, z. B. Glimmer oder Gips, oder durch Reflexion an einem Metallspiegel usw. entstanden ist. S. hierüber I u. II.

1. Lage und Axenverhältnis der Schwingungsellipse.

Man stelle den Kompensator mit der Trommel genau auf den Punkt $\frac{1}{4}\lambda$ (Fig. v. S.) ein, mit anderen Worten nach S. 324 die Trommel auf den Teilstrich $p_0 + 1/(4\varepsilon) = p_0 + \frac{1}{4}(p_1 - p_0)$. Nun richte man den Kompensator auf das zu untersuchende Licht. Der Kompensatot sei um seine Sehaxe drehbar. Bei dieser Drehung wandert der dunkele Streifen im allgemeinen: man drehe, bis er auf den Beobachtungsfaden fällt; den analysierenden Nicol drehe man zugleich so, daß der Streifen immer

möglichst kräftig bleibt. Wird der Faden bei keiner Stellung des Kompensators von einem Streifen erreicht, so drehe man den Analysator um 90°; dann wird es der Fall sein.

a) Lage der Axen. Die beiden Hauptschnitte des Kompensators fallen jetzt mit den beiden Axen der Schwingungsellipse zusammen.

b) Axenverhältnis der Ellipse. In der Lage, bei welcher der Streifen möglichst dunkel ist, bilde die Polarisationsebene des Analysators mit einem Hauptschnitt des Kompensators den Winkel γ, dann ist

$$\frac{\text{Axe parallel jenem Hauptschnitt}}{\text{Axe senkrecht zu jenem Hauptschnitt}} = \operatorname{tg} \gamma.$$

Spezielle Fälle. 1. Ändert sich nichts, wenn man den Kompensator (inkl. Analysator!) dreht, so bedeutet dies eintretendes zirk. pol. Licht. Wird in diesem Falle der Analysator allein gedreht, so wechselt ein auf dem Faden liegender dunkeler Streifen mit zwei beiderseitig in gleichem Abstande auftretenden.

2. Beobachtet man andrerseits bei der Drehung des ganzen Kompensators anstatt der Wanderung der Streifen ein abwechselndes Auftreten von Streifen links und rechts symmetrisch vom Faden, so zeigt dies linearpolarisiertes Licht an.

2. Gleichzeitige Bestimmung einer relativen Verschiebung und Schwächung, welche zwei zu einander senkrechte Komponenten eines Lichtstrahles — etwa durch Metallreflexion oder in einem dichroitischen Kristall — erleiden.

Wir wählen zur Untersuchung die beiden gleichen rechtw. Komponenten linear polarisierten Lichtes. Dieses schwinge ursprünglich unter 45° gegen die Hauptebenen des Kompensators — kenntlich daran, daß der Analysator im Azimut 45° einen ganz schwarzen Streifen gibt, der auf den Faden fällt, wenn die Trommel auf p_0 steht (S. 324).

Nachdem dann das Licht die Änderung erlitten hat, stellt man durch gleichzeitige Verdrehung der Trommel und des Analysators so ein, daß der dunkele Streif wieder auf dem Faden und möglichst schwarz erscheint. 1. Die Trommel stehe jetzt auf p; dann ist die erlittene Phasenverschiebung $= \varepsilon(p - p_0)$.

2. Das Schwächungsverhältnis ist $= \operatorname{tg}\gamma$, wenn γ der jetzige Winkel des Analysators mit der Einfallsebene ist.

3. Bestimmung des Haupteinfallswinkels und Hauptazimuts eines Metallspiegels (vgl. II).

Man kann zum Beispiel so verfahren. Vor den Kollimator eines Spektrometers (60) werde ein Nicol vom Azimut 45° gegen die Instrumentalaxe gestellt; der Spiegel wird auf dem drehbaren Tischchen der Drehaxe parallel befestigt und der Kompensator mit seiner einen Hauptebene der Drehungsebene des Spektrometers parallel aufgestellt, so, daß er gespiegeltes Licht sieht.

Man stellt die Trommel auf $\frac{1}{4}\lambda$, d. h. auf den Teilstrich $p_0 + \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon}$ (vgl. S. 324) ein und dreht nun Spiegel und Kollimatorrohr, bis die dunkele Franse auf dem Faden liegt, sowie gleichzeitig den analysierenden Nicol, bis die Franse möglichst schwarz ist. Der jetzige Einfalls- (oder Reflexions-)Winkel am Spiegel ist der Haupteinfallswinkel, und das jetzige Azimut der Polarisationsebene des Analysators gegen die Reflexionsebene gibt das Hauptazimut.

Über die Ausführung derartiger Messungen mit vollkommeneren Hilfsmitteln vgl. z. B. Quincke, Pogg. Ann. 127, 203. 1866; Drude, Wied. Ann. 34, 490. 1888.

Soleil-Babinet'scher Kompensator. Dieser besteht aus zwei Quarzkeilen und einer Quarzplanplatte und gibt die Möglichkeit, Gangunterschiede in einem größeren Gesichtsfeld zu kompensieren. Vgl. Drude, Optik S. 238. Über die Theorie s. z. B. Dorn, im Anhang zu Neumann, Vorlesungen über Optik; C. Schmidt, Wied. Ann. 46, 377. 1892, sowie die größeren Lehrbücher der Physik oder Optik.

Eine Methode von Voigt zu Untersuchungen im Ultraviolett, welche durch eine photographische Aufnahme Phasenverzögerung und Amplitudenverhältnis liefert, s. Minor, Ann. der Ph. 10, 581. 1903.

72. Photometrie.

Über elektrische Lampen und räumliche Verteilung von Lichtstärken s 128. — Vgl. auch Liebenthal, Photometrie. Braunschw 1905.

I. Einheiten.

Als Einheit der Stärke einer Lichtquelle (Lichtstärke) dient in Deutschland allgemein die Hefnerkerze (HK), dargestellt durch

die auf 40 mm Höhe regulierte Flamme von primärem Isoamylacetat ($C_7H_{14}O_2$), an rundem, 8 mm dickem Docht, aus einem 0,15 mm starken Neusilberrohre gebrannt. — Kohlensäure sowie Wasserdampf in der Luft vermindern die Leuchtkraft. In der P. T. Reichsanstalt wird Luft von 760 mm Druck, vom Kohlensäuregehalt 0,7 liter/cbm und mit 6,6 gr/cbm Wasserdampf als normal angenommen. Dem Barometerstande b und dem Wassergehalte f gr/cbm (vgl. 47) entspricht dann die Lichtstärke $1{,}049 + 0{,}0001\,(b - 760) - 0{,}0074\,f$ HK.

Als normal gilt das Leuchten der Hefnerlampe in horizontaler Richtung; streng würde also 1 HK durch eine Lichtquelle dargestellt werden, die nach allen Richtungen ebenso leuchtet, wie die Hefnerlampe nach der horizontalen. — Beglaubigte Hefnerlampen sind im Handel.

Ältere Einheiten werden z. B. durch die Carcellampe (nahe 10,8 HK) oder durch Kerzen von bestimmter Flammenhöhe oder bestimmtem Gewichtsverbrauch gegeben (1 Englische Normal-Wallratkerze, 45 mm hoch, = 1,14 HK; 1 Deutsche Normal-Paraffinkerze, 50 mm hoch, = 1,20 HK; in England jetzt vielfach die „10 Kerzen-Pentanluftgaslampe", etwa = 11 HK).

Als Einheit ist auch eine bei bestimmter Temperatur strahlende Flächeneinheit, z. B. 1 qcm Platin vorgeschlagen worden. Die Temperatur läßt sich als Erstarrungspunkt festlegen (Violle; s. Petavel, Proc R. S. 65, 481 1900). Man kann sie auch durch die spektrale Zusammensetzung der Gesamtstrahlung (72a) definieren, wobei als Kriterium dient, daß von einer bestimmten absorbierenden Schicht (2 cm Wasser) ein bestimmter Bruchteil der Energie (9/10) zurückgehalten werden soll (Lummer u. Kurlbaum, Berl. Sitzber. 1894, 229).

Als konstante Gebrauchsmaße empfehlen sich elektrische Glühlampen, mit konstanter Stromstärke (85) oder Spannung (100, 101) gebrannt und in derselben Ausstrahlrichtung, wie bei dem Gebrauch, auf die Hefnerkerze zurückgeführt. Mit einer gegen die Norm der Lampen etwas verkleinerten Spannung — was außer erhöhter Haltbarkeit den Vorteil einer der Hefnerkerze ähnlichen Farbe bietet — nicht länger als nötig gebrannt, gewährt die Glühlampe eine lange dauernde Konstanz.

Während einiger Zeit konstant leuchtet auch eine mit Druckregulator oder mit dem Hahn auf konstanter Höhe erhaltene Gasflamme, oder eine etwa eine halbe Stunde zuvor angezündete Benzin- oder Petroleumlampe.

Weitere Bezeichnungen von Einheiten. Eine allseitig gleich leuchtende Lichtquelle Eins („Hefnerkerze"; vgl. oben) sendet in die Einheit des räumlichen Winkels:

den Lichtstrom Eins („Lumen");

in der Zeiteinheit die Lichtmenge Eins („Lumensekunde", „Lumenstunde");

sie bewirkt ferner auf einer im Abstande Eins (1 m) senkrecht zu diesem gelegenen Fläche

die Beleuchtung Eins („Meterkerze"; „Lux")

Eine allseitig gleiche Lichtquelle J sendet also in den Raum den

Gesamtlichtstrom $4\pi J$, in der Zeit t sek die Gesamtlichtmenge $4\pi Jt$ aus. Die Beleuchtung einer im Abstande r m senkrecht liegenden Fläche beträgt J/r^2.

Im Lichtstrome von der Stärke s fließt in der Zeit t durch einen Querschnitt die Lichtmenge st. — Ein Flächenelement $d\omega$, vom Stromelement ds senkrecht getroffen, erfährt dadurch die „Beleuchtung" $ds/d\omega$; „Beleuchtung" und „Stromdichte" sind also identisch. Bildet die Flächennormale mit der Stromrichtung den Winkel α, so kommt der Faktor $\cos\alpha$ dazu.

Flächenhelle einer selbst oder auch indirekt leuchtenden Fläche nennt man die nach der Normalen gemessene Lichtstärke ihrer Flächeneinheit. Die Einheit ist Kerze/cm².

Diese Definitionen schließen sich an den von der Technik angenommenen Gebrauch an. Vgl. z. B. Elt. ZS 18, 474. 1897.

Als Grundlage der photometrischen Beobachtung dient das Einstellen auf gleiche Helligkeit zweier Objekte, meistens zweier benachbarter Flächen. Das Urteil über eingetretene Gleichheit kann durch Bewegung geschärft werden, z. B. dadurch, daß man das Objekt in einem schwach bewegten Spiegel betrachtet.

Sobald verschiedene Färbung vorhanden ist, wird die Schätzung gleicher Helligkeit vom subjektiven Ermessen abhängig. In diesem Falle dient wohl die Sehschärfe oder auch das Verschwinden von Flackererscheinungen als Kriterium.

II. Abstands-Photometrie.

Zur Messung dient der Satz: die Beleuchtung durch eine Lichtquelle nimmt mit wachsender Entfernung r quadratisch ab. Geben also zwei Lichtquellen I und II in den Abständen r_1 und r_2 gleiche Beleuchtung, so verhalten sich ihre Lichtstärken

$$J_1 : J_2 = r_1^2 : r_2^2 .$$

Die Helligkeit einer bestrahlten Fläche ist außerdem dem Sinus ihres Winkels gegen die Strahlen und einer Konstante proportional, welche man die Albedo der Fläche für die Lichtsorte nennt.

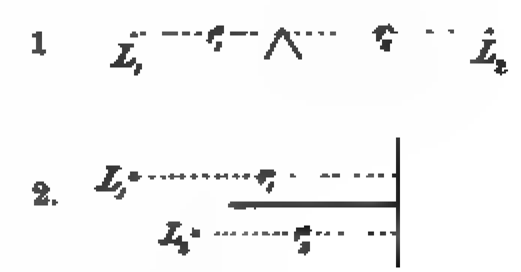
Zwei sehr ungleiche Lichtstärken direkt zu vergleichen, bietet, wenn man nicht über sehr große Entfernungen verfügt, stets Schwierigkeit. Man vergleicht dann beide mit einem konstanten Zwischenlicht, dessen Stärke am besten etwa das geometrische Mittel ist. Auch Rauchgläser sind anwendbar; vgl. Nr. 10.

Die Verfahren Nr. 1 bis 4 sind leicht zu improvisieren. Viel genauer arbeitet Nr 5

1. Schatten-Photometer (Lambert, Rumford). Vor einen weißen Schirm kommt ein dunkler, nicht zu schmaler Stab zu stehen. Die Lichtquellen werden so gestellt, daß die beiden Schatten des Stabes dicht

neben einander liegen und ihre Entfernungen so geregelt, daß die beiden Schatten gleich dunkel erscheinen, wobei darauf zu achten ist, daß beide Lichtbündel den Schirm in den Schattengebieten unter gleichem Winkel treffen. Die Abstände werden von jedem Lichte zu dem Schatten des anderen gemessen.

2 Beleuchtung zweier Flächen. Zwei gleiche Flächenstückchen werden unter gleichen Winkeln von den beiden Lichtquellen erhellt, deren Abstände r_1 und r_2 so ausgesucht werden, daß die Flächenhelligkeit gleich erscheint (Foucault). Fremdes Licht ist hier auszuschließen. Z. B. neigt man die Flächen gegen einander, beleuchtet von außen und beobachtet aus symmetrischer Stellung gegen die Trennungslinie (Ritchie, Fig. 1). Oder man trennt durch eine schwarze Scheidewand und beobachtet die Erhellung einer transparenten Fläche (Bouguer, Fig 2).



3. Diffusionsphotometer (Joly) Ein rechtwinkliger Paraffinklotz ist in seiner Mittelebene von einem Stanniolblatt durchsetzt; die Lichtquellen stehen in der Senkrechten zu dieser Trennungsfläche. Man beobachtet in der Richtung der Trennungsfläche.

4. Vergleichung zurückgeworfenen Lichtes mit durchfallendem (Bunsen). Auf einem kleinen Schirm aus durchscheinendem Papier ist mittels eines Fett- oder Stearinfleckes oder auch durch teilweises Bekleben mit einem zweiten dünnen Papier ein Ring von anderer Lichtdurchlässigkeit angebracht.

Einseitig von dem Schirm in unverändertem Abstande befinde sich eine konstante Lichtquelle (kleine Gasflamme von konstanter Höhe; Benzin- oder Petroleumlampe, etwa eine halbe Stunde zuvor angezündet; elektrische Glühlampe mit konstanter Spannung). Die beiden zu vergleichenden Lichtquellen werden nun folgeweise auf der anderen Seite des Schirmes in solchen Abständen r_1 und r_2 aufgestellt, daß die verschiedenen Schirmteile gleich hell erscheinen. Der Winkel, unter dem man die Scheibe betrachtet, beeinflußt die scheinbare Helligkeit; er ist also konstant zu erhalten.

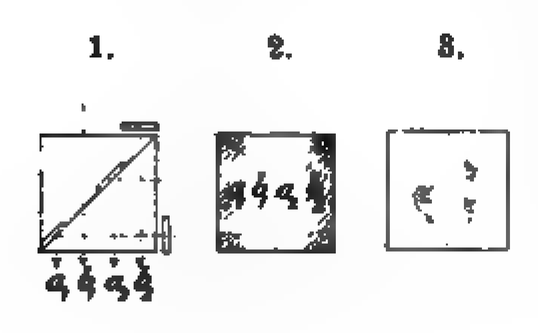
5. Photometerwürfel (Lummer und Brodhun). Auch hier wird durchfallendes mit zurückgeworfenem Licht verglichen, aber

ohne die aus transparentem Material entspringenden Nachteile. Die Hypotenusenflächen zweier rechtwinkliger Prismen berühren sich mit ihren mittleren Teilen unter Druck vollständig, so daß hier keine Reflexion, sondern vollständige Durchlässigkeit vorhanden ist. Außen ist das eine Prisma angeschliffen, so daß die Fläche des anderen totale Reflexion gibt. Rechts und links von dem beiderseits gleichen weißen Schirm T werden die zu vergleichenden Lichtquellen aufgestellt. S_1 und S_2 sind gleiche Spiegel (Fig., Grundriß). In die Fläche A durch eine Lupe hineinsehend erblickt man die Schirmseite T_1 durch die Mitte hindurch, T_2 dagegen total reflektiert an den Rändern. Die Abstände r_1 und r_2 der Lichtquellen L_1 und L_2 werden dann so reguliert, daß beide Teile gleich hell erscheinen.

Unsymmetrien können eliminiert werden entweder mittels des vorigen Verfahrens, beide Lichtquellen von derselben Seite her mit einem konstant anderseitig aufgestellten Hilfslicht zu vergleichen, oder man vertauscht die Lichtquellen bezüglich der Seiten T_1 und T_2, etwa durch Umlegen des ganzen Photometers um die Mittellinie der Figur.

Kontrast Photometer. Die Einstellung wird noch verschärft, wenn die zu gleicher Helligkeit verschmelzenden Felder sich gleichzeitig gegen eine anders erhellte Umgebung abheben. Man hat z. B. vier Felder, von denen je zwei auf gleiche, aber paarweise verschiedene Helligkeit eingestellt werden. Die Abschwächung des Lichtes geschieht durch Glasplatten (Fig. 1), welche geeigneten Teilen der Eintrittsflächen vorgesetzt werden und etwa 8% des Lichtes wegnehmen. Eine Gestalt des Photometerwürfels mit Kontrast ist z. B. die folgende.

Die Teile über a_1 und a_2 der hinteren Hypotenusenfläche (Fig. 1) sind mit dem Sandgebläse weggeätzt. An diesen Stellen findet in dem vorderen Prisma totale Reflexion des von rechts kommenden Lichtes statt, während durch die Teile über b_1 und b_2 das geradeaus kommende Licht durchgeht. Die beiden Glasplatten schwächen die Beleuch-



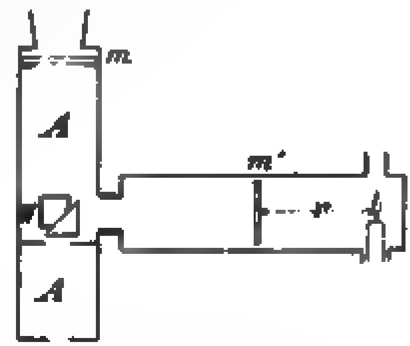
tung von a_1 und b_2 ab. Die Plattenränder liegen so, daß man sie nicht sieht. Die Einstellungsfigur ist unter 2 dargestellt. Noch empfindlicher ist die gebräuchliche, ähnlich bewirkte Einstellungsfigur 3.

Lummer und Brodhun, ZS f. Instr. 1889, 44 u. 461; 1892, 41.

5a. Interferenz-Photometerwürfel (Fuchs). Zwei rechtwinklige Prismen liegen mit ihren Hypotenusen aneinander. An der Grenze totaler Reflexion erscheinen die „Herschel'schen Streifen". Diese sind im durchgehenden und im reflektierten Licht einander komplementär, verschwinden also, wenn die beiden Oberflächen (vgl. Fig. zu Nr. 5) gleich hell beleuchtet werden.

Über einige Anwendungen vgl. Lummer, Verh. D. Ph. Ges. 1901, 131.

6. **Milchglasphotometer** (L. Weber). Vor dem Milchglase m des (drehbaren) Rohres A befindet sich die zu messende Lichtquelle im Abstande R. Die von der, auf 20 mm Flammenhöhe gehaltenen Benzinkerze erleuchtete Milchglasplatte m' wird mittels eines Triebes auf den außen am Rohre abzulesenden Abstand r gebracht, bei welchem der Photometerwürfel W gleiche Helligkeit beider Platten anzeigt. Dann ist $J = C \cdot R^2/r^2$ die gesuchte Lichtstärke. Der Abstand des Milchglases von W ist bei hinreichend kleinem Diaphragma ohne Einfluß.



Die Instrumentalkonstante C wird mit einer Hefnerlampe im Abstande R_1 vor m als $C = r_1^2/R_1^2$ bestimmt. — Für sehr helle Lichter dienen bei m mehrfache Milchgläser mit gleichfalls empirischer Konstante. — Als Fehlerquelle ist die etwaige Inkonstanz der Benzinlampe, besonders auch wegen Luftverschlechterung um die Flamme (siehe S. 329 oben), und der nicht leicht genau zu definierende Abstand r zu beachten.

Das Photometer mißt nach Fortnahme von m auch Flächenhellen (Himmel, Wände usw.), wobei eine mäßige Schrägstellung sowie der Abstand von der, hinreichend großen, Fläche ohne Einfluß ist. Die Helligkeit ist $E = C'/r^2$ Meterkerzen; C' bestimmt man mittels der Einstellung im Dunkelzimmer auf einen, aus R m Abstand (R etwa $= \frac{1}{2}$) von einer Hefnerlampe senkrecht erleuchteten, weißen Karton. Findet man hier die Einstellung r_1, so ist $C' = r_1^2/R^2$. Die Einheit der Flächenhelle ist hier von dem beleuchteten Karton entnommen, also von dessen Beschaffenheit abhängig. Die Definition der Flächenhelle S. 330 und die jetzige sind auseinander zu halten.

Leonh. Weber, Wied. Ann. 20, 326. 1883; eingehende Darstellung der Beleuchtungsphotometrie: Handb. d. Hygiene IV. 1895. — Ein Milchglasphotometer mit Abschwächung durch Polarisatoren s. bei Martens, Verh. D. Ph. Ges. 1903, 149.

7. **Photographie.** Zwei Beleuchtungen sind (photographisch) gleich, wenn sie in derselben Zeit dieselbe Färbung eines lichtempfindlichen Objekts bewirken. Als Normalskale dient eine Skale von Wirkungen, die von der Normalquelle aus verschiedenen gemessenen Abständen hervorgebracht sind. Eine so gemessene Lichtstärke gibt im allgemeinen kein Urteil über die Größe der Lichtwirkung auf das Auge. Außerdem hängt sie natürlich von dem gewählten lichtempfindlichen Präparat ab.

Vgl. z B. Hartmann, ZS f. Instr 1899, 97.

III. Meßbare Abschwächung der einen Lichtquelle.

8. **Rotierender Sektor.** Durch eine rasch umlaufende (oder zwischen zwei umlaufenden Paaren von totalreflektierenden Prismen feststehende) undurchsichtige Scheibe mit Sektoröffnungen, deren Größe meßbar verändert werden kann, wird eine Strahlung bis zur Gleichheit mit einer anderen abgeschwächt.

Über Verstellbarkeit und Ablesung des Sektors während des Laufes s. Lummer u. Brodhun, ZS f. Instr. 1896, 304; Brodhun, ib. 1897, 10.

9. **Verstellbares Diaphragma.** Meßbar einzuschnürende Öffnungen (Spalt mit verstellbaren Rändern, vgl. Nr. 15; Irisblende; verstellbarer Sektor) sind photometrisch einerseits auf leuchtende Flächen anwendbar, andererseits vor Instrumenten, die mittels Linsen das auffallende Lichtbündel vereinigen.

10. **Absorbierende Mittel; Rauchgläser.** Schätzungen relativer Lichtstärken lassen sich ausführen, indem man das hellere Licht durch vorgesetzte absorbierende Schichten auf die Stärke des anderen abschwächt. Der Bruchteil des durchgelassenen Lichtes wird nach einer der angegebenen Methoden bestimmt. Es gibt Rauchgläser, deren Durchlässigkeit von der Farbe des Lichtes merklich unabhängig ist. Haben mehrere solche Gläser die einzelnen Durchlässigkeiten d_1, d_2, $d_3 \ldots$, so besitzen sie hinter einander gestellt die Durchlässigkeit $d_1 d_2 d_3 \cdots$.

IV. Polarisations-Photometrie.

Passiert linear polarisiertes Licht noch einen Polarisator und bilden die Schwingungsrichtungen (oder, was zum gleichen Resultat führt, die Polarisationsrichtungen) beider den Winkel φ mit einander, so wird, von einem durch Reflexion verloren gehenden Bruchteil abgesehen, der Bruchteil $\cos^2\varphi$ durchgelassen Denn wenn A die Amplitude des auffallenden, so ist $A' = A\cos\varphi$ die des durchgelassenen Lichtes. Die Intensität des Lichtes aber ist dem Quadrate der Amplitude proportional Malus). Die Methoden setzen voraus, daß das zu messende Licht nicht schon polarisiert ist.

11. Durch sukzessive Vergleichung. Die erste Hälfte eines Gesichtsfeldes werde durch linear polarisiertes Hilfslicht beleuchtet, welches heller ist als eins der zu vergleichenden Lichter. Ein drehbarer Nicol läßt in einer bestimmten Stellung auf seinem Teilkreise dieses Gesichtsfeld dunkel erscheinen. Die zweite Hälfte wird mit einem der Lichter beleuchtet und erscheine mit der ersten gleich hell, wenn der Nicol aus der Dunkelstellung um ω_1 gedreht wird. Die andere Lichtquelle bedinge dann ebenso aus derselben Entfernung den Winkel ω_2. Dann verhalten sich die Lichtstärken

$$J_1 : J_2 = \sin^2 \omega_1 : \sin^2 \omega_2.$$

12. Durch direkte Vergleichung. Man polarisiert die beiden zu vergleichenden Lichter senkrecht zu einander, beleuchtet mit ihnen aus gleicher Entfernung die beiden Hälften eines Gesichtsfeldes und beobachtet diese durch einen drehbaren Nicol. Sind φ_1 und $\varphi_2 = 90 - \varphi_1$ die Winkel, welche von der Schwingungsrichtung des Nicol mit denen der beiden Lichter eingeschlossen werden, wenn die Hälften gleich hell erscheinen, so ist

$$J_1 : J_2 = \cos^2 \varphi_2 : \cos^2 \varphi_1 = \operatorname{tg}^2 \varphi_1.$$

Fehlerquellen werden durch Auswechseln der Lichter erkannt und eliminiert (Zöllner; s. auch Nr. 16).

13. Gleiche Mengen senkrecht zu einander polarisierten Lichtes mit einander gemischt verhalten sich wie gewöhnliches Licht. Man kann also die Gleichheit beider Mengen durch ein Polariskop (z. B. Savart) an dem Ausbleiben der Interferenzerscheinungen erkennen. Dieses Mittel ist zu exakter Photometrie gut zu verwenden (Arago; Wild, Pogg. Ann. 118, 193. 1863).

V. Photometrie im Spektrum.

Die Aufgabe, zwei Lichtstärken zu vergleichen, ist streng nur gelöst, wenn die Stärken der einzelnen von ihnen ausgesandten Farben mit einander verglichen sind.

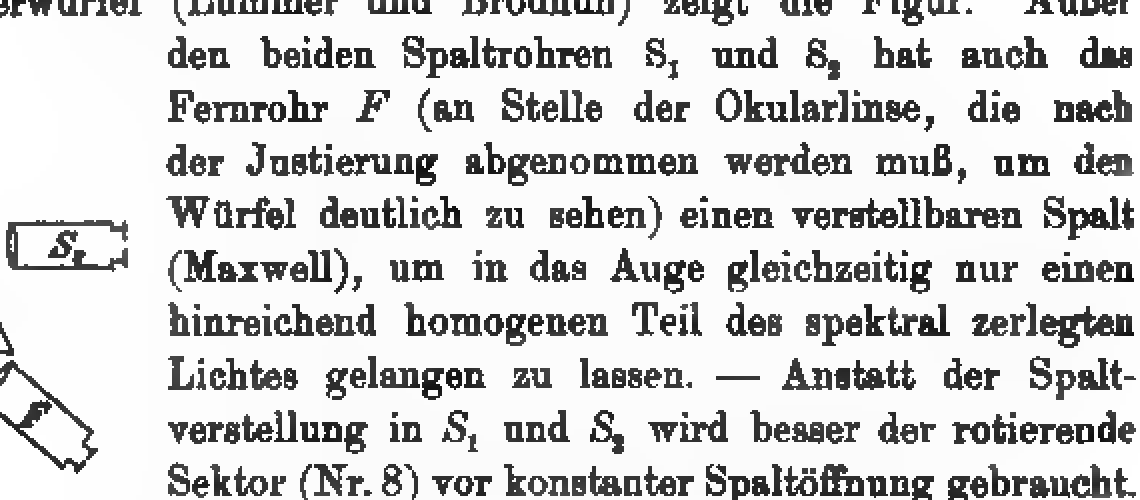
14. Vergleichsfeld. An die Stelle der Skale im Spektralapparat (64) kommt eine horizontal verschiebbare Öffnung, die konstant beleuchtet wird (Petroleumlampe) und deren von dem Prisma zurückgeworfenes weißes Bild sich auf den zu untersuchenden Teil des Spektrums projiziert. Durch eine geeignete Kombination von Rauchgläsern (vgl. Nr. 10) schwächt man das Licht der Lampe bis zu einem solchen Bruchteile ab, daß jenes Bildchen gerade nicht mehr auf dem Spektrum sichtbar ist. Diesem

Bruchteile wird die Lichtstärke in dem betreffenden Teil des Spektrums proportional gesetzt. Das Verfahren ist instrumentell einfach, aber unvollkommen.

15. Verstellbarer Spalt. Durch die beiden Hälften eines Spaltes, die einzeln zu gemessenen Breiten verstellbar sind, werden von zwei zu vergleichenden Lichtquellen zwei sich berührende Spektra entworfen. Sind an einer Stelle die Helligkeiten der Spektra gleich, so verhalten sich die Intensitäten für diese Farbe der Spektra nahe umgekehrt wie die Spaltbreiten. Große Helligkeitsunterschiede werden zuvor durch Rauchgläser (10) in einem bekannten Verhältnis reduziert.

Über 14 u. 15 vgl. Vierordt, Pogg Ann. 137, 200 1869; 140, 172 1870.

Ein Spektrophotometer zu genauer Messung mit dem Photometerwürfel (Lummer und Brodhun) zeigt die Figur. Außer

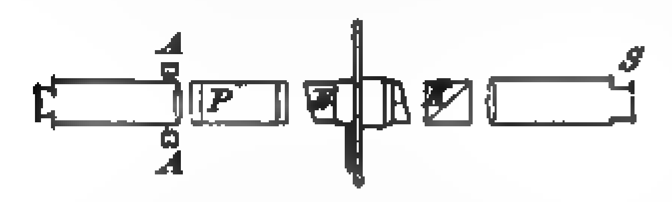


den beiden Spaltrohren S_1 und S_2 hat auch das Fernrohr F (an Stelle der Okularlinse, die nach der Justierung abgenommen werden muß, um den Würfel deutlich zu sehen) einen verstellbaren Spalt (Maxwell), um in das Auge gleichzeitig nur einen hinreichend homogenen Teil des spektral zerlegten Lichtes gelangen zu lassen. — Anstatt der Spaltverstellung in S_1 und S_2 wird besser der rotierende Sektor (Nr. 8) vor konstanter Spaltöffnung gebraucht.

Näheres bei Lummer und Brodhun, ZS f Instr. 1892, 132.

16. Spektro-Photometer mit Polarisatoren. Auch die unter IV genannten Methoden lassen sich durch Einschieben von Prismen zum Photometrieren der einzelnen Farben von Lichtquellen benutzen.

Glan'sches Photometer; Fig. Seitenansicht. Der Spalt S ist in eine obere und eine untere Hälfte geteilt. In diese beiden Hälften treten die beiden zu vergleichenden Lichter ein, das eine etwa durch ein totalreflektierendes Prisma hineingeworfen. Auf dem Wege durch das Spaltrohr werden die beiden Lichter



durch ein achromatisiertes doppelbrechendes Prisma K mit horizontaler brechender Kante senkrecht zu einander polarisiert; die andere Schwingungskomponente von jedem ist abgeblendet. Im Fernrohr erscheinen die von dem geradsichtigen, im Aufriß gezeichneten Prisma P entworfenen Spektra beider Lichter übereinander; durch passendes Ausziehen des Spaltrohres bringt man sie an einer beliebigen Stelle zur Berührung.

Durch verstellbare Schirme werden die Spektra bis auf den jeweiligen zur Untersuchung bestimmten Teil abgeblendet. — Das Fernrohr ist um die Axe A drehbar. Eine Skale erlaubt, gerade wie am Spektralapparat, die Farben durch Zahlen zu bezeichnen. — Vor dem Spaltrohr sitzt ein drehbarer Nicol N mit Teilkreis.

Die Drehung des Nicol werde von derjenigen Stellung aus gezählt, bei welcher die von dem Lichte I erleuchtete Hälfte des Gesichtsfeldes maximal dunkel ist. Man dreht nun den Nicol um den Winkel φ, bis beide Hälften gleich hell erscheinen. Dann ist für die eingestellte Farbe das Verhältnis der Beleuchtungen beider Spalthälften $E_2 : E_1 = k\,\mathrm{tg}^2\varphi$; vgl. Nr. 12. k ist ein von 1 nicht sehr verschiedener Faktor, welcher aus ungleichen Schwächungen der beiden Lichter im Instrument entsteht; er ergibt sich, wenn man beide Hälften, etwa durch eine Flamme hinter sehr homogenem Milchglas, gleich erleuchtet und auf gleiche Helligkeit einstellt, aus dem hierfür erforderten Drehungswinkel φ_0 des Nicol als $k = \mathrm{ctg}^2\varphi_0$.

Glan, Wied. Ann. 1, 351. 1877.

König'sches Photometer. Dieses unterscheidet sich von dem Glan'schen dadurch, daß die Okularlinse durch den Maxwell'schen Okularspalt ersetzt ist und daß zwischen dem Dispersionsprisma P und dem Fernrohr ein spitzwinkliges Biprisma von horizontaler Kante sitzt, welches dem Auge die beiden senkrecht zu einander polarisierten Lichter, in der Prismenkante zusammenstoßend, übereinander erscheinen läßt. Der Nicol mit Teilkreis liegt zwischen Auge und Okularspalt. A. König, Wied. Ann. 53, 785. 1894. — Eine vervollkommnete Konstruktion bei Martens u. Grünbaum, Ann. der Ph. 12, 984. 1903.

Andere Spektralphotometer z. B. Wild, Wied. Ann. 20, 452. 1883. Universalspektroskop mit Photometer Melander, ZS f. Instr. 1901, 224. Photometer für Ultraviolett J. Koenigsberger, Phys. ZS 4, 345. 1903.

VI. Spektralphotometrische Bestimmung eines Reflexionsvermögens oder eines Extinktionskoeffizienten.

A. Reflexionsvermögen. R.-V. R eines spiegelnden Körpers ist der bei senkrechtem Auffallen zurückgeworfene Bruchteil.

Das R.-V. durchsichtiger Körper ist durch ihr Brechungsverhältnis bestimmt, indem bei senkrechtem Durchtritt durch die Trennungsfläche zweier Mittel vom gegenseitigen B.-V. n nach Fresnel der Bruchteil $\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2$ zurückgeworfen wird; z. B. an gewöhnlichem Glase gegen Luft $(1{,}5-1)^2/(1{,}5+1)^2 = 1/25$. — Über schräge Inzidenz vgl. S. 322.

Undurchsichtige Körper, z. B. Metalle, zeigen individuell ein sehr verschiedenes, mit der Wellenlänge im allgemeinen wachsendes R.-V.;

vgl. Tab. 25a. — Der eindringende Bruchteil $1-R$ (oder $100-R$, falls nach Prozenten gerechnet wird) gibt das Absorptionsvermögen (Eindringungskoeffizient) der Oberfläche.

Der reflektierende Körper sei als Hohlspiegel vertikal aufgestellt. Ein wenig oberhalb des Krümmungsmittelpunktes befindet sich die kleine, nach vorn und hinten gleichstrahlende Lichtquelle (elektrisch glühender hochkant liegender Platinblechstreifen). Der Spiegel entwirft dann dicht unterhalb der Lichtquelle ein reelles Bild von ihr, dessen Lichtstärke mit der der Quelle selbst spektralphotometrisch gemessen wird.

Hagen u. Rubens, Ann. der Ph. 1, 352. 1900; vgl. auch S. 344.

3. Extinktionskoeffizient (Absorptionskoeffizient). Erleidet in einem absorbierenden Mittel ein Lichtstrom s bei dem Vordringen um eine Strecke dx den kleinen Verlust $-ds$, so heißt $-\frac{1}{s}\frac{ds}{dx}=k$ der Extinktionskoeffizient des Mittels. k hängt im allgemeinen von der Wellenlänge ab. Bei der Durchstrahlung einer Dicke d wird die eintretende Intensität s dann geschwächt zu

$$s'=s\cdot\varepsilon^{-kd}.$$

Ist s/s' gemessen, so findet man also

$$k=\frac{1}{d}\lg\mathrm{nat}\frac{s}{s'}=\frac{1}{d}\cdot 2{,}30\lg\mathrm{brigg}\frac{s}{s'}.$$

s/s' wird nach dem vorigen gemessen, indem die eine Spalthälfte frei gelassen, die andere mit dem absorbierenden Körper bedeckt wird.

Mit den Durchgängen durch die Trennungsfläche verschieden brechender Mittel sind infolge der Reflexion Schwächungen des Lichtes verbunden; nach A lassen sie sich berechnen und als Korrektion ins Resultat einführen. Statt dessen kann man aber auch die Schwächungen auf beiden Wegen praktisch gleich machen. Zu dem Zweck bedeckt man die beiden Spalthälften mit verschieden dicken, gleich begrenzten Schichten des Körpers und setzt für d die Differenz der beiden Dicken in Rechnung. Bei absorbierenden Gläsern kann man auch die eine Spalthälfte mit einem dünnen farblosen Glase, bei Lösungen eines farbigen Salzes in einem Glastroge kann man sie mit einem kongruenten Troge bedecken, der nur Lösungsmittel enthält, und dann von der Schwächung absehen.

An Stelle der Größe k werden auch andere Konstanten zum Definieren der Absorption gewählt. S. z. B. Martens u. Grünbaum, l. c. (S. 337).

72a. Wärmestrahlung (Melloni 1831 ff.; Knoblauch 1847 ff.).

Die Energie einer Strahlung wird gemessen, indem man sie durch Absorption an einer mit Lampenruß oder mit Platinschwarz überzogenen Oberfläche in Körperwärme überführt. — Auch eine dem Auge schwarz erscheinende Fläche absorbiert selten vollständig, oft nur zur Hälfte. Lampenruß bez. Platinschwarz, nach dem Rezept von Lummer-Kurlbaum hergestellt (8, 18), absorbieren die Strahlung eines schwarzen Körpers von 100°, deren Intensitätsmaximum bei $\lambda = 8\mu$ liegt, bis zu 95 bez. 97%. Diese Grenze wird bei einer Schichtdicke von 80 bez. 200 mg/qdm erreicht. Kurlbaum, Wied. Ann. 67, 846. 1899.

Strahlungsquellen: Bogenlampe, Nernstlampe, glühendes Platin, leuchtende Flamme, Außenwand eines Siedegefäßes usw. Bis 100° dient z. B. der bekannte, mit warmem Wasser gefüllte Leslie'sche Würfel. Metall, welches durch einen elektrischen Strom geheizt wird, ist am leichtesten auf eine gewünschte Temperatur (48) zu erwärmen.

I. Ausstrahlung und Einstrahlung.

Kirchhoff'scher Satz. Das Emissionsvermögen e eines Körpers für Wärme einer bestimmten Art (Wellenlänge) ist seinem Absorptionsvermögen a für dieselbe Art bei gleicher Temperatur proportional; $e/a = e_0$. Die Konstante e_0 ist das Emissionsvermögen einer schwarzen, d. h. einer alle Strahlen absorbierenden Fläche, denn deren Abs.-V. ist $= 1$, also $e : a = e_0 : 1$.

Theoretisch schwarzer Körper.

Schwarze Strahlung (Kirchhoff). So heißt die Strahlung, welche von einem schwarzen Körper ausgeht. Ihre Beschaffenheit hängt nur von der Temperatur ab. Vgl. unten.

Hilfssatz (Kirchhoff 1860). Eine an derselben beliebigen Oberfläche wiederholt reflektierte und jedesmal durch die Strahlung der Fläche selbst verstärkte Strahlung nimmt schließlich die Beschaffenheit der für die betreffende Temperatur geltenden schwarzen Strahlung an.

Beweis. e sei das Em.-V., a das Abs.-V., und es werde $1 - a = \alpha$ bezeichnet. Wir betrachten einen Strahl S. Bei der ersten Reflexion wird aS absorbiert, also $(1-a)S = \alpha S$ zurückgeworfen; hinzu tritt e, also haben wir nachher $e + \alpha S$. Nach der zweiten Reflexion kommt

$$e + \alpha(e + \alpha S) = e(1+\alpha) + \alpha^2 S;$$

nach der dritten $e + \alpha[e(1+\alpha) + \alpha^2 S] = e(1+\alpha+\alpha^2) + \alpha^3 S$ u. s. f., nach der $n$ten Reflexion also

$$e(1+\alpha+\alpha^2 \cdots + \alpha^{n-1}) + \alpha^n S.$$

α ist jedenfalls < 1, also schließlich $\alpha^n S = 0$ und, da $1 + \alpha + \alpha^2 \cdots = 1/(1-\alpha) = 1/a$ ist, so wird das Ganze $= e/a = e_0$; q. e. d.

Ein schwarzer Strahlungskörper wird hiernach durch einen Hohlraum mit so enger Öffnung dargestellt, daß die ausgesandten Strahlen im Innern vor ihrem Austritt hinreichend oft reflektiert worden sind. Ist

z. B. das Abs.-V. a der inneren Fläche $=0,9$, also $\alpha=0,1$ und $e=0,9e_0$, so hat ein von einem Punkte der Fläche ausgegangener Strahl e

nach der	0ten	1ten	2ten Reflexion
die Intensität	$0,9e_0$	$0,99e_0$	$0,999e_0$ usw.

Zweimalige Reflexion gibt also schon Annäherung auf 1/1000, so daß die Öffnung im allgemeinen relativ gar nicht so sehr eng genommen zu werden braucht.

S. hierüber besonders W. Wien u. Lummer, Wied. Ann. 56, 451. 1895.

Man bildet den Hohlraum aus Metall, innen mit Platinschwarz oder für höhere Temperaturen mit Eisenoxyduloxyd bekleidet. Zur Erwärmung dienen Bäder (8, 27). Sehr hohe Temperaturen erzielt man mit einem elektrisch geheizten (8, 29), vorn bis auf die Ausstrahlungsöffnung geschlossenen Cylinder aus dünnem Platinblech oder Kohle; die strahlende Hinterwand befindet sich im Innern an einer gleichmäßig geheizten Stelle.

Über die Ausführung vgl. Lummer u. Kurlbaum, Verh. D. Ph Ges. 1898, 106; Ann. der Ph. 5, 829. 1901; L. u. Pringsheim, Verh. D. Ph. Ges. 1903, 6.

Gesetze der schwarzen Strahlung.

Stefan-Boltzmann'sches Gesetz. Die vom schwarzen Körper bei der absoluten Temperatur T ausgestrahlte Gesamtenergie beträgt

$$S=\text{Const.}\, T^4. \qquad 1.$$

Bezogen auf qcm, sek u. Wasser-gr-Kal. ist Const. $=1,28\cdot10^{-12}$ (Kurlbaum).

Verteilung der Energie im Beugungsspektrum (65 I) des schwarzen Körpers. T sei die abs. Temperatur des strahlenden Körpers. Der Teil der gestrahlten Energie, welcher aus Wellenlängen zwischen λ und $\lambda+d\lambda$ besteht, sei mit $E d\lambda$ bezeichnet. Dann gilt für den Faktor E nach Wien-Planck:

$$E=C\frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}}-1} \quad 2a.; \quad \text{für kleine } \lambda T \text{ merklich } E=C\frac{\lambda^{-5}}{e^{\frac{c}{\lambda T}}} \quad 2b.$$

Wird λ in cm gemessen, so ist $c=1,46$ und bei 1 cm² Öffnung $C=0,896\cdot10^{-12}$ gr-Kal. cm²/sek.

Die Ordinate des höchsten Punkts der Kurve (s. Fig.) berechnet sich aus Gl. 2a

$$E_{max}=2,87\ 10^{-12}\,T^5. \qquad 3.$$

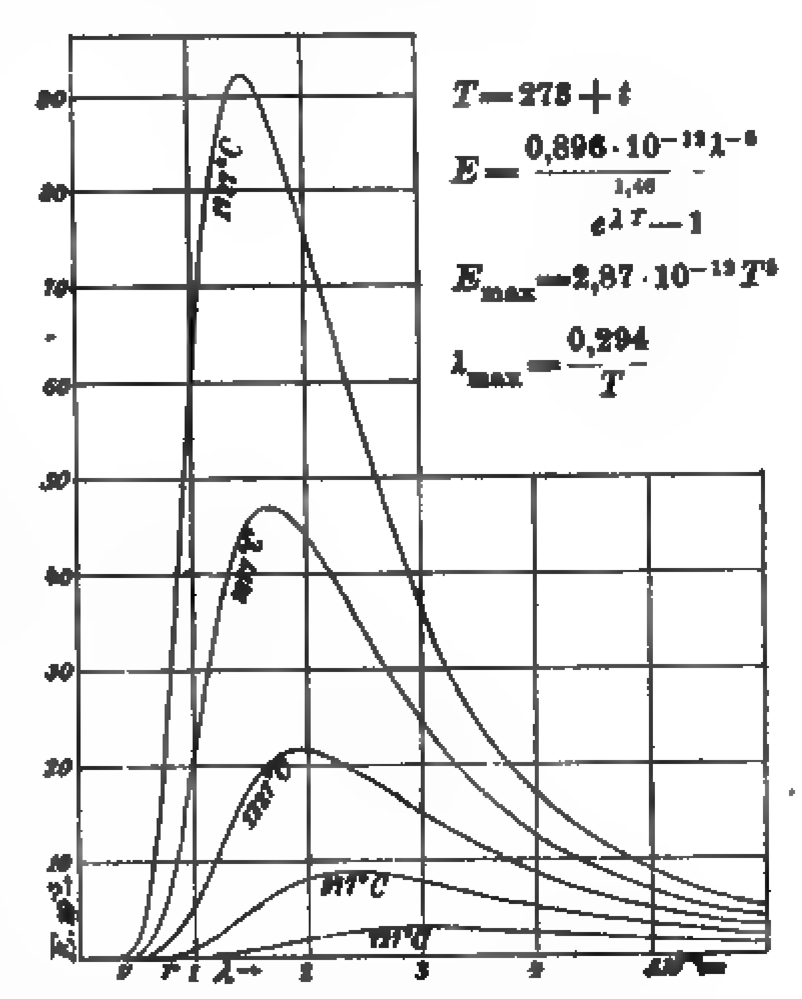
Sie liegt in höherer Temperatur bei kleinerer Wellenlänge (λ_{max}) oder größerer Schwingungszahl (N_{max}), und zwar ergibt sich aus Gl. 2a die Beziehung (Wien'sches Verschiebungsgesetz)

$$\lambda_{max}\ T=0,294 \quad \text{oder} \quad N_{max}=102\cdot10^9\,T/\text{sek}. \qquad 4.$$

Erst bei $T=3900°$ wird $\lambda_{max}=0,000076$ cm und liegt also im sichtbaren Spektrum. Gl. 2b (W. Wien) gilt im sichtbaren Spektrum ($\lambda\leqq0,000076$ cm) bis zu den höchsten Temperaturen (z. B. $T=4000°$; $\lambda T\leqq0,3$ cm·Grad) merklich genau. Die Energie ausgestrahlter Lichtwellen von bestimmter Wellenlänge wächst demnach mit der Temperatur, wenn A, a und b Konstanten bedeuten, nach dem Gesetz („logarithm. Gerade")

$$E=Ae^{-\frac{b}{T}} \quad \text{oder} \quad \lg E=a-b/T. \qquad 5.$$

Vgl. über das vorige die Abhh. von W. Wien, Lummer u. Pringsheim, Paschen, Planck, Rubens u. Kurlbaum 1893 bis 1901.



Die nach Formel 2a berechnete Größe E, welche also die Verteilung der gestrahlten Energie auf die unendlich vielen in ihr enthaltenen Wellenlängen darstellt, wird für die absoluten Temperaturen $T =$ 2000 1750 1500 1250 1000° (1727 1477 1227 977 727°C) durch die Kurven der Figur gegeben. Man sieht daraus, wie klein der Bruchteil ist, der in das sichtbare Spektrum — auf der Abszissenaxe durch die Strecke v bis r (violett bis rot) angedeutet — fällt. Bei der hellen Rotglut von 1250° abs. = 977° C ist dieser Teil in der Figur noch nicht darzustellen.

Abs. Temperaturmessung eines strahlenden schwarzen Körpers.

Bolometrische Methoden. Grundlagen hierzu sind in den Gl. 1 bis 4 enthalten. Gl. 4, $T = 0{,}294/\lambda_{max}$, verlangt nur die spektralbolometrische Bestimmung der Lage des Maximums, ist also grundsätzlich einfach, aber schwierig genau durchzuführen. Die Gleichungen 1 oder 3, nämlich

$$T = \sqrt[4]{S} \cdot 10^{12}/1{,}28 = 940 \sqrt[4]{S} \quad \text{und} \quad T = \sqrt[5]{E_{max}} \cdot 10^{12}/2{,}87 = 203 \sqrt[5]{E}$$

arbeiten genauer, weil nur 1/4 bez. 1/5 des Fehlers ins Resultat eingeht (2, 1). Um die Faktoren 940 bez. 203 verwenden zu können, müssen die Strahlungen absolut gemessen werden. Statt dessen kann man die Faktoren mittels einer Messung an einer schwarzen Strahlung von bekannter Temperatur (48) als Konstanten der gebrauchten Instrumentalanordnung bestimmen.

Vgl. Lummer u. Pringsheim, Verh. D. Ph. Ges. 1903, 3.

Spektralphotometrische Methode; s. auch 48a III u. 72 V. Aus der Helligkeit E eines bestimmten Spektralbezirks wird nach Gl. 5 die Temp. $T = b/(a - \lg E)$ erhalten. Die Konstante $b = c/\lambda = 1{,}46/\lambda$ kann aus der Wellenlänge λ des angewandten Lichtes berechnet werden; a wird wie oben empirisch ermittelt. — Vgl. Paschen u. Wanner, Berl. Sitzber. 1899, 5; Wanner, Ann. der Ph. 2, 141. 1900; Lummer u. Pringsheim, l. c.

Substanzen, die auf Ausstrahlung zu untersuchen sind, werden z. B. als Überzüge geheizter Körper, etwa des Leslie'schen Würfels

oder eines elektrisch geheizten Bleches, angewandt. Dabei ist die Temperaturgleichheit der Oberfläche mit dem Innern zu kontrollieren. S. z. B. Kurlbaum, Ann. der Ph. 2, 546. 1900. Vgl. auch III.

II. Messungsmittel.

a) Thermosäule (Nobili, Melloni). Die auf der einen Seite liegenden Lötstellen werden geschwärzt. Man mißt den ersten Ausschlag einer vorher ruhenden Galvanometernadel von mäßiger Dämpfung und setzt ihm die Strahlungsenergie proportional.

Säulen aus sehr feinen (0,1 mm dicken) Konstantan-Eisenelementen bieten den großen Massen der älteren Thermosäulen gegenüber Vorteile. Die bestrahlten Lötstellen tragen sehr feine kleine geschwärzte Silberscheibchen.

Vgl. Rubens, ZS f. Instr. 1898, 65. — Über Thermoelemente im Vakuum s. Lebedew, Ann. der Ph. 9, 209. 1902.

Ohne Galvanometer kann man mit einem leichten Thermobügel im starken magnetischen Felde arbeiten, der selbst durch die Bestrahlung abgelenkt wird (Radiomikrometer von Boys).

b) Bolometer (Langley). Man benutzt die Widerstandsänderung, die ein dünner Platin-, Eisen- oder Nickel-Draht oder Blechstreifen durch die bei der Einstrahlung entstehende Erwärmung erfährt. Platinbleche, mit einer zehnfach dickeren Silberschicht zusammengeschweißt, lassen sich auf $^1/_{2000}$ mm Dicke auswalzen; nach dem Aufspannen auf einen Rahmen wird das Silber abgeätzt.

Der zu bestrahlende Draht bildet den Zweig z. B. a einer von einem konstanten Strom durchflossenen Wheatstone'schen Brücke (93). Der Strom des konstanten Elements P ist einige Zeit vorher geschlossen und das empfindliche Galvanometer Q (83) durch Abgleichen der Widerstände auf Null gebracht. Die Bestrahlung des einen Zweiges bewirkt einen der Strahlungsenergie nahe proportionalen ersten Ausschlag.

Um von Temperaturschwankungen unabhängig zu sein, werden die Materialien benachbarter Zweige, z. B. a und c, b und d gleich gewählt.

Doppelte Empfindlichkeit erreicht man durch gleichzeitige Bestrahlung gegenüber liegender Brückenzweige.

Die Erwärmung des stromdurchflossenen Drahtes macht dessen Widerstand sehr empfindlich gegen Luftströmungen, die deswegen sorgfältig auszuschließen sind.

Über die Ausführung vgl. z. B. Lummer u. Kurlbaum, Wied. Ann. 46, 204. 1892.

c) Radiometer (Crookes). Die Drehgeschwindigkeit einer bestrahlten Lichtmühle dient wohl zur Schätzung der Strahlungsmenge. Ein empfindliches Meßinstrument bilden zwei symmetrisch seitlich an einem Quarzfaden befestigte geschwärzte Flügelchen, deren einer bestrahlt wird. Dem mit Spiegel und Skale gemessenen Ausschlage kann die Strahlungsmenge ungefähr proportional gesetzt werden.

Die Empfindlichkeit hängt vom Gasdruck (günstig etwa $^1/_{20}$ mm Quecksilberdruck; 36 VII) ab. Die Veränderlichkeit des Drucks ändert also die Empfindlichkeit. Daß die Strahlung ein Fenster passiert, ist natürlich nicht zu umgehen.

Vgl. Nichols, ZS f. Instr. 1897, 123.

III. Wärmespektrum.

Spektrale Zerlegung geschieht wegen der Absorption (Tab. 25) der übrigen Substanzen mit Steinsalz- oder Sylvin-, bis $\lambda = 8\mu$ auch wohl mit Flußspat-Prismen, oder auch mit Beugungsgittern aus Draht. Große, einigermaßen homogene Wellenlängen („Reststrahlen") liefert auch die wiederholte (4—6malige) Reflexion einer Strahlung an Körpern, die auswählend reflektieren, insbesondere an Flußspat oder Steinsalz.

Flußspat bez. Steinsalz liefern so $\lambda = 24\mu$ bez. 51μ; Rubens u. Nichols, Wied. Ann. 60, 418. 1897.

Das deutliche Spektrum wird, wie in der Optik, mittels eines Spalts und einer Linse aus Steinsalz usw., oder statt der letzteren, deren Brennweite sich mit der Wellenlänge stark ändert, besser mittels eines versilberten Hohlspiegels entworfen, welcher alle Wellen fast vollständig reflektiert (Tab. 25a).

Das „Spektralbolometer" unterscheidet sich von dem Spektralphotometer dadurch, daß an dem Platze des im Okular entstehenden Spaltbildes sich ein Bolometerdraht oder eine Thermosäule befindet. — Je schwächer die Strahlung, desto höher wachsen die Ansprüche an vollkommenes Abblenden von diffus reflektierten oder anderweitig auftretenden störenden Nebenstrahlen.

Über die Anordnung für verschiedene Aufgaben vgl. besonders die Arbeiten von Lummer, Kurlbaum, Paschen, Pringsheim seit 1896.

Die Messung von Reflexionsvermögen in einer Anordnung, ähnlich wie 72 VI A bei Hagen u. Rubens, Ann. der Ph. 8, 1. 1902; 11, 873. 1903. Über Absorptionsversuche ib. 8, 432. 1902.

IV. Absolute Messung einer Strahlungsenergie.

Starke Strahlungen, z. B. die der Sonne, lassen sich direkt kalorimetrisch messen; Pyrheliometer von Pouillet.

Die Angabe eines Bolometers kann auf absolutes Maß zurückgeführt werden, indem man den bestrahlten Zweig, wie in Fig. zu 85, 4 als Viereck gestaltet, so daß er durch einen von dem Brückenstrom unabhängigen schwachen Strom gewärmt werden kann, der auf das Galvanometer nicht direkt wirkt. Ruft dieser Heizstrom von i_0 A vermöge der Widerstandsänderung, die er durch Erwärmung des bestrahlten Zweiges bewirkt, den Galvanometerausschlag e_0 hervor, so bedeutet ein bolometrischer Ausschlag e (mit demselben Brückenstrom), daß der Bolometerzweig (Widerstand $= w$ Θ) die Strahlungsenergie $e \cdot 0{,}239\, i_0^2 w / e_0$ gr-Kal/sek aufnimmt. Vgl. Anh. 30.

Näheres bei Kurlbaum, Wied. Ann. 65, 746. 1898.

Magnetismus.

72b. Allgemeines.

I. Magnetstäbe.

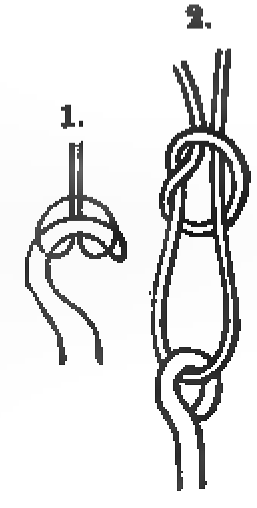
Material. Am besten ist Wolframstahl. Die geeignetste Härtungstemperatur ist etwa 800° (Kirschrotglut). Überhitzen verringert die Magnetisierbarkeit, ohne die Haltbarkeit zu erhöhen. Überhitzte Stäbe lassen sich durch Neuhärten nach vorhergegangenem Ausglühen verbessern. Vgl. 8, 14 u. Holborn, ZS f. Instr. 1891, 113.

Gestalt. Die Magnetisierbarkeit wächst mit dem Verhältnis der Länge zu der Querdimension. Röhrengestalt kann sehr vorteilhaft sein. — Das magnetische Moment, welches man Stäben aus gleich beschaffenem Material von ähnlicher Gestalt erteilen kann, ist ihrer Masse proportional.

Spezifischen Magnetismus oder **Magnetisierung** eines Stabes nennt man das durchschnittliche magn. Moment seiner Volumeinheit oder auch wohl seiner Masseneinheit. 1 cm^3 wiegt etwa 7,5 gr. Bei sehr gestreckter Gestalt kann man auf 1 gr etwa 100 CGS-Einheiten (Anh. 20), bei dem Verhältnis Länge: Dicke = 10 : 1 etwa 35 permanent erreichen.

Haltbarkeit. Ein frisch magnetisierter Stab verliert einen Teil seines Magnetismus zuerst rasch, später langsamer, durch äußere Einflüsse und auch dadurch, daß der gehärtete Stahl schon bei gewöhnlicher Temperatur ein Anlassen erfährt. Der stationäre Zustand wird rascher erreicht, wenn man den gehärteten Stab gleich und sodann nach dem Magnetisieren jedesmal mehrere Stunden lang im siedenden Wasserdampf behandelt (Strouhal und Barus, Wied. Ann. 20, 662. 1883).

Polabstand. Für Fernwirkungen eines gewöhnlichen Magnets kann man die beiden Magnetismen in zwei Punkten, den Polen (Fernpolen) konzentriert annehmen. Der Polabstand („reduzierte" oder „virtuelle" Länge) beträgt durchschnittlich etwa $^5/_6$ der Stablänge. F. K. u. Hallock, Wied. Ann. 22, 411. 1884. Vgl. Anh. 20 u. 76b.



Aufhängung. Größere Magnete werden, wenn man über eine beträchtliche Höhe, etwa von der Zimmerdecke herab, verfügt, z. B. an hartem Messingdraht aufgehängt, der bei großer Tragkraft einen mäßigen Elastizitätsmodul (Tab. 20) besitzt. Die Bandform (etwa käufliches Konstantanband) gibt bei gleicher Tragkraft ein kleineres Torsionsmoment als der kreiscylindrische Draht. Sonst nimmt man Coconfäden (8, 20; 77 Schluß) oder Bündel von solchen. Die letzteren stellt man durch Aufwickeln eines langen Fadens über 2 Glasstäbe her, die im geeigneten Abstande an der Tischkante befestigt sind. Die beiden Enden knüpft

man zusammen, spannt möglichst gleichmäßig und schlingt die äußersten Enden des Bündels um den oberen bez. den unteren Aufhängestift (Fig. 1), vor dem festen Anziehen die Spannung nochmals möglichst ausgleichend.

Einzelne Fäden schlingt man, wie Fig. 2, v. S. gezeichnet, wobei der Knoten schließlich festgezogen wird, aber so, daß der Aufhängefaden sich noch fest schlingen läßt. Das Aufhängen in losen Schlingen ist zu vermeiden. Freie Fadenenden werden kurz abgeschnitten, um nicht Reibung zu bewirken.

Für leichte Magnete können Quarzfäden dienen (8, 21), die mit Schellack angeklebt werden.

II. Verschiedene Umstände.

Astasierung einer Magnetnadel. Vorzüglich für sehr empfindliche Galvanometer wird oft eine Verminderung der erdmagnetischen Direktionskraft verlangt. Man gebraucht zu diesem Zwecke Nadelpaare mit entgegengerichteten Polen; oder man umgibt das Instrument mit einem „Schutzring" von weichem Eisen, der durch seinen eigenen Magnetismus die Wirkung des Erdmagnetismus abschwächt. Dauernden Änderungen sind aus weichem Eisendraht gewickelte Körper weniger unterworfen als massive. — Oder man hängt die Nadel bifilar in verkehrter Lage auf; oder endlich, es wird ein Hilfsmagnet in geeigneter Lage (nicht zu nahe) fest angebracht, der dem Erdmagnetismus entgegenwirkt. In beiden letztgenannten Fällen werden freilich auch die Deklinationsschwankungen vergrößert. Die letzteren Mittel kann man auch verwenden, um umgekehrt die Direktionskraft zu verstärken oder der Nadel ein anderes Azimut zu geben als das nordsüdliche.

Erdmagnetische Variationen. Die Unruhe des Erdmagnetismus kann zu Zeiten die Beobachtungen wesentlich stören. Gewöhnlich ist die Unruhe von Mittag an am geringsten, doch kommen magnetische Störungen zu allen Tageszeiten vor.

Bestimmung des Astasierungsfaktors. Hierunter sei das Verhältnis D/D' der Direktionskraft vor und nach der Astasierung verstanden. Wenn diese durch einen äußeren Magnet oder bifilar vorgenommen ist, kann sie wie folgt bestimmt werden. Ein bestimmter Magnet bewirke an der astasierten Nadel mit dem Skalenabstand A' aus der Entfernung r' den Ausschlag e', an einer nicht astasierten in derselben relativen Lage (z. B. immer erste Hauptlage; vgl. 72) mit A und r den Ausschlag e, so ist $\frac{D}{D'} = \frac{e' A}{e A'}\left(\frac{r'}{r}\right)^3$.

Äußere Störungen. Magnetische Störungen aus der Umgebung durch bewegte Magnete oder veränderliche Ströme, oder durch elektrische Straßenbahnen können die Anwendung des gewöhnlichen Magnetspiegels unmöglich machen. Für mäßige Empfindlichkeit sind unter solchen Verhältnissen Galvanometer mit gut astasierten Nadelpaaren brauchbar; über Magnetometer s. 75a. Die leichten Nadelpaare sehr empfindlicher Instrumente gut zu astasieren ist sehr mühsam. Man kommt hier deshalb

weiter durch den Schutzring oder eine vollständige Einhüllung des Instruments, einschließlich des Multiplikators, mit weichem Eisen Durch dicke oder geeignet angeordnete mehrfache Eisenhüllen (vgl. insbesondere Du Bois u. Wills, Wied. Ann. 63, 348; 65, 1; Ann. der Ph. 2, 78. 1897—1900) lassen äußere Einwirkungen sich bis auf einen kleinen Bruchteil abschwächen. An Stelle der alsdann auch wegfallenden erdmagnetischen Direktionskraft tritt die Elastizität des Aufhängefadens, wobei Material von kleiner elastischer Nachwirkung (Stahl, besser ausgeglühtes Platin oder Platiniridium, Quarz) anzuwenden ist. Man bringt auch wohl im Innern der Eisenhülle einen Richtmagnet an. Auf dauernde Konstanz des magnetischen Feldes wird nicht zu rechnen sein.

Mechanischen Erschütterungen unterliegen niedrige Systeme, z. B. direkt aufgehangene magnetische Spiegel, besonders stark. Häufig läßt die Störung sich dadurch vermindern, daß die magnetische Axe nicht genau horizontal liegt; dann dämpft der Kupferdämpfer auch vertikale Drehungen.

Erdmagnetische Instrumente. Für Reise- und ähnliche Zwecke sind kompendiöse Instrumente, teilweise zugleich für Deklination und Intensität bestimmt, hergestellt worden von Fox, Lamont, Meyerstein, Neumayer, Weber, Wild u. a. (vgl. 78).

Untersuchung von Materialien auf ihren unmagnetischen Zustand. Am einfachsten bringt man dieselben dicht an den Pol eines aufgehangenen kräftigen Magnets mit Spiegel, z. B. an den Magnet eines Bifilarmagnetometers mit dünnem Deckglase (74 II). Ganz unmagnetisch sind wenige Körper; ziehen sie nicht an, so stoßen sie ab (sind diamagnetisch). Hierher gehören die meisten organischen Körper, Wasser, reines Kupfer. Bei Metallen übersehe man nicht, daß die Annäherung eines Leiters an sich Abstoßung bewirkt und umgekehrt. Man halte oder lege die Stücke also ruhig neben den Magnetpol. Der Magnetismus von Kupfer und dgl. stammt nicht selten von Eisenteilchen an der Oberfläche, auch von eisenhaltigem Lack. Abkochen mit verdünnter Schwefelsäure hilft dann. Nachher mit heißem Wasser reinigen!

Über starke Felder s. 114.

78. Horizontal-Intensität des Erdmagnetismus (Gauſs 1836).

Intensität der magnetischen Kraft oder magnetische Feldstärke an einem Orte heißt die Kraft, welche daselbst auf einen Magnetpol Eins ausgeübt wird. Der Pol Eins ist dadurch definiert, daß er auf einen ihm gleichen Pol aus dem Abstande Eins die Kraft Eins, im CGS-System also 1 Dyne ausübt (vgl. Anh. Nr. 7 u. 19—21).

Auf die gewöhnliche Magnetnadel wirkt die Horizontalkomponente H der Intensität. Die Messung von H besteht aus einer Schwingungsdauer- und einer Ablenkungsbeobachtung Erstere gibt, wenn das Trägheitsmoment des schwingenden Magnets bekannt ist, das Produkt $P = MH$ aus dessen magnetischem Moment M und der Intensität H.

Der Quotient $Q = M/H$ wird gefunden, indem man die Ablenkung einer Magnetnadel durch denselben Magnet beobachtet. Aus P und Q können M und H einzeln berechnet werden. Die Methode kann also auch zur Bestimmung des magn. Moments eines Stabes dienen.

Bei dem Gauß'schen Verfahren werden für M/H zwei Ablenkungen aus verschiedenen Entfernungen beobachtet; einfacher genügt die Ablenkung aus einer Entfernung, wenn man den „Polabstand" der Magnete einführt. Den Magnetismus gestreckter Stäbe kann man bei Fernwirkungen in zwei Punkten konzentriert annehmen, die um etwa $^1/_{12}$ der Länge von den Enden entfernt sind. Der Polabstand eines Magnets beträgt also etwa $^5/_6$ der ganzen Länge.

H liegt im mittleren Europa um den Wert 0,2 CGS herum (Tab. 38). Bei der Bestimmung mit gewöhnlichen Mitteln wird eine Genauigkeit bis auf $\pm$ 0,001 befriedigend zu nennen sein. Wo keine äußeren Störungen durch benachbarte Eisenmassen vorhanden sind, wird der aus Tab. 38 entnommene Wert meist eine ähnliche Genauigkeit haben, in Gebäuden mit Eisenkonstruktionen dagegen sind die Lokaleinflüsse oft beträchtlich. — Während der Messung von H hat man darauf zu sehen, daß nicht zufällig (in der Tasche oder Schieblade, oder als Fensterstange, Nagel im Tischbrett, als drahtgeheftetes Notizbuch, auch etwa als Stahlbrille) unbeabsichtigte Einflüsse vorhanden sind.

Zuweilen wird noch die [mm, mg, sek]-Einheit gebraucht, sie ist 10 mal kleiner als die CGS-Einheit. — Für die letztere gilt jetzt die Bezeichnung 1 Gauſs.

I. Bestimmung von MH durch Schwingungen.

Man hängt den Magnet am Faden auf. Es sei t die auf unendlich kleine Bogen reduzierte Schwingungsdauer (28), K das Trägheitsmoment des Magnets in gr·cm² (29), Θ das Torsionsverhältnis des Fadens (77), dann ist das gesuchte Produkt P

$$P \text{ oder } MH = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\Theta)}. \qquad 1.$$

Denn die Direktionskraft ist $MH(1+\Theta)$, und das Quadrat einer Schwingungsdauer geteilt durch π^2 gibt das Verhältnis des Trägheitsmoments zur Direktionskraft (Anh. Nr. 12).

Über die Bestimmung mit dem Bifilar oder der Wage vgl. IV u. V.

II. Bestimmung von M/H durch Ablenkungen.

Denselben Magnet läßt man aus gemessener Entfernung r, und zwar um Unsymmetrien zu eliminieren von zwei Seiten, eine Magnetnadel ablenken. Man wählt eine der beiden folgenden „Hauptlagen".

Erste Hauptlage. c ist der Mittelpunkt der Bussole, NS

der magnetische Meridian. Der Magnet wird folgeweise in den gezeichneten Lagen östlich oder westlich von der Nadel in der Höhe der letzteren hingelegt.

Die Abstände der Magnetmitte in a oder b vom Zentrum der Bussole sind gleich, also $r = \frac{1}{2} ab$. Der Abstand soll mindestens die dreifache Länge des Magnetstabes betragen.

N

a c b

S

Der Stab befinde sich z. B. in a. Man beobachtet den Ausschlag, wobei man beide Spitzen der Nadel abliest und das Mittel nimmt. Dann dreht man den Stab um 180°, wobei sein Mittelpunkt wieder in a zu liegen kommt, und beobachtet den Ausschlag ebenso. Aus beiden Werten wird abermals das Mittel genommen. Dieses ist der zur Stellung a gehörige Ablenkungswinkel. Geht die Bezifferung der Grade nicht von der Nullstellung nach beiden Seiten, sondern durch diese Stellung hindurch, so rechnet man natürlich einfacher, wenn man die beiden Einstellungen von einander abzieht und die Hälfte dieses doppelten Winkels nimmt. Siehe das Beispiel.

Genau ebenso wird in der Stellung b verfahren und dann aus den nahe gleichen, in beiden Stellungen beobachteten Ablenkungswinkeln das Mittel genommen. Dieser aus acht Ablesungen entstandene Wert heiße φ.

Durch die obige Kombination der Ablesungen eliminiert man die folgenden möglichen Unsymmetrien: 1. durch das Ablesen beider Spitzen eine Exzentrizität der Kreisteilung; 2. durch das Drehen des Stabes um 180° eine Abweichung der Stabaxe von der genauen Ostwestrichtung und eine Unsymmetrie des Stabmagnetismus; 3. durch das Ablenken von beiden Seiten eine Differenz zwischen Bussolenmittelpunkt und dem Mittelpunkt des Maßstabes, sowie einen unsymmetrischen Nadelmagnetismus. — Zugleich wird das Resultat in ähnlicher Weise genauer wie durch achtmaliges Wiederholen einer Beobachtung.

Ähnliche Gesichtspunkte kommen bei den meisten magnetometrischen und galvanometrischen Messungen zur Geltung.

Zur Berechnung von M/H führen wir die Polabstände $\mathfrak{L}$ des Stabes bez. $\mathfrak{l}$ der Nadel ein (**76b**) und berechnen eine Korrektionskonstante η (vgl. Anh. 20)

$$\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2.$$

Dann wird der gesuchte Quotient

$$Q \text{ oder } \frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{r^3 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \eta / r^2}. \qquad 2.$$

Bei der Bestimmung mit gewöhnlichen Mitteln wird die Annahme des Polabstandes gleich $^5/_6$ der Stab- oder Nadellänge immer genau genug sein.

Zweite Hauptlage. Der Ablenkungsstab wird nördlich und südlich von der Bussole c in gleichen Entfernungen hingelegt. Im einzelnen wird das vorhin beschriebene Verfahren befolgt, sowohl bei den Beobachtungen wie bei der Berechnung des Mittels. Es sei wieder $r = \frac{1}{2} ab$ und φ der mittlere Ablenkungswinkel.

a —

c

b —

Für die zweite Hauptlage gilt $\eta = -\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2$. $\frac{M}{H}$ wird nach der vorigen Formel ohne den Faktor $\frac{1}{2}$ berechnet

$$\frac{M}{H} = \frac{r^3 \operatorname{tg} \varphi}{1 + \eta / r^2}. \qquad 3.$$

Aus $P = MH$ und $Q = M/H$ wird gefunden

$$H = \sqrt{\frac{P}{Q}}.$$

Um Variationen des Erd- und des Stabmagnetismus, letztere besonders durch Temperaturänderung, möglichst auszuschließen, werden die Messungen von MH und M/H rasch hintereinander ausgeführt. Über Korrektionen vgl. 74 und 76a.

Beispiel. I. Bestimmung von MH.

Trägheitsmoment. Der rechteckige Magnetstab war 10,00 cm lang und 1,25 cm breit. Er wog 119,86 gr. Nach 29 I folgt

$$K = 119{,}86(10{,}00^2 + 1{,}25^2)/12 = 1014{,}4 \text{ cm}^2 \text{ gr.}$$

Torsionsverhältnis. Eine ganze Umdrehung des Aufhängefadens drehte den Magnet um 1,4°. Also ist (77) $\Theta = \frac{1{,}4}{360 - 1{,}4} = 0{,}0039$.

Schwingungsdauer. Beobachtet $= 7{,}414$ sek, bei einem Schwingungsbogen von 30°. Also auf unendlich kleine Schwingungen reduziert (28)

$$t = 7{,}414 - 7{,}414 \cdot 0{,}0043 = 7{,}382 \text{ sek.}$$

Man hat also $MH = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\Theta)} = \frac{3{,}1416^2 \cdot 1014{,}4}{7{,}382^2 \cdot 1{,}0039} = 183{,}01 \text{ cm}^2 \text{gr/sek}^2$.

II. Bestimmung von M/H.

Der vorige Magnet lenkte aus der Entfernung 30 cm von Osten in erster Hauptlage eine Bussolennadel ab. Bei dem Umlegen des Magnets wurde abgelesen:

	1. Spitze	2. Spitze
N.-Pol zugewandt	112,5°	292,4°
S.-Pol zugewandt	67,6	247,7
	$\varphi = 22{,}45°$	22,35° Mittel = 22,40°.

Bei der Ablenkung aus Westen wurde ebenso gefunden 22,68

Hauptmittel $\varphi = 22{,}54°$; $\operatorname{tg}\varphi = 0{,}4150$.

Der Magnet war 10,0, die Nadel 2,0 cm lang, also die Polabstände $\mathfrak{L} = \frac{5}{6}\cdot 10 = 8{,}3$ cm, $\mathfrak{l} = \frac{5}{6}\cdot 2 = 1{,}7$ cm, woraus $\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2 = 32{,}6$ cm².
Hiernach wird

$$\frac{M}{H} = \tfrac{1}{2}\,\frac{r^3 \operatorname{tg}\varphi}{1+\eta/r^2} = \tfrac{1}{2}\,\frac{27000\cdot 0{,}4150}{1+32{,}6/900} = \tfrac{1}{2}\,\frac{11205}{1{,}0363} = 5406 \text{ cm}^3$$

und

$$H = \sqrt{\frac{183{,}01}{5406}} = 0{,}1840 \text{ cm}^{-\frac{1}{2}}\,\text{gr}^{\frac{1}{2}}\,\text{sek}^{-1} \text{ oder Gauſs.}$$

Gauſs'sches Verfahren bei der Messung von M/H.

Anstatt die Polabstände als bekannt vorauszusetzen, werden hier aus zwei Entfernungen r und r' die Ablenkungen φ und φ' beobachtet, wodurch die Korrektionskonstante η eliminiert werden kann. Es ist nämlich dann unser gesuchter Quotient Q

in der ersten Hauptlage $\qquad Q$ oder $\dfrac{M}{H} = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{r'^5 \operatorname{tg}\varphi' - r^5 \operatorname{tg}\varphi}{r'^2 - r^2}$

und in der zweiten (ohne den Faktor $\frac{1}{2}$) $= \dfrac{r'^5 \operatorname{tg}\varphi' - r^5 \operatorname{tg}\varphi}{r'^2 - r^2}$.

Günstigste Abstände. Für die Genauigkeit des Resultates ist am besten das **Verhältnis der beiden Entfernungen** r'/r gegen 1,4 zu wählen. — Der kleinere Abstand r soll womöglich nicht kleiner werden als etwa die vierfache Magnetlänge, weil sonst zu dem Gliede η/r^2 (v. S.) noch ein anderes mit $1/r^4$ von merklicher Größe hinzukommt (Anh. 20). Für eine Bussole mit Teilkreis werden dann freilich die Ausschläge sehr klein.

Beweis für eine kurze Nadel in erster Hauptlage. Lenkt ein westöstlich gerichteter Magnet eine kurze Nadel, die sich in seiner Fortsetzung in nicht zu kleinem Abstande r von seiner Mitte befindet, um φ ab, so ist (Anh. 21) $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2}{r^3}\dfrac{M}{H}\left(1 + \dfrac{\eta}{r^2}\right)$ oder $\frac{1}{2} r^5 \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{M}{H}(r^2 + \eta)$, wo η für jeden Magnet eine Konstante ist. Für den anderen Abstand gilt ebenso $\frac{1}{2} r'^5 \operatorname{tg}\varphi' = \dfrac{M}{H}(r'^2 + \eta)$. Durch Subtraktion der Gleichungen von einander fällt η heraus und entsteht das obige Resultat.

Kreuzweise Multiplikation beider Gleichungen eliminiert M/H und gibt

$$\eta = r^2 r'^2 \frac{r^3 \operatorname{tg}\varphi - r'^3 \operatorname{tg}\varphi'}{r'^5 \operatorname{tg}\varphi' - r^5 \operatorname{tg}\varphi}.$$

Bei wiederholter Benutzung derselben Magnete genügt es, die Beobachtung aus der größeren Entfernung einmal gemacht zu haben und M/H nach Gl. 2 oder 3 mit dem ein für allemal ermittelten Korrektionswert η zu berechnen.

Beispiel. Außer obiger Ablenkung $\varphi = 22{,}54^\circ$ für $r = 30{,}00$ cm wurde noch ebenso gefunden $\varphi' = 9{,}77^\circ$ für $r' = 40{,}00$ cm. Also wird $M/H = \frac{1}{2}(40^5 \cdot \mathrm{tg}\, 9{,}77^\circ - 30^5 \cdot \mathrm{tg}\, 22{,}54^\circ)/(40^2 - 30^2) = 5388$ cm^3 und (S. 350) $H = \sqrt{(183{,}01/5388)} = 0{,}1843$ cm$^{-\frac{1}{2}}$ gr$^{\frac{1}{2}}$ sek^{-1}.

Der Ausdruck η würde nach diesen Versuchen sein

$$\eta = 40^2 \cdot 30^2 \frac{30^3 \cdot \mathrm{tg}\, 22{,}54^\circ - 40^3 \cdot \mathrm{tg}\, 9{,}77^\circ}{40^5 \cdot \mathrm{tg}\, 9{,}77^\circ - 30^5 \cdot \mathrm{tg}\, 22{,}54^\circ} = 36{,}3 \text{ cm}^2.$$

In der Tat führt auf den Wert 5388 auch die Formel

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{30^3 \cdot \mathrm{tg}\, 22{,}54^\circ}{1 + 36{,}3/900} \text{ oder } = \frac{1}{2} \frac{40^3 \cdot \mathrm{tg}\, 9{,}77^\circ}{1 + 36{,}3/1600}.$$

Abänderung der Gaufs'schen Formeln. Bei kurzen Magnetnadeln sind die folgenden Formeln, besonders für kleine Abstände, im allgemeinen vorzuziehen; F. K., Wied. Ann. 31, 613. 1887.

1. Hauptlage

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2}\left[\frac{r'^2 - r^2}{r'^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{tg}\,\varphi'^{-\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}}\, \mathrm{tg}\,\varphi^{-\frac{1}{2}}}\right]^2$$

2. Hauptlage

$$\frac{M}{H} = \left[\frac{r'^2 - r^2}{\mathrm{tg}\,\varphi'^{-\frac{2}{3}} - \mathrm{tg}\,\varphi^{-\frac{2}{3}}}\right]^{\frac{3}{2}}$$

oder bei Beobachtung aus nur einem Abstande R:

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} R^3 \mathrm{tg}\, \Phi \left(1 - \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)^2; \qquad \frac{M}{H} = R^3 \mathrm{tg}\, \Phi \left(1 + \frac{1}{4}\frac{\mathfrak{L}^2 - 4\mathfrak{l}^2}{R^2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Spiegelablesung. Werden die Ablenkungen an einem Magnetometer mit Spiegel und Skale (25, 26) gemessen, was den Vorteil hat, die Abstände größer nehmen zu können und doch gut meßbare Ausschläge zu bekommen, so ist das Torsionsverhältnis Θ (77) des Magnetometers durch Multiplikation der Tangenten mit $1 + \Theta$ in Rechnung zu setzen. Deklinationsschwankungen eliminiert man durch Abwechslung in den Ablenkungen oder nach einem Hilfsvariometer (74).

Korrektion wegen des von der Erde induzierten Magnetismus. Während der Schwingungen liegt der Magnet nordsüdlich; sein Magnetismus M ist deswegen durch den Erdmagnetismus ein wenig verstärkt. Er betrage jetzt $M(1 + \Delta)$ wo man Δ den Induktionskoeffizient durch die erdmagnetische Horizontalkomponente nennt. Die früher bestimmte Größe P (S. 348) stellt also nicht MH, sondern $MH(1 + \Delta)$ vor und man hat nicht $H = \sqrt{P/Q}$, sondern

$$H = \sqrt{\frac{P}{Q}} \sqrt{\frac{1}{1 + \Delta}}.$$

Der Korrektionsfaktor ist merklich $1-\frac{1}{2}\Delta$.

Über die Messung von Δ s. 118. Für die gewöhnlich gebrauchten Magnete kann man Δ ungefähr schätzen nach der Regel, daß das magnetische Feld 1 CGS in 1 gr Stahl durchschnittlich den Magnetismus 0,25 CGS induziert. Wiegt der Magnet also p gr und ist H der Erdmagnetismus, so ist zu schätzen $M\Delta = 0{,}25\,pH$ oder $\Delta = 0{,}25\,pH/M$. Für $H = 0{,}2$ und einen Durchschnittswert von $p/M = \frac{1}{30}$ (vgl. 118) ist $\Delta = \frac{1}{600}$ und der Einfluß beträgt in H $\frac{1}{12}$ Proz.

III. Kompensiertes Magnetometer (nach W. Weber).

Auf eine Bussole wirken gleichsinnig mit einander je zwei auf einem Rahmen fixierte Magnete aus erster und zweiter H.-L. Erstere sind doppelt, letztere dreimal so lang, breit und dick wie die Nadel. Der Abstand R der größeren Stäbe soll nahe das 1,20fache des kleineren r sein. Hierdurch heben die Korrektionsglieder sich merklich heraus. Man legt den Rahmen in zwei um 180° verschiedenen Stellungen auf. Die halbe Differenz der Nadeleinstellungen heiße φ.

Mittels eines anzuschraubenden Spiegels und überzuhängender Gewichte kann man Schwingungsdauer und Trägheitsmoment des Rahmens bestimmen.

1. Vergleichung von H an zwei Orten. Es ist

$$H_1 : H_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 : \operatorname{tg}\varphi_1 .$$

Unabhängig von Änderungen der Stäbe macht die Bestimmung der Schwingungsdauern t_1 und t_2 des Rahmens an beiden Orten, nachdem man alle 4 Magnete gleichgerichtet hat. Dann ist

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{t_2}{t_1}\sqrt{\frac{\operatorname{tg}\varphi_2}{\operatorname{tg}\varphi_1}} .$$

2. Absolute Bestimmung. Die Schwingungsdauer sei mit gleichgerichteten Magneten $= t$; wenn die kleineren Magnete um 180° gedreht sind $= \tau$; ferner Θ das Torsionsverhältnis des Fadens im ersteren Falle, K das Trägheitsmoment, so ist

$$H = \frac{\pi}{t\tau}\sqrt{\frac{K}{\operatorname{tg}\varphi}\left(\frac{\tau^2-t^2}{r^2} + \frac{\tau^2(1-2\Theta)+t^2}{2R^2}\right)} .$$

Vgl. F. K., Pogg. Ann. 142, 661. 1871.

IV. Bestimmung von H auf bifilar-magnetischem Wege (F. K.).

Die Zeitbestimmung wird durch die in einer bifilaren Direktionskraft enthaltene Schwerbeschleunigung ersetzt.

1. Bestimmung von MH. Absolutes Bifilarmagnetometer.

Die Suspension einer bifilaren Aufhängung (Fig. S. 112) sei ostwestlich gerichtet. Man legt einen Magnetstab ein und beobachtet die jetzige Einstellung der Ableseskale. Man legt dann den Magnet um und liest wieder ab. Die Hälfte des Winkels zwischen beiden Stellungen sei $= \alpha$ (25).

Die Direktionskraft der Bifilarsuspension (27a) sei $= D$. Dann ist

$$MH = D \operatorname{tg} \alpha.$$

2. Bestimmung von M/H.

Der obige Magnet lenke aus zweiter H.-L. eine kurze Magnetometernadel vom Torsionsverhältnis Θ (77) aus der großen Entfernung r um den Winkel φ ab. Es sei $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Magnetstabes (76b). Dann ist (S. 350)

$$\frac{M}{H} = r^3\left(1+\tfrac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right)(1+\Theta)\operatorname{tg}\varphi.$$

Durch Multiplikation beider Gleichungen kann man M erhalten; die Division liefert

$$H^2 = \frac{D}{r^3(1+\Theta)(1+\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2/r^2)}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}.$$

Von Schwankungen des Stab- und des Erdmagnetismus wird man unabhängig, wenn der Stab, **während** er bifilar aufgehängt ist, zugleich das Magnetometer ablenkt. Man beobachtet mit nördlich und südlich gestelltem Magnetometer. Abstand r ist die halbe Entfernung des Aufhängefadens in beiden Stellungen.

Für wiederholte Bestimmungen werden am bequemsten zwei stehenbleibende Magnetometer gleichzeitig verwendet. α ist dann das Mittel aus beiden Ablenkungen. Um Unsymmetrien zu eliminieren, wird einmal auch die Ablenkung α' mit vertauschten Magnetometern beobachtet. Dann hat man die Ablenkungen in der normalen Stellung ein für allemal mit $1+\frac{1}{2}(\alpha'-\alpha)/\alpha$ zu multiplizieren.

Korrektionen. Aus der Wirkung der Nadel auf den Magnet und der schrägen Stellungen des letzteren entsteht bei gleichzeitiger Beobachtung von α und φ eine kleine Korrektion. $\varkappa$ sei das Verhältnis des Nadelmagnetismus bez. der Summe beider Nadelmagnetismen zum Erdmagnetismus, so ist der Ausdruck für H^2 zu multiplizieren mit

$$(1-2\varkappa/r^3)(\cos\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi).$$

Skalenabstände. Sind die Skalenabstände des Bifilars und des Unifilars nahe gleich, so braucht man nur den Unterschied beider Abstände genau zu messen, was mit Hilfe ausgespannter Fäden leicht geschieht.

Erste Hauptlage. Man kann das Unifilarmagnetometer östlich und westlich vom Bifilarmagnet aufstellen, dann gilt

$$H^2 = \frac{2D}{r^3(1+\Theta)(1-\frac{1}{2}\mathfrak{L}^2/r^2)}\,\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\varphi}\left(1+\frac{\varkappa}{r^3}\right)(\cos\alpha+\tfrac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\varphi).$$

Vgl. F. K., Wied. Ann 17, 765. 1882.

V. Bestimmung von MH mit der Wage (Toepler).

Eine eisenfreie feine Wage ist um eine Vertikalaxe drehbar. Der Balken stehe im magnetischen Meridian. Mit dem Wagebalken ist der

Magnet M in vertikaler Stellung fest verbunden; das von dem horizontalen Erdmagnetismus H mittels M auf die Wage ausgeübte Drehmoment ist $= MH$. Dreht man die ganze Wage um 180°, so wirkt dasselbe Drehmoment nach der entgegengesetzten Richtung. Man wird also zum Äquilibrieren in den beiden Stellungen verschiedene Gewichte nötig haben.

Beträgt dieser Unterschied m gr, ist l cm die Länge des Wagearmes, endlich $g = 981$ cm/sek² die Schwerbeschleunigung, so ist offenbar

$$MH = \frac{1}{2} g m l \text{ cm}^2 \cdot \text{gr/sek}^2.$$

Vgl. Toepler, Wied. Ann. 21, 158. 1884; Freyberg, ib. 25, 511. 1885.

74. Zeitliche erdmagnetische Variationen.

Schwankungen des Erdmagnetismus bewirken, daß Richtung und Stärke des Feldes sich mit der Zeit ändern. Von den zuweilen (bei Nordlicht usw.) auftretenden starken Störungen abgesehen, erreichen die meist langsam verlaufenden Schwankungen in mittleren Breitengraden bei der Intensität etwa $^1/_2$ Prozent, bei der Deklination etwa $^1/_4$ Bogengrad.

Dadurch, daß im verdunkelten Zimmer der von einer Linse erzeugte Bildpunkt einer Lichtquelle nach der Spiegelung von einem Variometer auf ein durch Uhrwerk vorgeschobenes lichtempfindliches Papier fällt, lassen die Variationen sich photographieren.

Physikalische Beobachtungen werden besonders durch die Deklinationsschwankungen gestört, wobei aber die plötzlichen Einflüsse durch die modernen Anwendungen der Elektrizität zum Haustelegraphen, zur Beleuchtung, zum Straßenbahnbetrieb oft viel nachteiliger sind, als die erdmagnetischen Variationen.

I. Deklinationsschwankungen.

Sie werden mit dem **Magnetometer** gemessen, d. h. mittels eines am Faden aufgehangenen Magnets mit einem Spiegel, in welchem das Bild einer horizontalen Skale beobachtet wird. Der Abstand der Skale vom Spiegel sei, in Skalenteilen, also gewöhnlich in mm gemessen, $= A$. Eine Bildverschiebung gegen das Fadenkreuz um e Skalenteile bedeutet dann die Drehung um einen Winkel $= e/(2A)$ in absolutem Maße gemessen, oder um $1719\, e/A$ in Bogenminuten (25). Wegen der Fadentorsion sind die beobachteten Bewegungen mit $1 + \Theta$ zu multiplizieren, wenn Θ das Torsionsverhältnis (77) vorstellt.

II. Intensitätsschwankungen.

Haltbarkeit der Magnete Auf dieser, vollkommen nicht erreichbaren Eigenschaft beruhen die Intensitätsvariometer. Über ein Verfahren, die Veränderlichkeit zu vermindern, s. 72b I. — Temperaturschwankungen sind zu eliminieren.

Zur Messung dient ein horizontal drehbar aufgehangener Magnet, der entweder durch seine gewöhnlich bifilare Aufhängung oder durch genäherte permanente Magnete in eine zum magn. Meridian nahe senkrechte Stellung gezwungen ist. Die Ablesung geschieht ebenfalls mit Spiegel und Skale.

E bedeute die Änderung der Intensität, welche einer Drehung der Nadel um 1 Sk.-T. entspricht, und zwar in Bruchteilen der Intensität selbst gemessen. Wenn also der Einstellung auf den Skalenteil p die Intensität H entspricht, so ist die Intensität bei der Einstellung p'

$$H' = H[1 + E(p' - p)] \quad \text{oder} \quad \frac{H' - H}{H} = E(p' - p).$$

Bestimmung des Skalenwertes E.

Allgemein anwendbar ist das folgende Verfahren. Man läßt auf die Nadel des Variometers in gleicher Höhe aus der großen Entfernung r im Norden oder Süden einen nordsüdlich gerichteten Magnet ablenkend wirken und liest ab. Man dreht den Magnet um 180° und liest wieder ab; der Unterschied beider Ablesungen betrage n Sk.-T. Dann ist der Skalenwert

$$E = \frac{1}{n} \frac{4}{r^3} \frac{M}{H}. \qquad 1.$$

M ist der Magnetismus des ablenkenden Stabes, der aber nur im Verhältnis zum Erdmagnetismus bekannt zu sein braucht (73 II oder 76).

Beweis. Der Stab M vermehrt bez. vermindert in seinen beiden Lagen die Intensität H um $2M/r^3$. Da die Einstellung sich bei dem Umlegen von M um n Sk.-T. ändert, so bedeutet 1 Sk.-T. also die Änderung $4M/(nr^3)$, oder in Teilen der Intensität selbst $4M/(nr^3H)$; q. e. d.

Sind Magnetlänge $\mathfrak{L}$ und Nadellänge $\mathfrak{l}$ nicht klein gegen r, so tritt, wenn M richtig ermittelt ist, der Korrektionsfaktor $\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2} - \frac{3}{4}\frac{\mathfrak{l}^2}{r^2}\right)$ hinzu; vgl. S. 349 u. Anh. 20. Man kann aber statt dessen M/H ohne Rücksicht auf die Längen an einer ähnlich gestalteten Nadel aus ungefähr demselben Abstand r bestimmen und diesen Wert dann ohne Korrektionen in Gl. 1 einsetzen.

1. Bifilarvariometer (Gauſs).

Ein Magnet ist an 2 Fäden von kleinem Abstande bifilar aufgehängt (27a). Die Verbindungslinie der oberen und diejenige der unteren Befestigungspunkte der Fäden werden so gegen einander gedreht, daß das erdmagnetische und das statische (durch die Schwere und die Elastizität hervorgebrachte) Drehmoment der Fäden zusammen den Magnet ostwestlich stellen.

Die mit Spiegel und Skale abzulesende geringe Drehung, welche der Magnet durch eine Änderung der erdmagnetischen Horizontalintensität erfährt, kann der Änderung proportional gesetzt werden. Wachsende Intensität dreht den Nordpol nach Norden; es ist bequem, wenn dieser Drehung wachsende Zahlen der Skale entsprechen.

Bestimmung des Skalenwertes E.

1. S. das vor. S. angeführte Verfahren.

2. Mit dem Torsionskreis. Hat das Instrument einen Torsionskreis, so ergibt sich E aus dem Winkel α, welchen die Vertikalebenen der oberen und der unteren Aufhängepunkte mit einander bilden, wenn A der Skalenabstand,

$$E = (1/2A) \cdot \text{ctg}\,\alpha.$$

α wird bestimmt, indem man den Magnet in der Bifilarsuspension um 180° umlegt und nun den Torsionskreis um 2α dreht, bis wieder die Ostwestlage eingetreten ist.

Das Verfahren setzt Aufhängefäden von geringer Torsionskraft voraus, z. B. aus feinem Messingdraht.

Beweis. Die Bifilarnadel m steht immer so nahe senkrecht zum Meridian, daß das erdmagn. Drehmoment mit Hm zu bezeichnen ist. Das bifilare Drehmoment ist $D \sin\alpha$ (27a). Also haben wir $Hm = D \sin\alpha$. Wenn sich nun H in $H(1+E)$ und α in $(\alpha + 1/2A)$ ändert, d. h. wenn sich das Instrument um 1 Skalenteil dreht, so ist wieder

$$Hm(1+E) = D \sin[\alpha + (1/2A)] = D[\sin\alpha + (1/2A) \cdot \cos\alpha].$$

Beiderseitige Division mit $Hm = D \sin\alpha$ ergibt obiges E.

Über die Bestimmung von E aus Torsions- und Schwingungsbeobachtungen vgl. Gauß, Result. d. magn. Vereins 1841, S. 1, oder Abh. Bd. 5, S. 404, und Wild, Carl Repert. 16, 325. 1880. Vgl. ferner F. K., Wied. Ann. 15, 536. 1882.

Temperatur-Korrektion. Erwärmung schwächt den Stabmagnetismus, läßt also den Erdmagnetismus kleiner erscheinen. Ein wenig wirkt auch die Ausdehnung der Suspension und der Drähte. Ist μ der Temperaturkoeffizient des Magnets (76a), β der Ausdehnungskoeffizient der Suspension, β' derjenige der Drähte, so verlangt 1° Temperaturänderung eine Korrektion um $(\mu + 2\beta - \beta')/E$ Skalenteile. Für eine Aufhängung ganz aus Messing wird der Ausdruck $= (\mu + 0{,}000018)/E$.

Torsionsvariometer.

Statt durch ein bifilares Drehmoment lenkt man die Nadel durch Drehung ihres Aufhängefadens (Stahl oder Quarz) bis zur ostwestlichen Stellung ab.

Der Skalenwert E läßt sich nach dem Verfahren 1 ermitteln oder aus dem Torsionswinkel φ. Er ist für einen Sk.-Abstand von A Sk.-T. offenbar $E = \frac{1}{2A}\frac{1}{\varphi}$, wo φ in absolutem Maße (Anh. 3) zu messen ist.

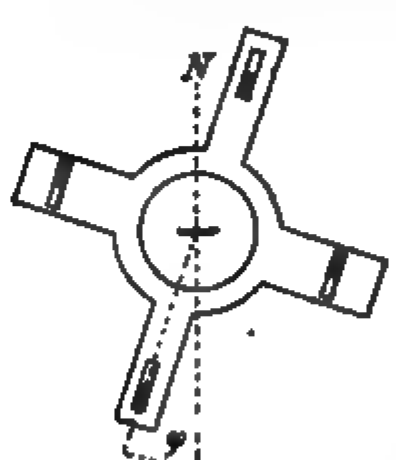
Wenn z. B. $\varphi = 2\pi = 6{,}28$ und $A = 2500$, so wird $E = 0{,}000032$. Die Empfindlichkeit läßt sich leicht beliebig steigern. Eschenhagen, Verh. D. Ph. Ges. 1899, S. 147. — Zu beachten ist, daß mit gesteigerter Empfindlichkeit eine Unsymmetrie zunimmt, die darin besteht, daß die Empfindlichkeit nach der positiven Richtung wächst. Vgl. Richarz u. Schulze, Ann. der Ph. 8, 348 u. 714. 1902.

2. Ablenkungsvariometer.

Eine Magnetnadel kann, anstatt durch bifilare Aufhängung, auch durch Ablenkungsstäbe senkrecht zum Meridian gerichtet werden und stellt dann ein Intensitätsvariometer dar. Für vorübergehende Beobachtung läßt ein solches Instrument sich leicht improvisieren.

Skalenwert. Man kann verfahren, wie auf S. 356.

Vierstab-Variometer (F. K.). Auf einem horizontal drehbaren Rahmen sind vier gleiche Magnete befestigt, so daß auf den Mittelpunkt zwei aus erster und zwei aus zweiter Hauptlage wirken, die ersteren aus einem um etwa $\frac{1}{16}$ größeren Abstande als die letzteren. Die gesamte Richtkraft soll etwas größer sein als die erdmagnetische, was durch passende Stellung der Magnete bewirkt wird. Den Mittelpunkt bildet eine Magnetometernadel an einem Aufhängefaden von geringer Torsion.



Orientierung zum Meridian. Man stellt den Rahmen auf den Nullpunkt seiner Teilung, und zwar so, daß die Richtkraft der Magnete dem Erdmagnetismus entgegenwirkt. Die Drehungsaxe wird mit der Libelle vertikal gemacht. Nun dreht man das ganze Instrument, bis die Nadel sich in die Richtung der vier Stäbe einstellt, und schraubt es fest. Jetzt liegt der Nullpunkt der Teilung im Meridian.

Nun wird der Rahmen um einen solchen Winkel φ gedreht, daß die Nadel senkrecht zum Meridian steht, und in dieser Lage festgestellt.

Den Skalenwert ermittelt man wieder nach S. 356 oder berechnet ihn als $E = (1/2A) \operatorname{tg} \varphi$. Die Empfindlichkeit $1/E$ kann also durch ein kleines φ, d. h. durch eine Stellung der Stäbe, bei der ihre Richtkraft den Erdmagnetismus nur wenig übertrifft, beliebig gesteigert werden.

Beweis ähnlich wie in 75. Vgl. auch F. K., Wied. Ann. 15, 540. 1882.

In dem Ausdruck für E befindet sich eigentlich ein von der Richtung der Nadel gegen das Feld der Magnete abhängiges Korrektionsglied, welches den Faktor $\frac{4}{r_1^5} - \frac{3}{r_2^5}$ enthält, wo r_1 und r_2 die Abstände der aus 1. und 2. Hauptlage wirkenden Stäbe bedeuten. Die Korrektion fällt also fort, wenn $r_1/r_2 = (4/3)^{1/5}$ nahe $= 1 + 1/16$ gewählt wird. Wind, Dissertation Groningen, 1894. — Beweis auch aus Pogg. Ann. 142, 550. 1871 einfach zu entnehmen.

Temperatur-Korrektion. Höhere Temperatur läßt den Erdmagnetismus zu groß erscheinen. Den Einfluß bestimmt man im Winter durch abwechselnde Beobachtung im warmen und kalten Zimmer. Findet man bei den Temperaturen t_1 und t_2 die Skaleneinstellungen p_1 und p_2, so beträgt die Korrektion der Ablesung $(p_1 - p_2)/(t_1 - t_2)$ für 1°. — Geht man später zu einem anderen Skalenwert E' über, so ist dieser Ausdruck natürlich mit E/E' zu multiplizieren.

75. Vergleichung der Horizontal-Intensität an zwei Punkten.

Lokale Variationen sind für physikalische Zwecke hauptsächlich bei der Horizontalkomponente der Feldstärke von Bedeutung.

I. Vergleichung durch Schwingungen.

Man läßt eine und dieselbe Magnetnadel an beiden Orten schwingen; die Intensitäten verhalten sich $H_1 : H_2 = t_2^2 : t_1^2$. Bei Anspruch auf Genauigkeit sind Temperatur und zeitliche erdmagnetische Schwankungen zu berücksichtigen (**76a**; **74**).

II. Vergleichung durch Ablenkungen.

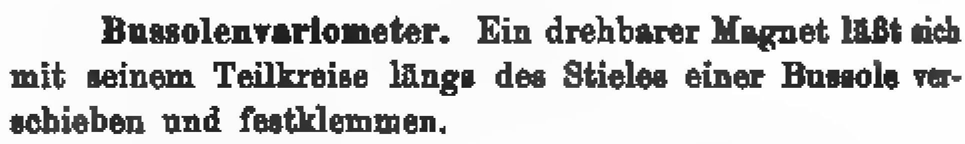
Für eine rohe Bestimmung stellt man eine Bussole an beiden Orten auf und lenkt sie durch einen Magnet aus bestimmtem Abstande ab. Betragen die Ablenkungen α_1 und α_2, so ist

$$H_1 : H_2 = \operatorname{tg} \alpha_2 : \operatorname{tg} \alpha_1 .$$

Lokal-Variometer (F. K.).

Eine größere Empfindlichkeit wird erzielt, wenn man die ablenkenden Magnete so anordnet, daß die Nadel um nahe 90° abgelenkt wird.

Das in 74 II erläuterte Vierstab-Variometer mit Spiegel kann als Lokalvariometer kleine Variationen auf $\frac{1}{10000}H$ genau messen. Sein Gebrauch geht aus dem früheren und aus der folgenden Anweisung zu einer einfacheren Form hervor.



Bussolenvariometer. Ein drehbarer Magnet läßt sich mit seinem Teilkreise längs des Stieles einer Bussole verschieben und festklemmen.

1. Die Drehaxe des Instruments sei mit Hilfe der Stellschrauben und der Libelle vertikal gemacht.

2. Richtiger Abstand des Magnets. Die Richtkraft des letzteren auf die Bussolennadel muß etwas stärker sein, als die erdmagnetische. Man reguliert zu dem Zwecke den Abstand, während der Magnet Nordpol nach Norden steht, bis die Nadel sich Nordpol nach Süden stellt. Je größer die Empfindlichkeit werden soll, desto geringer muß der Kraftüberschuß des Magnets gewählt werden.

3. Orientierung in den Meridian. Man stellt die Kreisteilung des Magnets auf Null und dreht das ganze Instrument, bis die Nadel dem Magnet parallel steht. Wir nehmen an, daß sie alsdann auch auf den Nullpunkt der Bussolenteilung zeigt.

4. Drehungswinkel φ des Magnets. Man dreht den Magnet nach der einen Seite, bis die Nadel auf 90° zeigt, und fixiert den einen Anschlag des Magnets auf diese Stellung. Man verfährt ebenso nach der anderen Seite. Jetzt ist das Instrument fertig. Die Hälfte des Drehungswinkels zwischen den beiden Anschlägen heiße φ.

5. Vergleichung von H an zwei Orten. An dem Vergleichspunkt I wird das Variometer nach Nr. 3 orientiert und dann der Magnet gegen die Anschläge gelegt. Wir wollen die Nadelspitze immer auf der Seite der Bussole ablesen, auf welcher die Bezifferung nach Norden wächst. Der Nordpol der Nadel zeige hier die Einstellung p_n; nach dem Umlegen des Magnets zeige der Südpol p_s. Die Differenz $p_n - p_s$ heiße δ_1. An dem Punkte II zeige die eben beschriebene Differenz den Wert δ_2.

Dann wird das Verhältnis der erdmagnetischen Felder an beiden Orten erhalten als

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta_1}{1 + \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta_2},$$

oder bei kleinem, in Bogengraden ausgedrücktem δ_1 und δ_2

$$(H_1 - H_2)/H = [0{,}0087 \operatorname{tg}\varphi] \cdot (\delta_1 - \delta_2) = C \cdot (\delta_1 - \delta_2).$$

Der Reduktionsfaktor $C = 0{,}0087 \operatorname{tg}\varphi$ bekommt für $\varphi = 29{,}8°$ den runden Wert 0,0050. Die strenge Giltigkeit der Formel setzt eine kurze Nadel voraus.

Beweis. Die vom Magnet am Orte der Bussole auf eine Nadel Eins ausgeübte Richtkraft heiße J. Dann ist, wenn H diejenige Feldstärke bedeutet, bei welcher die Nadel durch den um φ gedrehten Magnet um 90° abgelenkt werden würde, $J \cos\varphi = H$. An dem Punkte I wirkt also auf die Nadel eine Nordkomponente $H_1 - H$; senkrecht dazu eine Komponente $J \sin\varphi = H \operatorname{tg}\varphi$. Stellt sich hierbei die Nadel unter einem Winkel ε_1 gegen die Ostwestrichtung ein, so ist also

$$\operatorname{tg}\varepsilon_1 = (H_1 - H)/(H \operatorname{tg}\varphi) \quad \text{oder} \quad (H_1 - H)/H = \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\varepsilon_1 .$$

Entsprechend für den Punkt II. Da ε_1 und ε_2 unsere $\frac{1}{2}\delta_1$ und $\frac{1}{2}\delta_2$ bedeuten, so findet man hieraus leicht die obige Gleichung. Die praktische Gleichung für kleine Winkel ergibt sich, wenn man $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}\delta/57{,}3° = 0{,}0087\,\delta$ setzt.

Temperatur. Der Temperatureinfluß läßt sich durch Beobachtungen im kalten und im warmen Petroleumbad ähnlich wie in 74 am Schluß bestimmen und in Rechnung setzen. Kann man die Ablesungen an den verschiedenen Orten rasch hintereinander machen, so hält man am besten die Temperatur durch Umhüllen der Magnete mit Watte oder Filz konstant.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 19, 138 1883 und 29, 51. 1886.

Über einen Vorschlag zu einem Instrument mit zwei übereinander angebrachten Magnetnadeln vgl. Heydweiller, Wied. Ann. 64, 735. 1898.

Ein auch für vertikale Intensität bestimmtes transportabeles Variometer s. O. E. Meyer, ib. 40, 489. 1890.

75a. Astatisches Torsionsmagnetometer.

Zwei gleiche Magnetnadeln sind in einem beträchtlichen Abstande h über einander astatisch verbunden aufgehängt. Zur genauen Astasierung dient ein kleiner Teilkreis an der Verbindungsstange. Die Größe der Direktionskraft wird durch die gewählte Stärke des Aufhängedrahtes aus geglühtem Platiniridium bestimmt.

Anwendbar ist das Magnetometer in jedem Azimut. Ist die Astasie gut hergestellt, so ändert sich die Empfindlichkeit mit dem Azimut wesentlich nur durch die wechselnde Induktion des Erdfeldes auf den Nadelmagnetismus bis zu einigen Tausendteln.

Variabele Temperaturunterschiede beider Magnete sind am unschädlichsten für die Ruhelage in der Nordsüdlage, für die Empfindlichkeitskonstante in der Ostwestlage.

Das Instrument ist zu magnetometrischen Zwecken da bestimmt, wo das Erdmagnetometer durch Störungen unbrauchbar gemacht wird, deren Ursprung weit genug abliegt, daß die Störungen an den beiden Orten der Nadeln merklich gleich verlaufen. Als Anwendungen können in Betracht kommen: die Bestimmung von magn. Momenten (76 u. 115), von Temp.-Koeffizienten (76a) oder Polabständen (76b), die absolute Strommessung durch Fernwirkungen oder mit der Tangentenbussole (81), die Bestimmung einer Windungsfläche (106).

Der ablenkende Magnet oder die Stromspule vom Moment M befinde sich in der Höhe der einen Nadel (Hauptnadel), aus dem Abstande r in erster Hauptlage wirkend. Der Einfluß auf die zweite, um die Höhe h höher oder tiefer liegende Nadel äußert sich in einer Korrektion, die nur von r/h abhängt und durch $\psi(r/h)$ bezeichnet werde; sie bleibt innerhalb der Entfernung $r = 0{,}8\,h$ kleiner als 2 Prozent; vgl. unten.

Bedeutet α den Ablenkungswinkel (S. 349), $\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2$ die von den Polabständen $\mathfrak{L}$ des Magnets und $\mathfrak{l}$ der Nadel herrührende Korrektionskonstante (73 II), so gilt für die Berechnung von M, wenn C die Instrumentalkonstante bedeutet,

$$M\left[1 + \frac{\eta}{r^2} + \psi\left(\frac{r}{h}\right)\right] = C \cdot \tfrac{1}{2} r^3 \frac{\alpha}{\cos\alpha}.$$

Für $\alpha/\cos\alpha$ kann, insofern α klein ist, gesetzt werden $\alpha(1 + \frac{1}{2}\alpha^2)$ oder auch $\frac{s}{2A}\left[1 - \frac{5}{6}\left(\frac{s}{2A}\right)^2\right]$, wenn s den Ausschlag an einer Skale vom Abstande A bedeutet; vgl. 25 u. Formel 8 u. 11, S. 9 u. 10.

Für $\psi(r/h)$ endlich gilt (Beweis und Tabelle bei F. K. u. Holborn)

$$\psi\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{\frac{1}{2}(r/h)^3 - (r/h)^5}{[1 + (r/h)^2]^{5/2}}.$$

Bestimmung von C. Man mißt eine durch ein bekanntes Moment hervorgebrachte Ablenkung. Das Moment einer von einem elektrischen Strome i CGS (81; besonders auch 85, 2) durchflossenen Spule von der Windungsfläche f cm² ist $M = if$ CGS. C ist wesentlich der Quotient aus der Direktionskraft der Aufhängung durch den Nadelmagnetismus; er ändert sich ein wenig (etwa auf 1° um 1/2000) mit der Temperatur.

Näheres bei F. K. u. Holborn, Ann. der Ph. 10, 287. 1903; 13, 1054. 1904.

76. Bestimmung eines magnetischen Moments.

Über die Verteilung des Magnetismus in einem Stabe und über Magnetisierungskoeffizienten weichen Eisens s. 115 und Tab. 37.

Am einfachsten und leicht zu improvisieren sind die Methoden, welche das magnet. Moment eines Stabes auf den Erdmagnetismus zurückführen. Dabei wird man meist die Horizontalintensität H für den Beobachtungsort hinreichend genau aus Tab. 38 entnehmen können.

Über Begriff und Größe des spez. Magnetismus vgl. 72b, über die Dichte von freiem Magnetismus an Polflächen z. B. Anh. 19a.

I. Aus Ablenkungen.

Ein in cm geteilter Meterstab, der in der Mitte die Bussole trägt und nach ihr ostwestlich (bez. nordsüdlich für die 2. H.-L.) orientiert ist, wird meist genügen. An einem Magnetometer (oder Spiegelgalvanometer) kann die Ablenkung genauer gemessen und zugleich der Abstand so groß genommen werden, daß keine Korrektion nötig ist. Für $\operatorname{tg}\varphi$ wird man (25) Ausschlag durch doppelten Skalenabstand setzen dürfen, multipliziert mit $(1+\Theta)$, wenn Θ das Torsionsverhältnis bedeutet (77).

Der Magnetstab lenke die Nadel aus dem Abstande r in der ersten Hauptlage (Anh. 20 u. 73 II) um den Winkel φ ab. Über die genaue Bestimmung von φ durch Ablesen beider Nadelspitzen, Umlegen des Magnets und Ablenkung von zwei Seiten vgl. S. 349 und das Beispiel S. 350.

Ist der Abstand r groß gegen die Magnetlänge, so wird das magnetische Moment (Anh. 20)

$$M = \tfrac{1}{2} r^3 H \operatorname{tg}\varphi .$$

Andernfalls nennen wir wieder (S. 349) $\mathfrak{L}$ bez. $\mathfrak{l}$ die Polabstände des Magnets bez. der Nadel ($^5/_6$ ihrer Längen), berechnen $\eta = \frac{1}{2}\mathfrak{L}^2 - \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2$ und dividieren obiges M durch $(1+\eta/r^2)$.

In der zweiten Hauptlage fällt der Faktor $\frac{1}{2}$ fort und es ist $\eta = -\frac{3}{8}\mathfrak{L}^2 + \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2$.

Über Messungen im gestörten Erdfelde mit dem Torsionsmagnetometer s. 75a.

Bei der Untersuchung eines nicht stabförmigen Magnets, beispielsweise auch eines magnetischen Minerales, dessen magnetische Axe sich nicht aus der Gestalt erkennen läßt, bringt man den Körper durch Drehen in die Stellung, in welcher die ablenkende Wirkung am größten ist. Um die Lage der magnetischen Axe zu bestimmen, kann man ebenso verfahren. Oder man hängt im Erdfelde den Körper in zwei Lagen an einem dünnen Faden auf oder läßt ihn in einer Schale auf Wasser schwimmen.

Über einen Vorschlag zu einer Nullmethode mittels eines kompensierenden elektrischen Kreisstromes s. Simon u. Madelung, Phys. ZS 5, 410, 1904.

II. Aus der Schwingungsdauer t.

Für einen regelmäßig gestalteten Stab läßt sich das Trägheitsmoment K (29) berechnen. Man erhält dann

$$M = \frac{\pi^2 K}{t^2 H (1+\Theta)} .$$

Kombination von I und II läßt H eliminieren.

III. Durch bifilare Aufhängung.

Nach 78 IV auszuführen.

IV. Mit der Wage (Helmholtz).

Nur von theoretischer Bedeutung; magnetische Kräfte werden hier unmittelbar durch Gewichte gemessen.

Gesucht werden die Momente $M_1 M_2 M_3$ dreier Stäbe mit den Polabständen (72b I) $\mathfrak{L}_1 \mathfrak{L}_2 \mathfrak{L}_3$. An einer eisenfreien empfindlichen Wage werde M_1 vertikal hängend äquilibriert gegen M_2, welches horizontal dem Balken parallel in mittlerer Höhe von M_1 hängt. Man kehrt erst den einen, später den anderen Stab um; das Mittel aus den nahe gleichen Gewichten, welche die Wage wieder einstellen, betrage p gr. Der Schneidenabstand, gegen die Stablängen hinreichend groß, sei $= r$ cm. Dann gilt, wenn $g = 981$ ist,

$$M_1 M_2 = \frac{1}{12} \frac{r^4 p \cdot g}{1 - \frac{5}{2}\mathfrak{L}_1^2/r^2 + \frac{10}{3}\mathfrak{L}_2^2/r^2} = P_{12}.$$

Ebenso bestimme man $M_1 M_3 = P_{13}$ und $M_2 M_3 = P_{23}$. Dann ist $M_1 = \sqrt{P_{12} \cdot P_{13} : P_{23}}$ CGS usw.

Vgl. Helmholtz, Sitzungsber. d. Berliner Akad. 1883, 405.

Elektrische Methoden zur Bestimmung von magn. Momenten und Induktionskoeffizienten s. in 109 III und 118.

76a. Temperaturkoeffizient eines Magnets.

Temperaturkoeffizient μ heißt die durch $+1^\circ$ hervorgebrachte relative Abnahme des Magnetismus. Je größer der spezifische Magnetismus, desto kleiner ist im allgemeinen der Temp.-Koeffizient. Er beträgt bei guten Magneten etwa 0,0003 bis 0,001.

Die Methoden in 76 lassen auch den Einfluß der Temperatur bestimmen, aber wenig genau. Man muß die durch die Erwärmung bewirkten Ausschläge vergrößern.

I. Kompensation (Weber).

Man nähert einem Magnetometer den Magnet von der einen Seite bis zu dem mäßigen Abstande r, hebt aber die große Ablenkung durch einen Hilfsstab nahezu wieder auf. Nun wird der erste Stab auf verschiedene Temperaturen t_1 und t_2 gebracht; n sei dabei der Unterschied der beiden Einstellungen, A der Skalenabstand.

Der Temperaturkoeffizient μ ist dann $\mu = C \cdot n/(t_1 - t_2)$. Den Faktor C bekommt man folgendermaßen.

1. Wenn der Magnet aus der gleichen Entfernung eine kurze Bussolennadel um φ ablenkt, so ist $C = 1/(2A \operatorname{tg} \varphi)$

2. Ist der Magnetismus M des Stabes bekannt, so hat man, wenn $\mathfrak{L}$ der Polabstand des Stabes (S. 349),

in erster Hauptlage

$$C = \frac{H}{M} \frac{r^3}{4A}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right);$$

in zweiter Hauptlage

$$C = \frac{H}{M} \frac{r^3}{2A}\left(1 + \frac{3}{8}\frac{\mathfrak{L}^2}{r^2}\right).$$

3. Oder man nähert den Magnet und den Hilfsstab folgeweise in einzelnen Absätzen, so daß die Näherung des einen immer die Nadel nahe an das eine Ende der Skale bringt, die Näherung des andern an das entgegengesetzte Ende Die letzte Näherung bringe die Nadel wieder nahe auf die alte Ruhelage. N sei die Summe sämtlicher Skalenverschiebungen, die nach und nach durch den Magnet (nicht durch den Hilfsstab) hervorgebracht wurden, nach 25, S. 108 auf Größen korrigiert, die der Tangente der Ausschlagswinkel proportional sind. Dann ist offenbar $C = 1/N$.

II. Durch bifilare Aufhängung.

Der Magnet wird in einer empfindlichen Bifilarsuspension ostwestlich aufgehängt und durch Heizung usw. des Raumes auf verschiedene Temperaturen gebracht. E sei der Skalenwert (74 II). Bewirkt eine Erwärmung t die Verschiebung n, so ist $\mu = nE/t - 2\beta + \beta'$; β und β' sind die Ausdehnungskoeffizienten der Suspension und des Aufhängedrahts. Schwankungen des Erdmagnetismus (74) muß man in Rechnung setzen.

Wild, Carl Rep. 9, 277. 1873.

III. Durch 90°-Ablenkung eines Magnetometers.

Der Magnet wird in der Höhe der (kurzen) Magnetometernadel horizontal mit seinem Mittelpunkt im Meridian der Nadel so angebracht, daß die Nadel sich ostwestlich stellt. Er bilde in dieser Stellung mit dem Meridian den Winkel φ (Fig.). Man erwärme den Magnet um t; die Nadel drehe sich dadurch um den Winkel ε. Dann ist der Temperaturkoeffizient $\mu = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \varphi \cdot \varepsilon / t$.

Mit kleinem φ ist die Methode sehr empfindlich.

Beweis. Da die Nadel ostwestlich steht, so stammt ihre Direktionskraft nur von dem Magnet und beträgt $M/r^3 \cdot \sin\varphi$. Die Ablenkung ε bedeutet also ein neues Drehmoment $\varepsilon \cdot M/r^3 \cdot \sin\varphi$, welches andrerseits gleich $2\, \Delta M/r^3 \cdot \cos\varphi$ ist, wenn ΔM die von der Erwärmung bewirkte Änderung des magnetischen Moments bedeutet. Also hat man $\Delta M = \frac{1}{2} M \cdot \varepsilon \operatorname{tg}\varphi$ und den Temp.-Koeff. $\mu = 1/t \cdot \Delta M/M = \frac{1}{2} \operatorname{tg}\varphi \cdot \varepsilon/t$.

F. K., Wied. Ann. 22, 420. 1884, auch über Korrektionen.

76b. Polabstand eines Magnets.

Unter Polen werden hier die Punkte verstanden, in denen man die beiden Magnetismen eines gestreckten Stabes für Fernwirkungen konzen-

triert annehmen darf, wenn die vierte Potenz des Verhältnisses der Magnetlänge zu der Entfernung gegen 1 vernachlässigt werden kann.

Der Magnet lenke eine in gleicher Höhe befindliche kurze Magnetnadel aus den beiden Entfernungen a_1 bez. a_2 — die Entfernung von Mitte zu Mitte gemessen — um φ_1 bez. φ_2 ab. Der Polabstand der Nadel, d. h. hier ausreichend genau $\frac{5}{6}$ ihrer Länge, sei $=\mathfrak{l}$. Man berechne zunächst

$$\eta = a_1^2 a_2^2 \frac{a_1^3 \operatorname{tg}\varphi_1 - a_2^3 \operatorname{tg}\varphi_2}{a_2^5 \operatorname{tg}\varphi_2 - a_1^5 \operatorname{tg}\varphi_1}.$$

Der Polabstand $\mathfrak{L}$ des Magnets ist dann, im Anschluß an die Gauß'schen Formeln (S. 351), durch die folgenden Ausdrücke gegeben. Es ist für Beobachtungen aus

erster Hauptlage	zweiter Hauptlage
$\mathfrak{L}^2 = +2\eta + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2$,	$\mathfrak{L}^2 = -\frac{3}{8}\eta + 4\mathfrak{l}^2$.

Den abgeänderten Formeln S. 352 entsprechend hat man $\mathfrak{L}^2 =$

in erster H.-L.	in zweiter H.-L.
$4\dfrac{a_1^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\varphi_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{\frac{3}{2}}\operatorname{tg}\varphi_2^{\frac{1}{2}}}{a_1^{-\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\varphi_1^{\frac{1}{2}} - a_2^{-\frac{1}{2}}\operatorname{tg}\varphi_2^{\frac{1}{2}}} + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2$,	$4\dfrac{a_1^2\operatorname{tg}\varphi_1^{\frac{2}{3}} - a_2^2\operatorname{tg}\varphi_2^{\frac{2}{3}}}{\operatorname{tg}\varphi_2^{\frac{2}{3}} - \operatorname{tg}\varphi_1^{\frac{2}{3}}} + 4\mathfrak{l}^2$.

Um Unsymmetrien zu eliminieren, wird der Magnet folgeweise auf beide Seiten des Magnetometers gelegt; a_1 oder a_2 bedeuten jedesmal den halben Abstand zwischen zusammengehörigen Stellungen des Magnets. Außerdem legt man den Magnet jedesmal um.

Von Temperatur- und erdmagnetischen Schwankungen macht die gleichzeitige Anwendung zweier Magnetometer unabhängig, zwischen denen der Magnet aus zwei symmetrisch gegen die Mitte gelegenen Stellungen wirkt. Ist E der Abstand beider Magnetometerfäden von einander und E' die Strecke, um welche der Magnet verschoben wird, so ist $a_1 = \frac{1}{2}(E - E')$ und $a_2 = \frac{1}{2}(E + E')$. Nach dem ersten Beobachtungssatz vertauscht man die Magnetometer mit einander, wiederholt die Beobachtungen und nimmt aus den zusammengehörigen Ablenkungen die Mittel. Die Skalenabstände brauchen nur genähert bekannt zu sein. Über Reduktionen s. 25.

Über die Ausführung vgl. F. K. u. Hallock, Wied. Ann. 22, 411. 1884; F. u. W. Kohlrausch, ib. 27, 45. 1886.

77. Torsionsverhältnis eines aufgehangenen Magnets.

Durch den Aufhängefaden tritt zu der magnetischen Direktionskraft D eine elastische d. Das Verhältnis $d/D = \Theta$ heißt Torsionsverhältnis. Eine Ablenkung, die der Magnet erfährt, ist daher im Verhältnis $(1+\Theta)$, seine Schwingungsdauer im Verhältnis $\sqrt{1+\Theta}$ kleiner, als wenn nur die magnetische Dir.-Kraft wirkte.

Je leichter ein Magnet, desto kleiner kann man das Torsionsverhältnis machen, denn die Tragkraft eines Fadens wächst mit dem Quadrate, das Torsionsmoment aber mit der 4. Potenz der Dicke. Coconfäden

(8, 20 u. 72b) haben je nach ihrem Ursprung ein sehr verschiedenes Torsionsmoment. 10 cm lange, feine Fäden aus dem Innern eines Cocons gehen bis unter $d = 0{,}0001$ CGS, so daß oft ihr Torsionsverhältnis kaum in Betracht kommt. Andere erreichen ein mehr als zehnfaches Moment. Freilich ist auch die Tragkraft sehr ungleich. Wegen der elastischen Nachwirkung ist Θ für einen Cocon um eine Anzahl von Prozenten unsicher.

Äußerst kleine Torsionsmomente erreicht man mit Quarzfäden (8, 21), die gegen den Cocon den Vorteil einer verschwindenden elastischen Nachwirkung haben.

Um Θ zu bestimmen, teilt man dem Faden eine gemessene Torsion α mit und beobachtet die neue Einstellung des Magnets, welche sich von der ursprünglichen um den Winkel φ unterscheide. Dann ist

$$\Theta = \varphi/(\alpha - \varphi).$$

In Ermangelung eines Torsionskreises dreht man den Magnet einmal ganz herum, ohne an der oberen Befestigung etwas zu ändern; dann ist $\alpha = 360^0$ zu setzen.

Bei dem Skalenabstand A bedeutet der Ausschlag e den Winkel $\varphi = 57{,}3^0 \cdot e/(2A)$. Wenn α eine ganze Umdrehung beträgt, rechnet man $\alpha = 2\pi = 6{,}28$ und $\varphi = e/(2A)$.

Indirekte Bestimmung. Die Direktionskraft d eines Fadens ergibt sich aus der Torsionsschwingungsdauer t einer angehängten Masse von bekanntem Trägheitsmoment k (29 I) in absolutem Maße $d = \pi^2 k/t^2$ (Anh. 12). Aus der Direktionskraft D des an dem Faden aufzuhängenden Magnets (z. B. $D = MH$; 76 oder Anh. 21) berechnet sich dann das Torsionsverhältnis $\Theta = d/(D + d)$.

Über die Ermittelung von d aus dem elast. Torsionsmodul vgl. 55.

78. Erdmagnetische Deklination. Magnetischer Theodolit. Bussole.

Deklination (Tab. 39) ist der Winkel des magnetischen mit dem astronomischen Meridian. Um die Richtung festzustellen, zählt man den Winkel vom astronomischen zum magnetischen Norden, nennt also bei uns die Deklination „westlich". — Insofern man die Lage der magnetischen Axe in einem Magnet nicht verbürgen kann, wird für eine genaue Messung die Magnetnadel in zwei Lagen beobachtet.

Zur Bestimmung nach Gauſs gehört ein Theodolit mit Horizontalkreis und eine ihrem astronomischen Azimut nach

vom Theodolit aus bekannte Visierrichtung: etwa ein Fadenkreuz mit Linse im Observatorium oder eine entfernte terrestrische Marke, welche man mit Hilfe des Polarsterns oder der Sonne festgelegt hat (**30a**; **31**); endlich ein Magnetometer, dessen Magnet sich um 180^0 um seine Axe drehen läßt. Das Theodoliten-Fernrohr steht nahe in der Fortsetzung des Magnets.

Am bequemsten ist, wenn der Magnet eine Längsdurchsicht hat, die am einen Ende mit einer Linse von einer Brennweite gleich der Länge des Magnets geschlossen ist. Am anderen Ende befindet sich eine Marke (Blende mit kleiner Öffnung, Fadenkreuz oder Glasteilung), welche also durch die Linse als ein fernes Objekt erscheint.

Ein mit dem Magnet verbundener Spiegel, dessen Normale nahe mit der magnetischen Axe zusammenfällt, leistet dieselben Dienste, wenn das Fadenkreuz des Theodoliten beleuchtbar ist. Man stellt das Fernrohr auf das Spiegelbild seines Fadenkreuzes ein.

Die Bezifferung des Teilkreises werde im Sinne der täglichen Sonnenbewegung angenommen.

Nach Vertikalstellung der Drehaxe des Theodoliten richtet man sein Fernrohr auf die terrestrische Marke. Die Kreisablesung sei $= \alpha$. Ist Z das astronomische Azimut der Marke, von der Nordrichtung als Nullpunkt nach Westen gezählt, so müßte der Theodolit auf den Teilstrich $\alpha + Z$ gestellt werden, damit das Fernrohr nach Norden gerichtet wäre.

Man richtet das Fernrohr auf die Marke im Magnet; die Kreisablesung sei α_1. Man dreht den Magnet um 180^0 in sich, so daß die vorher untere Seite die obere wird, und stellt wiederum auf die Marke ein. Die Kreisablesung sei α_2; α_1 und α_2 weichen nur wenig von einander ab.

Offenbar würde ohne Fadentorsion $\delta' = \alpha + Z - \frac{1}{2}(\alpha_1 + \alpha_2)$ die westliche Deklination sein. Um den Winkel φ zu bestimmen, um welchen der Faden bei der Beobachtung gedrillt war, nimmt man den Magnet von seinem Träger am Faden ab, ersetzt ihn durch einen unmagnetischen Stab von gleichem Gewicht und beobachtet die dann erfolgende Drehung φ des Trägers etwa über einem untergelegten Teilkreis. φ werde im Sinne

der täglichen Sonnenbewegung positiv gerechnet, Θ sei das Torsionsverhältnis (77); dann ist die Deklination

$$\delta = \delta' + \Theta\varphi.$$

Über Deklinationsschwankungen s. 74.

Magnetischer Theodolit.

Ein magnetischer Theodolit (Lamont, Meyerstein, Neumayer) enthält die Hilfsmittel zur Bestimmung der Deklination und der Horizontal-Intensität vereinigt. In der Drehaxe steht das Magnetometer; das Fernrohr sitzt, wie am Spektrometer, außen. Über Deklinationsbestimmung vgl. oben.

Die Intensitätsbestimmung umfaßt, wie in 78, erstens die Beobachtung von Schwingungsdauer und Trägheitsmoment des Magnets, zweitens die Beobachtung der Ablenkungen einer Nadel. Der Ablenkungswinkel wird mit dem Theodolitenfernrohr selbst gemessen, indem man dasselbe der abgelenkten Nadel nachdreht. Eine Marke in der durchbohrten Nadel oder das Bild des beleuchteten Fadenkreuzes (S. 254) in einem Spiegel an der Nadel dient zum Einstellen.

Bei dem vielfach benutzten Lamont'schen Theodolit ist das Fernrohr mit dem Magnetometer und der Schiene, auf welche der Ablenkungsmagnet gelegt wird, zusammen drehbar. Daher steht die Nadel bei der Ablesung senkrecht auf der Verbindungslinie nach dem Magnet, und es kommt anstatt der Tangente der Sinus des Ablenkungswinkels. Man rechnet nach der Formel

$$\frac{M}{H}\left(1 + \frac{\eta}{R^2}\right) = \tfrac{1}{2} R^3 \sin\varphi.$$

Das zweite Korrektionsglied mit $1/R^4$, welches sonst noch wirksam werden kann, pflegt man dadurch zu beseitigen, daß man die Nadel 2,1 mal kleiner nimmt als den Magnet; dann heben sich Magnet- und Nadellänge nahe heraus.

Die Größe η wird, wie in 78 S. 351, 352, durch Beobachtungen aus zwei Entfernungen ein für allemal ermittelt. So wie dort lenkt man sowohl von Westen wie von Osten ab, jedesmal in zwei Lagen des Magnets. Über die Korrektion wegen des von der Erde induzierten Magnetismus s. ebenda.

Ein leicht transportabler und zu handhabender magnetischer Theodolit ist von Neumayer konstruiert worden. Die Nadel wird mittels Spiegel beobachtet, ist umlegbar, spielt aber auf einer Spitze. Die Fadenaufhängung wird nur bei den Schwingungen des Magnets angewandt.

S. Eschenhagen in Kirchhoff, Anleitung zur deutschen Landes- und Volksforschung S. 118.

Winkelmessung mit der Bussole.

Tab. 39 enthält für die geographischen Längen und Breiten des mittleren Europa die westliche Deklination, d. h. den Winkel, um welchen

der Nordpol der Nadel nach Westen abweicht. Die Zahlen aus der Tabelle werden mit den wirklichen im Freien bis auf $\frac{1}{2}$ Grad äußerstens übereinstimmen. Hiernach läßt sich eine astronomische Richtung mittels der Magnetnadel mit mäßiger Genauigkeit festlegen.

Z. B. läßt sich die Richtung einer Wand usw. mittels einer angelegten Bussole mit geradlinig begrenzter Bodenplatte, die Richtung einer horizontalen Linie durch Projizieren auf die Teilung einer darauf gestellten Bussole, die einer Visierlinie nach einem fernen Gegenstande oder der Winkel zwischen zwei solchen Linien mittels eines mit der Bussole fest verbundenen Diopters oder Fernrohrs bestimmen.

Den Einfluß der Reibung auf der Spitze verringert man durch geringe Erschütterungen der Bussole vor der Ablesung der Nadel.

Umgekehrt kann man die Deklination bestimmen, wenn die Richtung der Wand oder der Linie usw. bekannt ist.

Bussolen, die in der Tasche getragen werden, hauche man vor dem Gebrauch an, um die häufig vorkommende elektrische Ladung von der Deckplatte zu entfernen.

79. Erdmagnetische Inklination.

Der Winkel, welchen die Richtung der erdmagnetischen Kraft mit der Horizontalen bildet und der in Mitteleuropa 60 bis 70° beträgt (Tab. 40), heißt Inklinationswinkel. Eine Magnetnadel, die im magnetischen Meridian drehbar ist und deren Schwerpunkt in der horizontalen Drehaxe liegt, würde diese Richtung anzeigen.

Das Inklinatorium besteht aus einem vertikalen Teilkreise, der mittels einer gewöhnlichen Bussolennadel in den magnetischen Meridian orientiert wird, und einer Magnetnadel, die sich in ihm dreht. Man liest wegen der Exzentrizität immer beide Spitzen der Nadel ab und nimmt aus den Bruchteilen des Grades das Mittel. Wenn man kann, soll man nicht die ruhende Nadel ablesen, sondern die Umkehrpunkte kleiner Schwingungen, aus denen man die Ruhelage wie bei der Wage ableitet; der Einfluß der Reibung ist dann kleiner.

Die Bezifferung der Kreisteilung variiert bei verschiedenen Instrumenten. Wir wollen annehmen, daß in allen Quadranten die Bezifferung von dem horizontalen Teilstriche als Nullpunkt ausgeht.

Der Nullpunkt eines Inklinatoriums mit feststehendem Kreise wird nach einem vom obersten Teilstrich herabhängenden Senkel eingestellt. An einem Instrumente mit drehbarem Kreise soll die Drehaxe vertikal sein, was man daran erkennt, daß

die Blase einer am Instrumente angebrachten Libelle in jeder Stellung des Kreises dieselbe Lage einnimmt (**30a** 1).

Wegen der etwaigen Abweichung der magnetischen von der geometrischen Axe und der unbekannten Lage des Schwerpunktes ist erstens die Nadel umzulegen (vorn und hinten zu vertauschen) bez. der drehbare Kreis mit der Nadel um 180° zu drehen. Eine etwaige Längsverschiebung des Schwerpunkts gegen die Drehaxe wird hierdurch aber nicht eliminiert. Deswegen ist zweitens die Nadel umzumagnetisieren und wieder in beiden Lagen zu beobachten.

Es werde also beobachtet der Neigungswinkel φ_1 bei der einen Auflage der Nadel, und ψ_1, nachdem die Nadel um ihre magnetische Axe um 180° gedreht ist; oder bei drehbarem Kreise, nachdem letzterer mit der Nadel um 180° gedreht worden ist.

φ_2 und ψ_2 seien entsprechend nach dem Ummagnetisieren die Winkel in den beiden genannten Lagen.

I. Sind die vier Winkel nahe gleich, so ist die Inklination i das arithmetische Mittel

$$i = \tfrac{1}{4}(\varphi_1 + \psi_1 + \varphi_2 + \psi_2).$$

II. Durch seitliches Abschleifen der Nadel vor der Messung läßt sich bewirken, daß φ_1 und ψ_1, sowie φ_2 und ψ_2 unter sich nahe gleich sind; dann ist

$$\operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2}[\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_1 + \psi_1) + \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(\varphi_2 + \psi_2)].$$

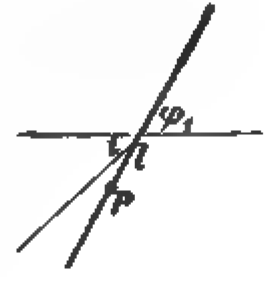
III. Sollten aber auch φ_1 und ψ_1 um einen größeren Betrag von einander abweichen, so setze man

$$\operatorname{ctg} \alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg} \varphi_1 + \operatorname{ctg} \psi_1)$$
$$\operatorname{ctg} \alpha_2 = \tfrac{1}{2}(\operatorname{ctg} \varphi_2 + \operatorname{ctg} \psi_2),$$

und rechne endlich

$$\operatorname{tg} i = \tfrac{1}{2}(\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2).$$

Formel II und III ergeben sich, wenn man die unbekannte Verschiebung des Schwerpunktes in ihre Komponenten parallel und senkrecht zur magnetischen Axe zerlegt denkt und nun die Bedingungen des Gleichgewichts der magnetischen und der Schwerkräfte aufstellt. Wäre z. B. der Schwerpunkt um die Größe l nach dem Nordende verschoben, so ist, wenn wir Gewicht und magn. Moment der Nadel durch p und M bezeichnen, und durch C die ganze Intensität des Erdmagnetismus (78 und Anh. Nr. 21),



$pl \cos \varphi_1 = MC \sin(\varphi_1 - i)$. Wird ummagnetisiert, so ist ebenso $pl \cos \varphi_2 = MC \sin(i - \varphi_2)$.

Die kreuzweise Multiplikation beider Gleichungen und die Auflösung der Sinus gibt, wenn durch $\cos i \cos \varphi_1 \cos \varphi_2$ dividiert wird,

$$\operatorname{tg} i - \operatorname{tg} \varphi_2 = \operatorname{tg} \varphi_1 - \operatorname{tg} i,$$

woraus II folgt. Ähnlich III.

Vorausgesetzt wird, daß der Magnetismus vor und nach dem Umstreichen der Nadel gleich ist, was bei sorgfältig gleichem Streichen einer dünnen Nadel nahe vorausgesetzt werden kann. Immerhin ist anzuraten, daß die Exzentrizität des Schwerpunktes nur kleine Differenzen der Einstellung vor und nach dem Ummagnetisieren ergibt.

Streichen der Nadel. Man faßt diese auf der einen Seite in der Nähe ihrer Drehaxe, setzt die andere Seite an den Pol des Magnets und führt die Nadel bis über das Ende an dem Pol entlang, etwa wie in beistehender Figur. So mögen z. B. beide Flächen des einen Endes je zweimal, dann die des anderen je viermal und endlich die des ersteren noch zweimal gestrichen werden.

Vollkommene Vorschriften s. Gauß' Werke, Bd. V, S. 444.

Über Induktionsmethoden vgl. 111 II.

Elektrizität.

80. Allgemeines über galvanische Arbeiten.

I. Gesetze des Zusammenhanges zwischen Stromstärke i, elektromotorischer Kraft oder Spannung E und Widerstand w.

Einheiten.

Die aus den Weber'schen Definitionen des absoluten Maßsystems entnommenen Einheiten sind durch Multiplikation mit einer Potenz von 10 auf eine für den Verkehr passend erachtete Größe gebracht worden (vgl. Anh. 24, 26 u. 29). Es gelten

für den Widerstand das Ohm	$1\ \Omega = 10^9$	Weber'schen CGS-Einh.
für die Stromstärke das Ampere	$1\ A = 10^{-1}$	" " "
für die Spannung oder elektromotorische Kraft das Volt	$1\ V = 10^8$	" " "

1 Millivolt $= 10^{-3}\ V$; 1 Mikrovolt $= 10^{-6}\ V$ usw.

Wegen der Schwierigkeit der absoluten Messungen ist gesetzlich die Stromeinheit auf das elektrochemische Äquivalent und die Widerstandseinheit auf das Quecksilber folgendermaßen zurückgeführt (internationale Einheiten):

Die Stärke 1 A hat der konstante Strom, der in der Sekunde 1,118 mg Silber abscheidet.

Den Widerstand 1 Ω hat eine Quecksilbersäule von 1,063 m Länge und 1 mm² Querschnitt bei 0°. Diese Säule wiegt 14,4521 gr.

Endlich ist 1 V die el. Kraft oder Spannung, welche in dem Widerstande 1 Ω den Strom 1 A erzeugt.[1])

Es ist also 1 Ω = 1,063 Siemens-Einh.

Ferner 1 Ω = 1,0136 Brit. Assoc.-Einh.

Zeitweilig war das Ohm definiert als 1,060 m Hg 0°, „legales Ohm". Es gilt:

Ohm: leg. Ohm: Brit. Ass.-Einh.: Siemens-Einh. = 1,063 : 1,060 : 1,0487 : 1.

Also in internationalen Einheiten ausgedrückt:

1 „leg." Ohm = 0,9972 Ω; 1 Siem.-E. = 0,9407 Ω; 1 B. A.-E. = 0,9866 Ω;
1 „leg." Volt = 0,9972 V.

---

1) Nur zwei von den Einheiten dürfen empirisch definiert werden, weil die dritte dann durch das Ohm'sche Gesetz vollständig bestimmt ist. Von den obigen Zahlen, die durch zahlreiche Messungen aus den Jahren 1880 bis 1890 begründet wurden, abzugehen, würde voraussetzen, daß neue absolute Messungen von verbürgter größerer Genauigkeit vorliegen als die genannten.

Die Ohm'schen Gesetze.

1. Der Widerstand eines der Länge nach gleichmäßig vom Strome durchflossenen Cylinders von der Länge l und dem Querschnitte q ist

$$w = \frac{1}{\varkappa}\frac{l}{q} \quad \text{oder} \quad = \sigma\frac{l}{q}. \tag{1}$$

$1/w$ nennt man wohl das Leitungsvermögen des ganzen Cylinders. $\varkappa$ heißt **Leitvermögen** (oder spezifisches Leitvermögen), $1/\varkappa$ oder σ **spezifischer Widerstand** der Substanz des Leiters.

Tab 30 und 31 enthalten diese Größen bei 18° auf Ohm, cm und qcm bezogen für gebräuchliche Leiter; für reines Kupfer z. B. $\sigma = 0{,}00000172$. Wird, wie es an einem Drahte gebräuchlich ist, l in m, q in mm² gemessen, so setzt man anstatt σ ein $\sigma' = 10^4\sigma$ — Ein reiner **Kupferdraht**, 1 m lang, d mm dick (p gr wiegend), also vom Querschnitt $q = (\frac{1}{2}d)^2\pi = 0{,}785\,d^2$ mm² (oder $q = p/8{,}7$) hat den Widerstand $w = 0{,}0172/(0{,}785\,d^2) = 0{,}0219/d^2$ Θ (oder $= 0{,}150/p$ Θ). — Ein cm-Würfel bestleitender Schwefelsäure von 18° ($\varkappa = 0{,}74$), hat $1/0{,}74 = 1{,}35$ Θ.

Ausbreitungswiderstand. Geht der Strom aus der ebenen Endfläche eines Kreiscylinders vom Halbmesser r in einen weiten Raum vom spezifischen Widerstand σ_1 über, so beträgt der Ausbreitungswiderstand ebensoviel, als wenn man den Cylinder (spez. Widerstand $= \sigma$) selbst um $0{,}80 r \cdot \sigma_1/\sigma$ verlängerte, also um $0{,}80 r$, wenn die Ausbreitung in dieselbe Substanz geschieht (Rayleigh; vgl. Maxwell § 309).

Andere Gestalten. Jeder Leiter hat, wenn die Ein- und Austrittsstellen des Stromes gegeben sind, einen bestimmten Widerstand, welcher bei Raum-Erfüllung mit homogener Masse $= \sigma \cdot C$ ist. C, die **Widerstandskapazität** des Raumes, hängt von der Gestalt ab, ist also für den longitudinal durchströmten **Cylinder** $= l/q$. — Für einen **Konus** von der Länge l und den Endhalbmessern r_1 und r_2, wenn der Strom durch die Endflächen gleichmäßig hindurchfließt, ist $C = l/(r_1 r_2 \pi)$ oder $= (l^2/v)[1 + \frac{1}{12}(q_1 - q_2)^2/q^2]$, wenn v das Volumen, q den mittleren und q_1 und q_2 die wenig verschiedenen Endquerschnitte bedeuten. — Für einen **Hohlcylinder** von der Länge h und den Halbmessern r_1 und r_2, der **radial** vom Strom durchflossen wird (wie die Flüssigkeit in einem galvanischen Element gewöhnlicher Gestalt) gilt $C = (\lg\text{nat}\, r_2 - \lg\text{nat}\, r_1)/(2\pi h)$.

2. Der **gesamte Widerstand** mehrerer hinter einander geschalteter Widerstände ist gleich ihrer Summe.

3. Die **elektromotorische Kraft** einer konstanten Kette ist gleich der Potentialdifferenz oder der Spannung ihrer Pole im offenen Zustande. Die gesamte el. Kraft eines Stromkreises ist gleich der algebraischen Summe aller el. Kräfte. Ist eine **konstante Kette** von der el. Kraft E und dem inneren Widerstande w_0 durch einen äußeren Widerstand w_1 geschlossen, so beträgt ihre Pol- oder Klemmspannung $E \cdot w_1/(w_0 + w_1)$.

4. Die **Stromstärke** i in einem Schließungskreise ist gleich der el. Kraft E geteilt durch den Widerstand w; $i = E/w$.

Die Gleichung $i = E/w$ oder $E = iw$ gilt auch für einen Stromleiter

vom Widerstande w, der selbst keine el. Kraft enthält, in dem Sinne, daß E die Potential- oder Spannungs-Differenz der beiden Endpunkte von w bedeutet; vgl. z. B. den Beweis der Wheatstone'schen Gleichung in **98**. Man drückt dies auch so aus: Der Spannungs-Verbrauch oder -Verlust durch den Strom i im Widerstand w beträgt iw.

Stromverzweigung. Verzweigt sich ein Strom J in mehrere Wege vom Widerstande $w_1, w_2 \cdots$ und sind die Zweigströme entsprechend $i_1, i_2 \cdots$, so gelten die Sätze 5, 6 und 7.

5. Die Summe der Zweigströme ist gleich dem unverzweigten Strom:

$$i_1 + i_2 + \cdots = J. \tag{2}$$

6. Die einzelnen Zweigströme verhalten sich umgekehrt wie die Widerstände der resp. Wege (oder direkt wie deren Leitungsvermögen):

$$i_1 : i_2 : \cdots = 1/w_1 : 1/w_2 : \cdots \tag{3}$$

7. Das gesamte Leitungsvermögen des verzweigten Weges ist gleich der Summe der Leitungsvermögen der einzelnen Wege, also gleich $1/w_1 + 1/w_2 + \cdots$ Zwei Widerstände w_1 und w_2 nebeneinander stellen also zusammen einen Weg dar vom Widerstande $w_1 w_2/(w_1 + w_2)$.

Bei veränderlicher Stromstärke treten Induktion und Kapazität der Leiter herein; vgl. **120**.

Kirchhoff'sche Regeln. Die Regeln A und B enthalten die Sätze 2 bis 7.

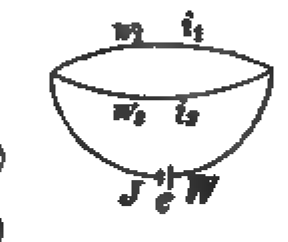
A) An jedem Verzweigungspunkte ist, wenn man den ankommenden Strömen das entgegengesetzte Vorzeichen gibt wie den abfließenden, die Summe der Stromstärken gleich Null.

B) Betrachtet man einen beliebigen in sich geschlossenen Teil der Leitung, nennt die darin vorhandenen el. Kräfte und Ströme der einen Richtung positiv, die der anderen negativ, so ist die Summe der Produkte aus den einzelnen Widerständen und den zugehörigen Stromstärken gleich der Summe der el. Kräfte.

1. Beispiel. Einfache Stromverzweigung. Es ist

nach A $\qquad i_1 + i_2 = J,$

nach B $\qquad i_1 w_1 - i_2 w_2 = 0 \quad$ und $\quad JW + i_1 w_1 = e.$



Aus diesen Gleichungen folgt

$$J = e\,\frac{w_1 + w_2}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2}; \quad i_1 = e\,\frac{w_2}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2} \tag{4}$$

also $\qquad J : i_1 = (w_1 + w_2) : w_2; \quad i_1 : i_2 = w_2 : w_1 \qquad (5)$

2. Beispiel. Wheatstone'sche Schaltung; Zweigströme und Widerstände den Zahlen entsprechend benannt.

$$J - i_1 - i_2 = 0 \qquad JW + i_1 w_1 + i_2 w_2 = e$$
$$i + i_2 - i_4 = 0 \qquad iw - i_2 w_2 + i_1 w_1 = 0$$
$$i + i_3 - i_1 = 0 \qquad iw + i_4 w_4 - i_3 w_3 = 0$$

wonach z. B., wenn der Brückenstrom $i = 0$ ist:

$$w_1 : w_2 = w_3 : w_4. \tag{6}$$

II. Strom-Erreger.

Amalgamieren des Zinks. Man gibt dem Zink mechanisch und in verdünnter Schwefelsäure oder wirksamer Salzsäure eine metallische Oberfläche und reibt Quecksilber ein oder man taucht das Zink in eine Lösung von Quecksilber-Chlorid oder Nitrat. Nach dem Gebrauch sollen die Zinke alsbald gebürstet und gespült werden.

Kohlen. Manche Kohlen verringern bei längerem Gebrauch ihre Wirksamkeit. Man sucht sie durch Abfeilen oder Erhitzen zu reinigen.

Thonzellen. Auswittern von Salzen schädigt die Zellen rasch. Gebrauchte Zellen legt man nach oberflächlichem Abspülen und Durchfiltrieren in Wasser. Bei dem Ansetzen eines Elementes soll die Zelle zuerst nicht mit Kupferlösung oder Salpetersäure, sondern mit Schwefelsäure befeuchtet werden. Man fülle die Schwefelsäure zu einer um $^1/_{10}$ bis $^1/_5$ höheren Säule ein, um das Durchdringen der anderen, schwereren Flüssigkeiten zum Zink zu verzögern.

Platinmohr. Über das Überziehen mit Platinschwarz s. 8, 18.

Gebräuchliche Flüssigkeiten.

Schwefelsäure. Für Elemente mit Zink spez. Gewicht höchstens = 1,06, d. h. etwa 50 ccm H_2SO_4 auf 1 l Wasser. Für schwache Ströme genügt meistens eine weit schwächere Säure. Wegen der Erhitzung gießt man die Säure langsam und unter Umrühren in das Wasser. Es ist darauf zu achten, daß die Säure durchaus kein Kupfer, auch keine Salpetersäure enthält. Reine Schwefelsäure anzuwenden, ist daher geraten.

Kupfervitriol-Lösung darf gesättigt sein (spez. Gewicht gegen 1,2; etwa 1 Teil kristallisiertes Salz auf 3 Teile Wasser). Der Strom verbraucht die Lösung, wodurch die Säule inkonstant wird.

Salpetersäure wird für stärkere Ströme „konzentriert" angewandt (spez. Gewicht 1,3 bis 1,4).

Chromsäure. Rezept nach Bunsen: 92 gr pulverisiertes Kaliumbichromat oder besser 81 gr Natriumbichromat (K_2- bez. $Na_2Cr_2O_7$) werden mit 94 ccm H_2SO_4 zu einem gleichförmigen Brei zusammengerieben. Ehe dieser erstarrt, setzt man 900 ccm Wasser zu und rührt, bis alles gelöst ist. Soll das Zink längere Zeit in der Flüssigkeit stehen, so ist die vorige Flüssigkeit mit Wasser zu verdünnen.

Etwas kostspieliger, aber angenehmer, weil feste Ausscheidungen wegfallen, ist eine wässrige Lösung von Chromsäure mit etwas Schwefelsäure.

Elemente.

Daniell. Zn, H_2SO_4, $CuSO_4$, Cu. Elemente, die an einem kühlen Orte lange stehen können, verfertigt man aus Cylindergläsern mit Kupfervitriolkristallen und Bleiplatte mit Guttaperchadraht am Boden; darüber ganz verdünnte Schwefelsäure und eine Zinkscheibe eingehängt.

Gewöhnliche Daniell-Elemente haben 1,08 bis 1,12 V. Stärkere Säure erhöht die Kraft; stärkere Kupferlösung kann bei schwachem Strome eine Verminderung bewirken. Nach Kittler gibt reines amalga-

miertes Zink, verdünnte Schwefelsäure von 1,075 spez. Gewicht oder 11% H_2SO_4, konzentrierte Kupfersulfatlösung von 1,20 spez. Gewicht, reines Kupfer, welches letztere vom Strome selbst gebildet wird, 1,18 ♈. Die Temperatur hat geringen Einfluß. Nach der Zusammensetzung pflegt die el. Kraft in der ersten Zeit etwas kleiner zu sein. Widerstand der gebräuchlichen Größen etwa 0,6 bis 0,8 Θ.

Bunsen oder Grove. Zn, H_2SO_4, HNO_3, C oder Pt. El. Kraft im guten Zustande etwa 1,9 ♈, bei starkem Strome oder schwächerer Salpetersäure geringer. Widerstand gebräuchlicher Größen 0,2 bis 0,1 Θ.

Chromsäure-Element. Zn, H_2CrO_4, C. El. Kraft bei nicht zu starkem Strome = 2,0 ♈. Starke Ströme von langer Dauer darf man von der Chromsäure-Batterie nicht verlangen. Ist die Flüssigkeit durch den Gebrauch ganz dunkel geworden oder hat sich gar Chromalaun ausgeschieden, so sind die Elemente geschwächt und inkonstant.

Für schwache Ströme von großer el. Kraft sind die in der Medizin gebräuchlichen Spamer'schen Trogapparate mit Chromsäure zweckmäßig.

Braunstein-Element (Leclanché). Zn, Lösung von NH_4Cl, zerkleinerter Braunstein, Kohle. Spannung stromlos etwa 1½ ♈. Mit Strom „inkonstant", d. h. die el. Kraft nimmt mit wachsender Stromentnahme durch Polarisation stark ab.

Smee. Zn, H_2SO_4, Pt oder Silber mit Platinmohr überzogen. Spannung stromlos etwa ¾ ♈, mit Strom bis 0,6 ♈ abwärts, je nach der Stromdichte.

Trockenelemente. Für manche Zwecke praktisch, in mannigfaltiger Ausführung, z. B. von Hellesen, Gassner.

Normalelemente.

Die folgenden Elemente sind nicht zur Stromerzeugung bestimmt, sondern vermöge ihrer — wenn sie vorschriftsmäßig zusammengesetzt sind — gut definierten Spannung zum Messen anderer Spannungen sowie zu Strommessungen nach der Kompensationsmethode. — Ohne Veränderung transportabele Elemente werden von der P. T. Reichsanst. geprüft und beglaubigt.

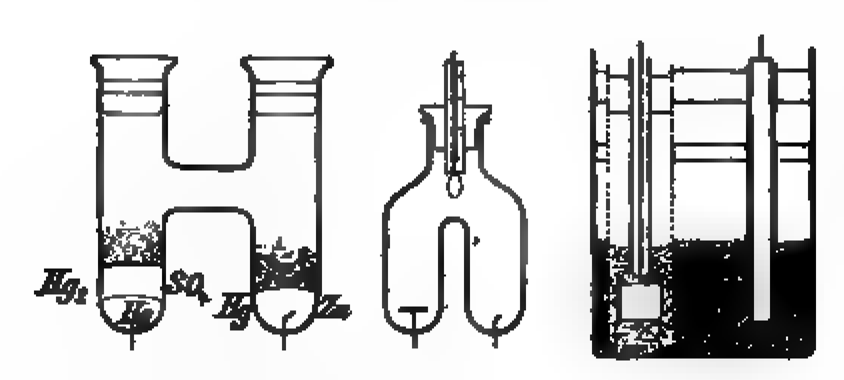
Eine zusammenfassende Behandlung s. W. Jaeger, Normalelemente, Halle 1902.

Clark-Element. Reines Quecksilber, Hg_2SO_4 (Oxydul!), $ZnSO_4$, amalgamiertes Zink oder Zink-Amalgam aus 90 Teilen reinen Quecksilbers und 10 Teilen reinen Zinks. Das bei gewöhnlicher Temperatur feste Amalgam wird heiß eingefüllt. Die Verbindung geschieht durch Platin-Drähte, welche durch Glasröhren von oben oder durch das Glas geschmolzen von unten eingeführt sind. Das Quecksilber oder Amalgam muß das Platin ganz überdecken.

Durch das Herantreten von Flüssigkeit an Amalgam und Platin kann Gasentwicklung entstehen; die Durchschmelzstelle wird ferner durch Zinkamalgam mit der Zeit gesprengt. Daher vermittelt man am besten

die Zuleitung zum Amalgam durch ein kommunizierendes, mit warm angesaugtem und nachher erstarrendem Amalgam gefülltes Rohr.

Formen der Normalelemente. Oft gebraucht ist die H-Form (Lord Rayleigh; Fig.). Daneben eine abgeänderte Form mit Glasstöpselverschluß (Kahle). Im Handel besonders auch die dritte Form (Feußner) mit einer Thonzelle um die Paste und das amalgamierte Platinblech. Das Quecksilber wird mit einer Paste aus Hg_2SO_4, Hg und reinen $ZnSO_4$-Kristallen bedeckt, die, vorher mit gesättigter $ZnSO_4$-Lösung zu einem schwer flüssigen Brei angefeuchtet, zusammengerieben sind. Amalgam und Paste füllt man ohne Benetzung der Wandung ein. Eine gesättigte Lösung von $ZnSO_4$ bedeckt das Ganze. Auf die Flüssigkeit wird heißes Paraffin gegossen, nach dem Erkalten eine Korkscheibe aufgesetzt, dann mit Marineleim oder heiß mit gutem Siegellack gedichtet. — Das käufliche reine Zinksulfat wird in Lösung mit metallischem Zink gekocht, bis sich Zinkhydrat abscheidet; dann filtriert. Zum Zwecke der Versendungsfähigkeit wird amalgamiertes Platin anstatt Quecksilber genommen und die zweite Form, nach Aufbringen von $ZnSO_4$-Kristallen auf das Amalgam, mit der Paste ganz gefüllt.



Siehe u. a. Kahle, Wied Ann. 51, 174 u. 203. 1894; ferner Jaeger l. c. Kleine Elemente für elektrometrische Ladungen s. Quincke.

El. Kraft des Clarkelements: zwischen 0° und 30° bei der Temp. $t°$

$$1{,}4292 - 0{,}00123\,(t-18) - 0{,}000007\,(t-18)^2 \text{ V}.$$

Die Polarisation hängt von der Größe der Elektroden ab; nach kurz andauernden Strömen verschwindet sie rasch. Größte zulässige Stromstärke ohne merkliche Polarisation bei gebräuchlichen Größen vielleicht $^1/_{20000}$ A. Nach Erwärmungen über 39° kann durch Umwandlung der Kristallform des Zinksalzes eine Änderung der Spannung eintreten, die sich unter Umständen nur durch Einbringen normaler $ZnSO_4$-Kristalle zurückbilden läßt.

Cadmium-Element (Weston). In H-Form gebräuchlich. Wie das vorige, nur Cd und $CdSO_4$ anstatt Zn und $ZnSO_4$. Sein Vorteil besteht in einem viel kleineren Temperatureinfluß. Das Amalgam enthält 10 bis 13 gr Cd auf 90 bis 87 gr Hg.

Man hat zu unterscheiden zwischen Elementen mit stets gesättigter und andrerseits mit konstanter, bei 4° gesättigter $CdSO_4$-Lösung. Die letzteren, von der Weston-Gesellschaft ausgegebenen Elemente haben, von der Temperatur so gut wie unabhängig, 1,0190 V. Die gesättigten haben zwischen 10° und 30°

$$1{,}0187 - 0{,}000035\,(t-18) - 0{,}00000065\,(t-18)^2 \text{ V}.$$

Stärkere als 13prozentige Amalgame können beim Gebrauch in der Nähe von 0° durch allmähliche Zustandsänderung die el. Kraft ändern.

Über die umfangreiche neuere Literatur vgl. Jaeger l. c.; außerdem u. a. neuere Abhandlungen von Wolff, Carhart u. Hulett., Literatur bei Hulett, ZS f. phys. Ch. 49, 483. 1904.

Tabelle für Clark- und gesättigte Cadmium-Elemente.

Temp. =	0°	5	10	15	16	17	18	19	20	25°
Clark	1,4491	,4440	,4386	,4328	,4316	,4304	,4292	,4279	,4267	,4202
Cd, gesätt.	1,0191	,0190	,0189	,0188	,0187	,0187	,0187	,0186	,0186	,0184

Kalomel-Element von Helmholtz. Zn, 5 bis 10% $ZnCl_2$-Lösung, fein gepulverter Kalomel, Quecksilber. Noch wenig untersucht. Mit $ZnCl_2$-Lösung vom sp. Gew. 1,4 gibt es ungefähr 1 V.

Akkumulatoren. Deren Wirkung beruht auf der Umwandlung des auf den Platten befindlichen $PbSO_4$ durch den ladenden Strom, einerseits in metallisches Blei, andrerseits in Bleisuperoxyd (PbO_2), wobei Schwefelsäure abgegeben wird. Bei der Entladung wird beiderseitig $PbSO_4$ zurückgebildet, so daß sich die Säurelösung durch das Laden verstärkt und umgekehrt. Nur reine (nicht in Platin eingedampfte) Säure anwenden, die von den Akkumulatorenfabriken bezogen werden kann! Es soll das spez. Gew. im geladenen Zustande je nach Vorschrift etwa 1,16 bis 1,25, im ungeladenen 0,03 bis 0,05 weniger betragen. Bei dem Nachfüllen wird im allgemeinen 5% Säure geeignet sein. Die Säure soll die Platten stets gut 1 cm überdecken.

Die Ladung ist tunlichst bis zur Gasbildung fortzusetzen. Stehen die Elemente ungebraucht, so soll man alle 14 Tage wieder bis zur Gasbildung aufladen. Sehr rasche Entladung oder Verbrauch der Ladung bis zur Abnahme der Wirkung ist zu vermeiden. Stark beanspruchte Elemente sind jedenfalls alsbald wieder aufzuladen.

El. Kraft mit Säure von 1,15 sp. Gewicht beim Gebrauch mit schwachem Strom = 2,0 bis 2,02 V; beim Laden bis 2,6 V. Widerstand meist sehr klein; el. Kr. auf + 1° um etwa 4‰ wachsend. Elemente mit innerem Kurzschluß (welche durch die Ladung z. B. warm werden und dieselbe rasch verlieren) sind zu entleeren. Abnorm große Spannung eines Elementes während des Ladens weist auf einen Fehler hin, der den inneren Widerstand vergrößert hat, meist durch Bildung einer inaktiven Bleisulfatschicht.

Auch andauerndes ungebrauchtes Stehen kann die Kapazität beeinträchtigen; diese pflegt sich dann durch den Gebrauch wieder zu heben.

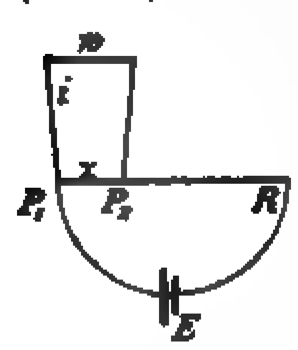
Beim Parallelschalten ist Vorsicht wegen ev. ungleicher Beanspruchung geboten, deswegen sind die Widerstände der Leitungen zu den Sammelschienen nahe auszugleichen.

Die Kapazität kann bei einer Flächengröße von f qdm des positiven Pols bis $4 \times f$ Amperestunden betragen.

Vgl. z. B. Dolezalek, Theorie des Bleiakkumulators, 1901

Dynamomaschine. Maschinenströme sind häufig wegen der Schwankungen eines Gasmotors inkonstant; die Vergrößerung des Trägheitsmomentes durch eine Schwungscheibe ist nützlich. Sehr konstant kann der Strom werden, wenn man Akkumulatoren in passender Anzahl gleichgerichtet neben die Maschine schaltet. Für physikalische Zwecke eignen sich Gleichspannungs-(Compound-)Maschinen am meisten. Man soll diese Maschine so wählen, daß Akkumulatoren mit reiner Nebenschlußmaschine, also ohne direkte Windungen geladen werden können. Vgl. noch 119.

Schwache el. Kräfte durch Abzweigung. Man schließt ein Element (Daniell; Akkumulator) konstant durch einen Widerstand (Rheostat oder blanker Draht) und benutzt zwei Punkte P_1 und P_2 dieses Kreises als Pole. Ist E die el. Kraft des Elementes, R der Gesamtwiderstand obigen Kreises (Rheostat und Element) und z der Widerstand zwischen den Abzweigepunkten, so gilt als el. Kraft der Kombination der Ausdruck $E \cdot z/R$ und als ihr Widerstand $z(1-z/R)$.



Denn wenn i der Strom in einer angelegten Leitung vom Widerstande w, so ist (vgl. S. 375, Gl. 4)

$$i = Ez:[(R-z)(w+z)+wz] = (Ez/R):[w+z(1-z/R)].$$

Thermo-Elemente. Über deren el. Kraft vgl. 48 I.

Große Spannungen. 1. Akkumulatoren. Es sind Batterien bis 20000 V gebaut worden. Zu berücksichtigen ist, daß die gewöhnlichen Isolationsmittel nicht genügen. Man montiert z. B. auf Glasplatten. Modelle für geringe Stromstärken s. u. a. bei Zehnder, Wied. Ann. 60, 47. 1897; Feufsner, Elt. ZS 26, 682. 1899. Bezugsquellen z. B. Klingelfuss in Basel und Mechaniker Bornhäuser in Ilmenau.

2. Influenzmaschine. Diese gibt wohl durchschnittlich Spannungen bis 50000 V und mit einer Scheibe geschlossen Stromstärken bis etwa 0,1 Milli-A, beiläufig der Drehzahl proportional. Die 60scheibige Maschine von Toepler bei 18 Dreh./sek 0,002 A. Die Wirkung wird gefördert z. B. durch Säubern der isolierenden Teile von hygroskopischen Überzügen mit destilliertem Wasser, Einschließen in einen Kasten mit Trockenmittel für die Luft, Erhöhung des Luftdrucks, Anstrahlen der Scheiben durch eine neben- oder zwischengestellte Petroleumlampe oder Erwärmen durch eine andere Heizung ohne Wasserdampf.

3. Hochspannungs-Transformatoren für Wechselströme. Gleichstrommaschinen mögen bis 4000 V gebaut werden können. Wechselstrommaschinen können viel höhere Spannungen geben, man zieht aber meistens vor, mit Transformatoren zu arbeiten (122), die als „Öltransformatoren" bis 50000 und für Laboratoriumszwecke bis 200000 V hergestellt worden sind. Vgl. Grawinkel-Strecker, S. 312 u. 346. 1900.

4. Induktorien. Meist wird die Rühmkorff'sche Form gebraucht werden, mit Platin- oder Quecksilberunterbrecher, bei dem letzteren in der Regel Alkohol als isolierende Flüssigkeit. Unterbrecher werden anstatt

nach dem Neeff'schen Prinzip behufs regelmäßiger Wirkung wohl durch kleine Elektromotoren angetrieben (z. B. Keiser u. Schmidt).

Neuere Formen sind der Turbinenunterbrecher (Boas), dessen Frequenz z. B. an einem mitlaufenden Gyrometer (119 V) abgelesen werden kann; der elektrolytische Unterbrecher (Wehnelt, Wied. Ann. 68, 233; Simon, ib. 68, 860. 1899); der Vakuum-Unterbrecher (Mac Farlan Moore, Elt. ZS 17, 637. 1896; vgl. Elster u. Geitel, Wied. Ann. 69, 483. 1899).

III. Strom-Verbindungen.

Die bloße Berührung starrer Leitungsteile gibt im allgemeinen keinen genügenden Schluß. Die sich berührenden Teile sollen dann aus Platin bestehen. — Axen an Stromschlüsseln oder Kommutatoren sind ohne Schleiffedern nicht zuverlässig. Die Berührung eines Metalles mit Kohle soll in einer größeren Fläche stattfinden.

Selbst bei der Anwendung von Klemmschrauben hat man die Oberflächenteile blank zu erhalten und muß die Schrauben fest anziehen.

Auch Quecksilber sichert nur dann eine widerstandsfreie Verbindung, wenn die das Quecksilber berührenden Metalle (Messing, Kupfer, Platin, auch wohl Eisen) amalgamiert sind; vgl. S. 11.

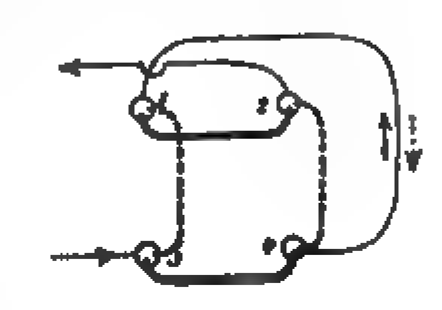
Über Stöpselverbindung s. IV.

Einschaltung und Benutzung sehr kleiner Widerstände. Verbindungen, welche keine relativ beträchtlichen Übergangswiderstände enthalten, lassen sich bei Leitern wie kurze dickere Drähte oder Metallstäbe nicht mehr improvisieren. In einen solchen Leiter führt man den Strom in möglichst sicherer Weise mit Klemmen oder Quecksilber an den Enden ein, grenzt aber den zu bestimmenden oder zu benutzenden Widerstand zwischen zwei inneren Punkten des Leiters ab. Wenn z. B. von einem solchen Leiter ein Zweigstrom abgenommen werden soll, so legt man die Ableitungen nicht an die Klemmen usw. sondern an zwei Punkte oder Querschnitte des Leiters selbst.

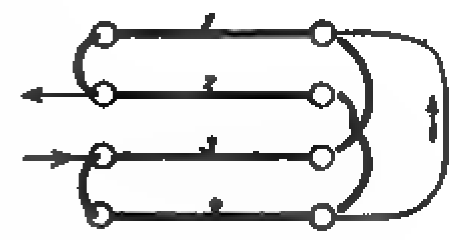


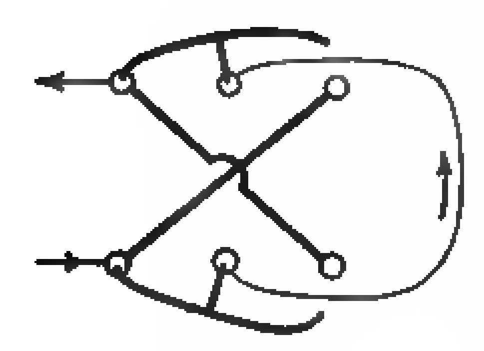
Über Meßwiderstände für Starkstrom s. S. 383.

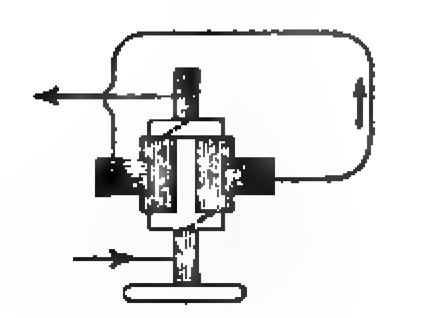
Kommutator oder Stromwender. Am einfachsten ist ein Brett mit vier Quecksilbernäpfen $\begin{matrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{matrix}$, von denen man durch ein Paar von Metallbügeln entweder 1 mit 2 und 3 mit 4 verbinden kann, oder 1 mit 3 und 2 mit 4. Zu 2 und 3 führt man die Drähte von der Stromquelle, zu 1 und 4 die Enden des Schließungskreises.



Mechanisch etwas bequemer ist die Wippe mit acht paarweise verbundenen Quecksilbernäpfen. An das mittlere Paar z. B. wird die Batterie, an das äußere die Schließung angelegt. Herunterklappen der linken Kupfer-







bügel verbindet 1 mit 2 und 3 mit 4, der rechten 1 mit 3 und 2 mit 4.

Die verbreitete Wippe mit zwei kreuzweise verbundenen Paaren von Quecksilbernäpfen, an welche die Batterie angelegt ist, und die sich durch Umwerfen von Kupferbügeln gegen die Nutzleitung vertauschen lassen, ist nur dann bequem, wenn sie (vermöge einer Stellfeder) auch zum Unterbrechen dienen kann.

Bei dem Cylinderkommutator wird z. B. an die Axen die Stromquelle angelegt und an die auf den metallenen Halbcylindern schleifenden Federn die Schließung. Jeder Halbcylinder ist mit einer Halbaxe leitend verbunden. Umdrehen um 180° kommutiert den Strom. Dieser Schlüssel ist ohne schleifende Federn an den Axen unzuverlässig.

IV. Rheostaten-Widerstände.

Für die Wahl des Materials ist maßgebend die Haltbarkeit, ein geringer Einfluß der Temperatur, endlich im allgemeinen noch ein großer spez. Widerstand; siehe hierüber Tab. 30. Für Präzisionswiderstände hauptsächlich Manganin (84 Cu, 12 Mn, 4 Ni), gegen Oxydation durch Schellack usw. geschützt; Temp.-Koeff. durchschnittlich $+0{,}0_{5}2$; Thermokraft gegen Kupfer klein. Außerdem Konstantan (60 Cu, 40 Ni), aber mit einer erheblichen Thermokraft als Fehlerquelle. Auch wohl „Patentnickel" (75 Cu, 25 Ni, die Legierung der Nickelmünzen); Temp.-K. etwa $+0{,}0_{3}2$. — Vgl. u. a. Feußner u. Lindeck, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. 2, 501. 1895; ZS f. Instr. 1895, 394 u. 425; Jaeger u. Lindeck ib. 1898, 97; Wied. Ann. 65, 572. 1898.

Neue Drähte erleiden anfangs eine merkliche Widerstandsänderung. Auch das Aufwinden beeinflußt den Betrag des Widerstandes. Längeres Erwärmen auf etwa 130° befördert das Konstantwerden.

Bifilare Wickelung der Rollen. Gewöhnliche Rollen leiden stark an Selbstinduktion und magnetischer Wirkung nach außen. Beide Fehlerquellen werden dadurch vermieden, daß der Strom benachbarte Windungen paarweise entgegengesetzt durchfließt. Zu dem Zweck knickt man den Draht in der Mitte und wickelt von hier aus beide Hälften miteinander auf; oder man windet zwei Drähte miteinander auf und verlötet ihre Enden geeignet. Solche Rollen unterliegen aber den besonders bei großen Widerständen auftretenden Störungen durch Ladungskapazität.

Unifilar abwechselnde Wickelung (Chaperon). Man wickelt kurze Lagen und kehrt nach jeder Lage die Windungsrichtung um, so daß auch hier in der fertigen Rolle der Strom ebenso viele Windungen in der einen wie in der anderen Richtung durchfließt. Dann ist sowohl

die Selbstinduktion wie die Kapazität klein. Rollen von 500 Ω aufwärts sollen in besseren Rheostaten so gewickelt sein.

Kleine Widerstände stellt man oft zweckmäßig durch Nebeneinanderschaltung größerer her.

Kleine Abänderungen eines Widerstandes w werden am einfachsten durch Nebenschalten eines großen Widerstandes R bewirkt. Dadurch entsteht der Gesamtwiderstand $w \cdot R/(R+w)$ oder nahe $w(1-w/R)$.

Widerstandssätze (Rheostaten). Für messende Zwecke sind die Sätze 1 2 3 4 oder 1 2 2 5 in jeder Dekade am gebräuchlichsten. Zum Zwecke der Fehlerbestimmung (95) soll der kleinste Widerstand doppelt vorhanden sein. — 10 gleiche Widerstände w, die man beliebig neben und hinter einander schalten kann, geben eine Auswahl von 94 verschiedenen Widerständen zwischen $10w$ und $w/10$.

Die an älteren Rheostaten vorkommende Verbindung von Nachbarrollen durch gemeinsame Zuführungen zu den Klötzen bedingt Fehler.

Stöpsel sind nur am Griffe anzufassen und vor Verletzung ihres Konus zu hüten. Sie werden mit etwas Drehung mäßig fest eingesetzt, häufig mit Leinwand und etwas Petroleum abgewischt und äußerstenfalls, aber ganz selten, mit feinstem Schmirgelpapier abgerieben. Der Widerstand eines guten Stöpsels bleibt bei richtiger Behandlung unter $\frac{1}{10000}$ Ω und läßt sich durch Sorgfalt auf $\frac{1}{20000}$ vermindern. Dicke Stöpsel sind unbequemer, als die von alter Form (W. Siemens), lockern sich durch die Benutzung ihrer Nachbarn leichter und bieten bei gewöhnlichen Stromstärken durchaus keinen Vorteil. — Temperatursteigerung lockert die Stöpsel. Bei längerem Nichtgebrauch lockere man sie absichtlich. — Vorteilhaft ist, wenn man jede Dekade für sich gebrauchen kann. — **Kurbelrheostaten** haben je 10 gleiche Stücke zwischen Knöpfen, auf denen Kurbelkontakte gleiten. Der Strom tritt am Knopfe Null ein und durch die Kurbel aus; vgl. z. B. Fig zu 108. Die Gleitkontakte sind mit ein wenig feinem Öl zu versehen. — Auf Axenkontakte ist kein Verlaß.

Rheostaten sollen ventilierbar und für Thermometer zugänglich sein.

Stromwärme. In w Ω entwickeln i A $0{,}24 \cdot w \cdot i^2$ gr-Kalor./sek (Anh. 30). Drähte von d mm Durchmesser würden ohne Wärmeabgabe sich durch i A etwa erwärmen um $0{,}4 \cdot \sigma/(cs) \cdot i^2/d^4$ Grad/sek (σ, c, s gleich spez. Widerstand, Wärme, Gewicht); also Kupfer um $0{,}008\, i^2/d^4$, Eisen um $0{,}06\, i^2/d^4$, Konstantan, Manganin, gutes Neusilber etwa um $0{,}15\, i^2/d^4$ Grad/sek.

Starkstrom-Widerstände werden frei durch die Luft oder durch ein Öl-, z. B. Petroleum-Bad geführt. Wellbleche und netz- oder siebförmige Leiter sind wegen rascher Wärmeabgabe bei kleinen Dimensionen zweckmäßig. — **Die Erwärmung** τ **frei gespannter blanker Drähte** oder Bleche vom Querschnitt q mm² und dem Umfang u mm durch den Dauerstrom i A läßt sich schätzen nach der Formel $\tau = i^2 \cdot C/(qu)$, wenn man für C einsetzt: bei Cu 0,35, Fe 2, Neusilber 6, Konstantan oder Manganin 10. — Soll also z. B. ein Konstantanblech von 0,5 mm Dicke sich

durch den Strom i A nicht über 20° erwärmen, so ist seine Breite x in mm bestimmt durch $20 = i^2 \cdot 10/[0{,}5 \cdot x \cdot 2(x+0{,}5)]$, oder wenn 0,5 in $x+0{,}5$ vernachlässigt werden darf, durch $20 = i^2 \cdot 10/x^2$, woraus $x = i/\sqrt{2} = i/1{,}4$; für $i = 50$ A z. B. 36 mm breites Blech. Ausführlichere Angaben bei Ayrton u. Kilgour, Phil. Trans. (A) 183, 376. 1892.

Zur gröberen Regulierung von Strömen können Glühlampen (hinter oder neben einander geschaltet) dienen.

Abzweigungen. Die häufig vorkommende Aufgabe, Ströme zu verzweigen, läßt sich meistens mit einem einzigen Rheostaten erfüllen, indem man die verschiedenen Leitungen an die geeigneten Metallklötze anlegt. Es sollen deswegen Vorkehrungen zu diesem Zweck vorhanden sein; nützlich sind zum mindesten einige Stöpsel mit Klemmschrauben. Die Figur zeigt, wie man mit einem gewöhnlichen Rheostaten an eine Galvanometerleitung,



unter Einschaltung eines Widerstandes (z. B. 900 Θ) in diese, eine Nebenschließung (z. B. 10 Θ) anlegt. Die Pfeile bezeichnen den Hauptstrom. — Wenn die einzelnen Dekaden durch überzählige Stöpsellöcher getrennt sind, so ist z. B. mittels eines Rheostaten möglich, in einen Stromkreis einen Widerstand einzuschalten, von einem Teile des Hauptweges eine Leitung abzuzweigen und in die letztere auch noch einen Widerstand einzuschalten.

V. Wirksamkeit der Säulen und Multiplikatoren.

Für starke Ströme in kleinen Widerständen sind vorzugsweise Größe und geringer Abstand der Metallplatten in den Elementen, sowie Leitvermögen und Konzentration der Kupferlösung oder der Salpetersäure maßgebend. Für Ströme in Leitungen von großem Widerstande kommen diese Umstände weniger in Betracht als die Anzahl der hinter einander verbundenen Becher.

Mehrere konstante Elemente hat man, um die größte Stromstärke in einer gegebenen äußeren Leitung zu erzielen, so neben oder hinter einander zu verbinden, daß der innere Widerstand dem äußeren nahe kommt. Wegen der Polarisation ist es praktisch meist besser, den inneren Widerstand etwas kleiner zu wählen. — Der Widerstand von n Elementen oder Gruppen neben einander ist n^2mal kleiner als von allen hinter einander.

Wasserzersetzung verlangt mindestens 2 Akkumulatoren, Bunsen- oder Grove'sche oder 3 Daniell'sche Becher.

Als Drahtstärke bei der Herstellung von Multiplikatoren (oder Elektromagneten) von gegebener Gestalt ist im allgemeinen die Stärke zu wählen, welche den Widerstand des Multiplikators dem übrigen Widerstande ungefähr gleich macht. Nach demselben Gesichtspunkte hat man auch die auf den Multiplikatoren oft zur Verfügung stehenden verschiedenen Windungslagen hinter oder neben einander zu verbinden, wenn die größtmögliche Empfindlichkeit verlangt wird. — Über „Normalempfindlichkeit" eines Galvanometers vgl. 88.

Näheres über Konstruktionen, Methoden oder Theorie wird man vielfach in den Werken finden: Wiedemann, Elektrizität, 4. Aufl. 1895 bis 1898; Maxwell, Electricity and Magnetism, deutsch v. Weinstein; Mascart et Joubert, l'Electricité et le Magnétisme, deutsch v. Levy.

Messungen in vollständigerer Aufzählung und Darstellung bei Heydweiller, Hilfsbuch für elektrische Messungen, Leipz. 1892.

Über Methoden für technische Zwecke siehe u. a. Uppenborn, Kalender für Elektrotechniker; besonders auch Strecker, Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik 6. Aufl. Berlin 1900. — Wechselströme betr. s. Feldmann, Wechselstromtransformatoren; Kapp, Transformatoren; derselbe, Dynamomaschinen; Heinke, Wechselstrommessungen; Rößler, Drehstrommotoren usw. — Ferner die Lehr- und Handbücher von Arnold, Gérard, Heinke, Kittler, Silv. Thompson (übers. von Strecker u. Vesper); auch die Lehrbücher von Armagnat, Benischke, Erhard und die elementare Darstellung von Graetz.

81. Absolute Messung der Stromstärke (W. Weber 1840). Tangentenbussole (Pouillet 1837).

Der Messung einer elektrischen Stromstärke legt man entweder die ursprüngliche Weber'sche Definition zugrunde (vgl. Anh. 24): der Strom

1 CGS oder Weber übt die Einheit der magnetischen Wirkung aus und: 1 A ist der 10te Teil des Stromes 1 CGS.

Oder: 1 A scheidet in 1 sek 1,118 mg Silber ab.

Oder: 1 A entsteht durch die elektromotorische Kraft 1 V im Widerstande 1 Ω.

Den beiden letzteren Definitionen entspricht der Gebrauch des Voltameters oder des Normalelements. Zur ersteren gehört die den Ausgangspunkt absoluter Strommessung bildende Tangentenbussole, ein weiter kreisförmiger Stromleiter um eine kurze Magnetnadel.

Die ersten folgenden Bemerkungen beziehen sich allgemein auf Galvanometrie

Zuleitungen. Es ist zu beachten, daß auch äußere Leitungen auf das Galvanometer wirken können. Wo dies vermieden werden muß, führt man Zu- und Ableitdrähte dicht neben einander oder um einander.

Kommutator. Ist die Windungsebene ungenau orientiert, so werden insbesondere große Ausschläge nach der einen Seite zu groß, nach der andern zu klein. (Man erkennt hieran die richtige Aufstellung oft besser als an der Einstellung auf den Nullpunkt, welche bei einer kurzen Nadel unzuverlässig ist.) Das Mittel aus beiden liefert den richtigen Ausschlag. Man schaltet also einen Kommutator (80 III) ein, welcher die Stromrichtung im Multiplikator umkehrt, ohne in der übrigen Leitung etwas zu verändern. Hiermit ist zugleich eine erhöhte Genauigkeit verbunden. Ein gut eingerichteter Kommutator dient ferner zum bequemen Schließen und Öffnen des Stromes.

Zum Beruhigen der Nadel kann ein kleiner Magnet dienen, welcher

nach dem Gebrauch hinreichend entfernt wird, oder auch der Kommutator selbst. Bei dem Umkehren des Stromes unterbricht man zunächst nur und schließt erst wieder, wenn die Nadel auf der anderen Seite umkehrt.

Ablesung. Bequem sind zwei zu der Nadelaxe senkrechte Zeiger. Behufs genauer Messung werden jedesmal beide einander gegenüberliegende Spitzen abgelesen. Vgl. S. 349. Zur Vermeidung der Parallaxe legt man auf die Bussole ein Stückchen Spiegelglas.

Über Spiegelablesung s. 25.

Die Windungsebene soll im magnetischen Meridian stehen, d. h. mit der nicht abgelenkten Nadel zusammenfallen.

Eine Tangentenbussole mit n kreisförmigen Windungen vom mittleren Halbmesser R cm an einem Orte von der magnetischen Horizontal-Intensität H (73; Tab. 38) ergibt aus ihrem Ablenkungswinkel α die Stromstärke i

$$i = \frac{RH}{2n\pi} \cdot \operatorname{tg}\alpha = C \cdot \operatorname{tg}\alpha \quad \text{CGS oder Weber.}$$

$C = RH/(2n\pi)$ ist der Reduktionsfaktor auf elektromagnetische CGS-Einheiten. $\operatorname{tg}\alpha$ siehe in Tab. 54; lg tg in Bremiker's fünfstelligen Tafeln. Über Korrektionen vgl. folg. S.

Beweis. Der Strom i durchfließt die Länge $n \cdot 2R\pi$ im Abstande R von der kurzen Nadel M. Er sucht letztere senkrecht zur Windungsebene zu stellen und übt, wenn sie um den Winkel α abgelenkt ist, das Drehmoment $i \cdot 2nR\pi/R^2 \cdot M\cos\alpha = i \cdot 2n\pi/R \cdot M\cos\alpha$ aus. Das erdmagnetische rücktreibende Drehmoment beträgt $HM\sin\alpha$; vgl. Anh. 24 u. 21. Durch Gleichsetzen beider Ausdrücke entsteht die Formel.

Da der Strom 1 Ampere der 10te Teil von 1 CGS ist, so wird der Reduktionsfaktor der Tangentenbussole auf Ampere, wenn man R und H in [cm, gr, sek] gemessen hat,

$$C_A = 5\frac{RH}{n\pi}.$$

Fadentorsion. Hängt die Nadel am Faden vom Torsionsverhältnis Θ (77), so ist $H(1+\Theta)$ statt H zu setzen.

Bestimmung von R. Man mißt den Durchmesser direkt mit Maßstab, Zirkel, Bandmaß oder Komparator, oder bestimmt den Radius aus der Länge l des Drahtes, welcher die n Windungen bildet, als $R = l/(2n\pi)$. Dünnere Drähte mißt und wickelt man unter derselben Spannung.

Intensität des Erdmagnetismus. Der Reduktionsfaktor ist durch den Erdmagnetismus nach Ort und Zeit veränderlich. Wo H nicht bestimmt worden ist, kann man es angenähert

aus Tab. 38 entnehmen; selbstverständlich unter dem Vorbehalt der Vermeidung von magnetischen Lokaleinflüssen, insbesondere auch durch längere Eisenmassen. Nach 75 kann man das Zimmer auf Konstanz von H prüfen, sowie auch Beobachtungsorte mit einem Platz im Freien usw. vergleichen.

Beispiel. Ein 1948,0 cm langer Draht ist in 24 kreisförmigen Windungen aufgewunden. Dann ist $R = 1948/(48 \cdot 3{,}1416) = 12{,}92$ cm. Ferner war H (für 51,5° geogr. Breite und 9,9° geogr. Länge; Tab. 38) gleich 0,1909, so beträgt die Stärke eines Stromes, welcher den Ablenkungswinkel α hervorbringt, nach elektromagnetischem Maße

$$\frac{12{,}92 \cdot 0{,}1909}{2 \cdot 24 \cdot 3{,}1416} \operatorname{tg}\alpha = 0{,}01636 \operatorname{tg}\alpha \text{ CGS (Weber), oder } 0{,}1636 \operatorname{tg}\alpha \text{ A}.$$

Günstigster Ausschlag. Ein Fehler von 0,1° bewirkt (vgl. S. 6)

bei einem Ausschlage	von	5	10	15	20	30	40°
		85	80	75	70	60	50°
einen Fehler im Resultat	von	2	1	0,7	0,55	0,4	0,35%.

Also sind sowohl sehr kleine wie sehr große Ausschläge der Genauigkeit nachteilig. Bei 30 cm Weite sind für Ströme $= i$ A etwa $n = 5/i$ Windungen zweckmäßig. — Für sehr verschiedene Stromstärken muß man Windungen von ungleicher Weite oder Anzahl anwenden oder eine Anordnung, bei der man eine verschiedene Anzahl einschalten kann. Sind mehrere Drähte mit einander aufgewunden und so angeordnet, daß alle Windungen hinter einander oder in n Gruppen neben einander geschaltet werden können, so ist der Reduktionsfaktor im letzteren Falle $n$mal größer als im ersteren. — Empirisch werden zwei Instrumente auf einander reduziert, indem man an beiden den Ausschlag mißt, welchen ein und derselbe Strom hervorbringt. Ist der Ausschlag $= \alpha_1$ am Instrument I und $= \alpha_2$ an II, so sind die Tangenten der Winkel an I mit $\operatorname{tg}\alpha_2/\operatorname{tg}\alpha_1$ zu multiplizieren, um sie mit den an II gemessenen vergleichbar zu machen. Windungslagen desselben Instrumentes vergleicht man nach 89 e.

Man hat Tangentenbussolen mit Multiplikatoren versehen, die man neigen kann; dadurch vergrößert man C im Verhältnis des reziproken Cosinus des Neigungswinkels (Obach).

Korrektion wegen des Querschnittes der Windungen und der Nadellänge. 1. Bildet der Querschnitt ein Rechteck von der Breite b und der Dicke h, so kann man die davon herrührende Korrektion erster Ordnung durch Multiplikation von C mit $1 + \frac{1}{8} b^2/R^2 - \frac{1}{12} h^2/R^2$ anbringen.

2. Für nicht sehr kurze Nadeln kommt erstens zu obigem Ausdruck noch der Faktor $(1 - \frac{3}{16} l^2/R^2)$ hinzu. Zweitens ist anstatt $\operatorname{tg}\alpha$ zu setzen $[1 + \frac{15}{16}(l^2/R^2)\sin^2\alpha]\operatorname{tg}\alpha$. l bedeutet den ganzen Polabstand der Magnetnadel, d. h. bei gestreckten Nadeln etwa $^5/_6$ der geometrischen Länge (72 b und Anh. 20).

Die vollständige Formel wird also unter Berücksichtigung der Kleinheit der Korrektionsglieder (vgl. Pogg. Ann. 141, 457. 1870):

$$i = \frac{RH}{2n\pi}\left(1+\frac{1}{8}\frac{b^2}{R^2}-\frac{1}{12}\frac{h^2}{R^2}-\frac{3}{16}\frac{l^2}{R^2}\right)\left(1+\frac{15}{16}\frac{l^2}{R^2}\sin^2\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha.$$

Einen strengen Ausdruck auch für Multiplikatoren von relativ größerem Querschnitt s. z. B. bei R. Kohlrausch u. Weber, Abh. d. K. Sächs. Ges. d. Wiss. 3, 257. 1857; oder W. Weber's Werke Bd. 3, 645. 1893.

Eine Nadellänge $l = \frac{1}{2}R$ gibt noch Abweichungen vom Tangentengesetz bis zu 1%. Für $\alpha = 27°$ heben sich die beiden von der Nadellänge herrührenden Korrektionen auf.

Kreisförmiger Reif von rechteckigem Querschnitt. R sei das Mittel aus innerem und äußerem Halbmesser, h die Dicke:

1. Statt $-\frac{1}{12}h^2$ ist in der vorigen Formel zu setzen $-\frac{1}{6}h^2$.

2. Der Reif sei aufgeschnitten und habe dem mittleren Radius parallele Zuleitungsstreifen von der Länge l mit einem gegenseitigen Abstand a ihrer Mittellinien: In die Korrektionsklammer ist noch zuzufügen: $+al/2\pi R\cdot(R+\frac{1}{2}l)/(R+l)^2$. Vgl. F u. W. Kohlrausch, Wied. Ann. 27, 21. 1886. Siehe dort auch die genaue Messung von R.

Den Kreisleiter kann ein Draht bilden, welcher auf eine flache Nut einer abgedrehten Glas- oder Marmorplatte aufgezogen ist. Dann verschwinden die von b und h herrührenden Korrektionen.

Hängt eine Nadel seitlich aus der mittleren Stromebene um den kleinen Abstand e verschoben, so kommt in die Klammer noch das Korrektionsglied $+\frac{3}{2}\frac{e^2}{R^2}$.

Relative Messungen.

Für manche Zwecke braucht man nur die Verhältnisse von Stromstärken zu kennen. Zwei Ströme verhalten sich wie die Tangenten ihrer Ablenkungswinkel

$$i : i' = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\alpha'.$$

Die Abweichungen vom Tangentengesetz werden durch excentrische Aufhängung der Nadel um $\frac{1}{4}$ des Windungsdurchmessers viel kleiner (Gaugain, Helmholtz).

82. Sinusbussole (Pouillet).

Der Strom im Multiplikator wird durch Nachdrehen um den Winkel α immer in die ursprüngliche Stellung zu der alsdann ebenfalls um α abgelenkten Nadel gebracht. Dann ist offenbar

$$i = C\cdot\sin\alpha.$$

Weil der Sinus höchstens $= 1$ ist, so sind die Grenzen der Anwendbarkeit eng. Hat die Bussole noch eine besondere Teilung, so kann man stärkere Ströme mit geneigter Stellung der

Nadel (etwa 45° und 70°) beobachten. Um den gegenseitigen Reduktionsfaktor der Angaben bei verschiedener Neigung zu bestimmen, werden die Ablenkungswinkel α_1 und α_2 desselben Stromes bei beiden zu vergleichenden Neigungen gemessen. Dann ist $p = \sin\alpha_1/\sin\alpha_2$ dieser Faktor.

Gegenüber der Tangentenbussole besteht ein Vorteil der Sinusbussole darin, daß die Giltigkeit des Sinusgesetzes streng ist, ein Nachteil in zeitraubender Einstellung und doppelter Fehlerquelle.

83. Spiegelgalvanometer.

Der drehbare Spiegel ist entweder mit einer Magnetnadel verbunden, die von dem Strom in feststehenden Multiplikatoren umkreist wird; in diesem Falle soll die Windungsebene der nicht abgelenkten Nadel parallel stehen. Oder die Stromspule ist mit Spiegel in einem magnetischen Felde drehbar (neuere Formen wohl als „Deprez-d'Arsonval" bezeichnet); die Windungsebene der nicht abgelenkten Spule soll mit der Feldrichtung zusammenfallen.

Die Ablesung geschieht an einer Skale mit dem Fernrohr oder objektiv mittels eines vom Spiegel entworfenen wandernden Lichtpunktes (25).

Über Kommutatoren vgl. S. 381, über Aufhängung von Nadeln, Astasierung und Astasierungsfaktor 72b; über Messen starker Ströme mit Abzweigung s. 86.

Empfindlichkeit eines Galvanometers. Der Ausschlag durch eine bestimmte Stromstärke hängt, außer von der Konstruktion des Instruments, noch von der Wahl der Drahtdicke, von der Astasierung, bez. bei Spulengalvanometern vom Aufhängedraht, und vom Skalenabstand ab. Um eine vergleichbare Charakteristik der Konstruktionen als solcher zu haben, kann man als Norm annehmen: einen Drahtquerschnitt, der 1 Ω Multiplikatorwiderstand ergeben würde; ein magnetisches Feld, welches der gegebenen Nadel eine einfache Schwingungsdauer von 5 sek erteilt; endlich einen Skalenabstand von 1000 mm. Der Ausschlag e_0-mm, welchen unter diesen Umständen der Strom 10^{-6} A oder 10^{-7} Weber geben würde, wenn der Ausschlag der Stromstärke proportional wäre, ist die Normalempfindlichkeit dieser Konstruktion. Gilt nun für ein vorhandenes Nadel-Instrument vom Widerstande w Ω, der Schwingungsdauer t sek und dem Skalenabstande A mm die Empfindlichkeit e mm/10^{-6} A, so ist $e_0 = e \cdot 1/\sqrt{w}\; 5^2/t^2 \cdot 1000/A$. Vgl. z. B. Du Bois u. Rubens, Ann. der Ph. 2, 91. 1900. — Über Drehspulengalvanometer s. S. 392.

Für kleine, mit Spiegel und Skale (25) beobachtete Ablenkungen pflegt der Strom bis zu Ausschlägen von einigen Graden merklich dem in Skalenteilen gemessenen Ausschlage e proportional zu sein, also $i = C\cdot\alpha$ oder $= C/(2A)\cdot e$, wenn A

den Skalenabstand vorstellt. Bei ungeändertem Skalenabstand ist dann also

$$i = \mathfrak{C} \cdot e.$$

Über die Bestimmung dieses Reduktionsfaktors $\mathfrak{C}$ in absolutem Maße vgl. 89.

Abweichung von der Proportionalität. Die Grenze, bis zu der die Proportionalität gilt, hängt von der Gestalt ab. Bei Nadelgalvanometern reicht sie im allgemeinen um so weiter, je kürzer die Nadel und je weiter der Multiplikator ist. Doch sind auch enge Multiplikatoren günstig, wenn sie zugleich breit sind. Die Abweichung von der Proportionalität ist nahe dem Quadrate des Ausschlags proportional, also $i = \mathfrak{C}e(1 + \mathfrak{C}'e^2)$. — Um auf Konstanz zu prüfen, bez. den Korrektionsfaktor $\mathfrak{C}'$ oder auch tabellarisch die Korrektionen zu ermitteln, die man an den Ausschlägen anbringen muß, um sie der Stromstärke proportional zu machen, bewirkt man verschiedene Ablenkungen (zirka 100, 200 usw. mm) dadurch, daß man dieselbe konstante Kette (Akkumulator, Daniell) durch das Galvanometer und verschiedene Rheostatenwiderstände schließt. Die Stromstärke ist dem Gesamtwiderstande (Säule + Galvanometer + Rheostat) umgekehrt proportional. Bei der Prüfung empfindlicher Instrumente werden die Rheostatenwiderstände so groß, daß die ersten beiden Teile nur genähert bekannt zu sein brauchen.

Schließlich wird entweder $\mathfrak{C}'$ berechnet, oder man trägt die Stromstärken als Abszissen, die Abweichungen der Ausschläge von der Proportionalität als Ordinaten auf (6) und entnimmt dieser Kurve die an den Skalenausschlägen anzubringende Korrektion. Vgl. auch 89.

Über ein genaues Verfahren mittels Nachdrehens des Multiplikators vgl. F. K., Wied. Ann. 26, 481. 1885.

Spiegelbussolen mit verschiebbaren Multiplikatoren (Wiedemann) werden empirisch geeicht. Man vergleicht die Ausschläge durch einen und denselben Strom bei mehreren Stellungen der Multiplikatoren auf dem Maßstabe und stellt die Ausschläge etwa graphisch dar. Wenn r der Halbmesser des Multiplikators, a sein Abstand von der kurzen Nadel, so steht die Empfindlichkeit ungefähr mit $(a^2 + r^2)^{-3/2}$ im Verhältnis.

In Galvanometerteilen, die einer Magnetnadel sehr nahe liegen, kann schon ein geringer Eisengehalt erheblich dadurch stören, daß die Ruhelage inkonstant oder der Ausschlag nach

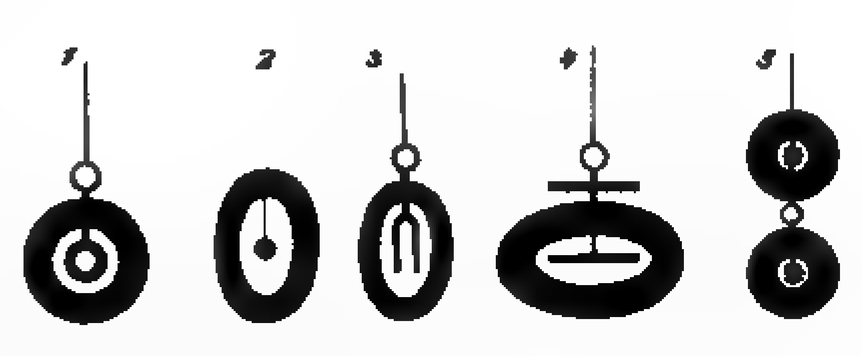
beiden Seiten ungleich wird. Äußerliche Spuren von Eisen werden durch Behandeln mit heißer Schwefelsäure beseitigt, die man nachher mit heißem Wasser abspült. Auch Lacke sowie Hartkautschuk und selbst Pigmente von Umspinnungen können durch Magnetismus stören.

Formen von Spiegelgalvanometern.

Nadelgalvanometer.

Der kleine Ausschlagswinkel ist gleich dem ablenkenden Moment des Stromes, geteilt durch die Direktionskraft der Nadel. Ersteres ist der Stromstärke proportional und setzt sich außerdem aus der Windungszahl, Gestalt und Lage des Multiplikators (Galvanometerfunktion) und dem Nadelmagnetismus zusammen. Letztere wird durch das magnetische Feld in seiner Wirkung auf den Nadelmagnetismus und durch die Fadentorsion bewirkt. — Bei einfachen, mit relativ verschwindendem Fadeneinfluß aufgehängten Nadeln hebt der Nadelmagnetismus sich heraus. Im Nenner steht dann nur die magnetische Feldstärke. — Über „Normalempfindlichkeit" vgl. S. 389.

Einige gebräuchliche Formen sind hierneben skizziert. Die empfindlichsten Instrumente entstehen aus der Verbindung der Spiegelablesung mit einer in sich astatischen oder von außen astasierten Doppelnadel im Doppelmultiplikator (Fig. 5; Formen von Lord Kelvin, Du Bois und Rubens, Paschen). Die größte erreichte „Normalempfindlichkeit" beträgt 7000. — Astatischen Systemen darf man, ohne eine Änderung der Empfindlichkeit befürchten zu müssen, keine starken Ströme zumuten.



Vollkommene innere Astasierung eines Nadelpaares ist schwer zu erreichen. Man hat vorgeschlagen, die paarweise Gleichheit der Pole durch die entgegengesetzte Verbindung zweier vertikaler Nadeln zu verbürgen. Diese kann man aber nur zwischen Multiplikatorhälften bringen; schwierig ist, sie genau parallel zu richten.

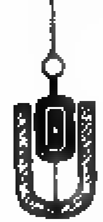
Will man einen engen Multiplikator mit größerem Ausschlage benutzen, so muß man das Instrument empirisch (89) graduieren. Eine einfache Funktion von dem Ausschlage ist die Stromstärke im allgemeinen nicht.

Über die der Empfindlichkeit günstigsten Begrenzungsformen der Multiplikatoren siehe u. a. W. Weber, W. Thomson, Mather.

Drehspulengalvanometer.

(Auch wohl nach Deprez-d'Arsonval benannt). Eine Stromspule hängt, die Windungen parallel den Kraftlinien, zwischen den Polen eines Stahl-

magnets; zuweilen befindet sich noch ein feststehender weicher Eisenkern im Innern der Spule; vgl. auch die Fig. zu 85, 2. Die Aufhängung und eine untere Leitung führen den Strom zu und ab. — Die Schwingungen werden gedämpft durch die in der Spule oder zugleich in einem Metallrahmen bei der Bewegung induzierten Ströme.



Von äußeren magnetischen Störungen sind die Instrumente so gut wie unabhängig Fehler können aus elastischer Nachwirkung entstehen und aus einer nicht zuverlässigen Klemmung des Aufhängedrahtes. Auch wirkt die Vertikalstellung auf den Ausschlag ein.

Ist H die Feldstärke, f die Spulenfläche, D die Direktionskraft der Aufhängung, so entspricht einem kleinen Ausschlage α (vgl. **83a**), wobei die Proportionalität aber im allgemeinen nur innerhalb kleiner Grenzen besteht, die Stromstärke

$$i = \frac{D}{fH}\alpha.$$

Die Empfindlichkeit steht hiernach mit f und H im direkten und mit D, also wenn nicht Spiralfedern hinzukommen, mit der 4. Potenz der Dicke des Aufhängedrahtes (55), im umgekehrten Verhältnis. Sie kann durch ein starkes Feld und feindrähtige Aufhängung fast unbegrenzt gesteigert werden. Doch wird tatsächlich eine Grenze gesetzt durch die gleichzeitig wachsende Dämpfung.

Größe der Dämpfung; „Kriechen". Die dämpfende Kraft wächst proportional $(fH)^2/w$ (**108**, Gl. 7b u. 8). Bei hoher Dämpfung, wo die Massenträgheit keine Rolle mehr spielt, gilt für die Geschwindigkeit dx/dt, mit der ein Abstand x von der Gleichgewichtslage sich ausgleicht, merklich $-\frac{dx}{dt} = \frac{Dw}{(fH)^2}x$, also stellt $\frac{1}{w}\frac{(fH)^2}{D}$ die Langsamkeit dieses Ausgleichs dar. Diese wächst mit gesteigerter Empfindlichkeit fH/D, und zwar schließlich zu einem solchen Grade, daß die Einstellung zu merklicher Ruhe lange Zeiträume beanspruchen kann. Da D in der ersten, f und H aber in der zweiten Potenz auftreten, so folgt, daß dieses „Kriechen" weniger stark auftritt, wenn man die Empfindlichkeit durch eine feindrähtige Aufhängung, als wenn man sie durch ein starkes Feld (oder eine große Windungsfläche) bewirkt.

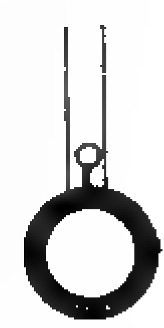
Das Kriechen wird vermindert durch den Widerstand w, also durch feinen Draht auf der Spule oder auch durch Vorschalten äußeren Widerstandes. Reguliert man durch das letztere Mittel auf den Grenzzustand aperiodischer Dämpfung (**108** am Schluß), so erzielt man erstens die größte noch brauchbare Empfindlichkeit bei gegebener elektromotorischer Kraft, außerdem die rascheste Einstellung und endlich einfache Formeln für die Ausschläge. Vgl. hierüber Diesselhorst, Ann. der Ph. 9, 461. 1902; Jaeger, ZS f. Instr. 1903, 261. Ferner **108**.

Neue Bestrebungen gehen darauf hinaus, das magn. Feld regulierbar zu machen.

Ballistisches Galvanometer (z. B. Fig. 4, S. 391). Die Schwingungen sind hinreichend langsam, daß Ausschläge der bewegten Nadel und Schwingungsdauern gemessen werden können. Über die Eichung, Theorie und Anwendung des Instruments s. **109** bis **114**.

83a. Absolutes Bifilargalvanometer (Weber 1840).

Der Strom i geht durch einen an zwei Zuleitungsdrähten aufgehangenen Multiplikator mit nordsüdlicher Windungsebene; die Fadenebene ist ostwestlich zu denken. Mit dem Instrument wurde von Weber 1840 das elektrochemische Äquivalent zuerst bestimmt.



Ist f die Gesamtfläche der Windungen (**106**), so ist fi das magnetische Moment der Stromspule, und der Erdmagnetismus H (**73**) bewirkt das Drehmoment fiH.

D sei die Direktionskraft der bifilaren Aufhängung (**27a**). f, H und D seien in CGS gemessen. Einer Ablenkung α entspricht der Strom

$$i = D/(fH) \cdot \operatorname{tg} \alpha \ \text{CGS}.$$

Absolute Strommessung mit Tangentenbussole und Bifilargalvanometer. Da H im Reduktionsfaktor der Tangentenbussole (**81**) im Zähler vorkommt, so läßt die gleichzeitige Anwendung beider Instrumente einen Strom ohne Kenntnis des Erdmagnetismus absolut messen. Vgl. **105** II.

Auch f fällt heraus, wenn man so verfährt: Die Tangentenbussole mit n Windungen vom Halbmesser R sei im Abstande a nördlich oder südlich vom Bifilargalvanometer aufgestellt. Die Nadel werde um Φ abgelenkt, wenn die Wirkungen des Stromes im Bifilar und der Tangentenbussole sich summieren, um φ dagegen, wenn der Strom in der Tangentenbussole allein gewendet wird. Dann erhält man i aus

$$i^2 = \frac{R^2 D}{8\pi^2 n^2 a^3} \frac{(\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\varphi)^2}{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\varphi} \operatorname{tg}\alpha.$$

Beweis einfach; vgl. **106**. Über einige Korrektionen s. **105** II.

84. Elektrodynamometer (Weber 1846). Messung von Wechselströmen.

Der Strom durchfließt eine feste Drahtrolle und eine drehbare, zur festen konzentrische, aber senkrechte. Das ausgeübte Drehmoment, welches die Ströme in beiden Rollen parallel zu stellen sucht, ist also proportional i^2; seine Richtung ist von der Stromrichtung unabhängig. — Eine Direktionskraft wird von der bifilaren Stromzuleitung oder von der elastischen Torsionskraft der Aufhängung geliefert. Ob die innere oder die äußere Rolle die drehbare ist, macht im Prinzip keinen Unterschied.

I. Dynamometer mit Ausschlägen.

Kleine Ausschlagswinkel α oder Skalenablenkungen e der beweglichen Rolle sind dem Quadrate der Stromstärke i proportional, also ist

$$i = C \cdot \sqrt{\alpha} \text{ oder } = \mathfrak{C} \cdot \sqrt{e},$$

wo C oder $\mathfrak{C} = C/\sqrt{2A}$ ein Faktor für das betreffende Instrument ist. Die Empfindlichkeit des Instrumentes ändert man durch Verstellen des Abstandes der Bifilaraufhängung oder bei eindrähtiger Aufhängung durch Auswechseln des Aufhängedrahtes. C ist cet. par. der Schwingungsdauer umgekehrt proportional. Über die absolute Bestimmung von C vgl. **89**.

Stromwechsel im ganzen Instrument ändert die Richtung des Ausschlages nicht. Mit einem Kommutator verbindet man daher nur die eine der Rollen. Für schwache Ströme wird das Dynamometer unempfindlich, da der Ausschlag dem Quadrate der Stromstärke proportional ist.

Genaue Messungen verlangen Vorsichtsmaßregeln wegen des Erdmagnetismus und der elastischen Nachwirkung.

Senkrechtstellung. Wenn die beiden Rollen nicht genau senkrecht aufeinander stehen, so üben Wechselströme in der einen eine Induktion auf die andere aus. Um die senkrechte Stellung zu prüfen, leite man also Wechselströme nur durch die feste Rolle, während die bewegliche in sich geschlossen ist. Die letztere darf dann nicht abgelenkt werden.

Bei eindrähtiger Aufhängung der beweglichen Rolle kann man für schwache Wechselströme die untere Zuleitung durch ein platiniertes (8, 18) Platinblech bewirken, welches in verdünnte Schwefelsäure untertaucht und zugleich zur Dämpfung dient. Den dünnen Stiel platiniert und glüht man. Vgl. **15** A 3.

S. auch **120** IV das Dynamometer von Raps.

II. Dynamometer mit Null-Ablesung (Siemens).

Einen Vorteil bietet das größere Meßbereich. Die Stromstärke wird durch den Torsionswinkel φ einer elastischen Aufhängefeder bestimmt, indem man die abgelenkte bewegliche Rolle mittels eines Torsionskopfes auf Null zurückführt. Die Stromstärke ist $i = C \cdot \sqrt{\varphi}$.

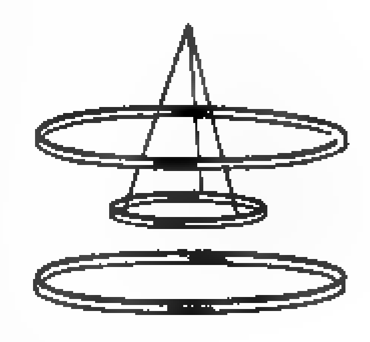
Die Axe der beweglichen Rolle soll nordsüdlich stehen, damit der Erdmagnetismus nicht einwirkt. — Das Quecksilber der Zuleitnäpfe soll rein sein; durch etwas aufgegossene Lösung von Quecksilbernitrat wird dies befördert.

Über die Bestimmung bez. die Kontrolle von C vgl. **89**.

III. Elektrodynamische Wage.

Zu den Dynamometern sind auch die mit einem Wagebalken verbundenen Spulen zu rechnen (Rayleigh, Helmholtz, Kelvin), auf die derselbe Strom von einer feststehenden Spule aus wirkt. Die durch aufgelegte oder Lauf-Gewichte gemessene Kraft ist auch hier dem Quadrate der Stromstärke proportional.

Wage von Lord Rayleigh. Eine flache, an einer Wage aufgehangene Spule vom Halbmesser r befindet sich in der Mitte zwischen zwei größeren, einander gleichen, flachen Spulen vom Halbmesser R. Die Ströme in den beiden äußeren Spulen fließen einander entgegengesetzt, so daß die auf die bewegliche Spule ausgeübten Kräfte sich addieren. Man wählt für absolute Messungen r/R etwa $= {}^1/_2$.



Der Abstand a der Spulen ist so reguliert, daß die Kraft ein Maximum wird. Die Theorie ergibt für diesen Fall

$$a = \tfrac{1}{2} R \left[1 - \tfrac{9}{10}\left(\frac{r}{R}\right)^2 - \tfrac{1}{8}\left(\frac{r}{R}\right)^4 \cdots\right],$$

also wenn die bewegliche Spule sehr klein wäre, $a = \frac{1}{2} R$, in Wirklichkeit kleiner. In dieser Maximumlage enthält nun die Kraft außer dem Quadrate der Stromstärke und dem Produkte der beiden Windungszahlen bloß noch einen Faktor, zu dessen Ermittelung wesentlich nur das Verhältnis r/R bekannt sein muß, welches aus der Galvanometerwirkung der Spulen auf eine kurze Magnetnadel (**106**) abgeleitet werden kann. Der Faktor beträgt in erster Annäherung etwa $17 r^2/R^2$. — Die Stromzuleitung zur beweglichen Spule geschieht durch weichen Draht. Man mißt an der Wage durch Kommutieren des Stromes in der aufgehangenen oder in den festen Spulen die doppelte Kraft.

Näheres bei Rayleigh und Sidgwick, Electroch. Equival. of Silver, Phil. Trans. (A) 175, 411. 1884; Heydweiller, Wied. Ann. 44, 533. 1891.

An der in der Technik häufig gebrauchten Stromwage von W. Thomson trägt ein Wagebalken beiderseitig bewegliche Spulen zwischen je einem Paare fester Spulen, die in der Rayleigh'schen Weise angeordnet sind. Vgl. **120**.

Wage von Helmholtz. Eine größere Spule wirkt drehend auf eine mit einem Wagebalken verbundene kleine Spule, deren Windungsfläche nach **106** bestimmt wird. Der Balken rollt auf

Bändern, die zugleich den Strom zuleiten. Die Konstante des Instruments wird durch Vergleichung mit einer großen quadratischen Windung aus dünnem Blech, deren Wirkung auf die drehbare Spule man berechnen kann, empirisch bestimmt.

Vgl. Kahle, Wied. Ann. 59, 582. 1896.

Eine andere Form bei Mascart, Exn. Rep. 19, 220. 1883.

Zu dem Typus von Instrumenten mit einem dem Quadrate der Stromstärke proportionalen Ausschlag, dessen Richtung von der Stromrichtung unabhängig ist, gehören auch (85) die Stromzeiger mit weichem Eisen und die Hitzdrahtinstrumente. Auch sie sind auf Wechselströme anwendbar, zeigen im großen und ganzen die effektive Stromstärke an und lassen sich, richtig behandelt, zu deren genäherter Messung gebrauchen.

Wechselströme. Stromleistung; effektive Stromstärke.

Die häufigste Anwendung des Dynamometers bezieht sich wegen der Unabhängigkeit der Ausschlags- von der Stromrichtung auf Wechselströme, d. h. auf Ströme, die, einzeln von gleichem Stromintegral, rasch hinter einander in abwechselnder Richtung folgen. Der Ausschlag des Dynamometers mißt die mittlere Leistung, d. h. Energie des Stromes in der Zeiteinheit, insofern die Leistung in jedem Augenblick dem Quadrate der Stromstärke, im Mittel über die Zeitdauer t einer oder mehrerer ganzer Perioden also dem Ausdruck $\frac{1}{t}\int_0^t i^2 dt$ proportional ist. Gerade diese Größe mißt der Dynamometerausschlag. Die Quadratwurzel aus dem Ausdruck heißt, seinem Verhältnis zur Leistung entsprechend, die effektive Stromstärke; vgl. noch 120 I.

Bei Wechselströmen ist auf die Induktion, und zwar in erster Linie auf die Selbstinduktion der Rollen Rücksicht zu nehmen. Insbesondere kann die Verteilung des Stromes zwischen dem Instrument und einer Abzweigung (86) für rasch wechselnde Ströme von der aus den Widerständen berechneten Verteilung stark abweichen. Auch die Induktion auf benachbarte Leiter, wie etwa auf metallische Rahmen der Spulen, kann in Betracht kommen und in dicken Stromleitungen sogar die Wechselinduktion zwischen ihren verschiedenen Stromfäden, wobei der Strom mit steigender Wechselfrequenz immer mehr nach der Oberfläche gedrängt wird. Beliebig rasch schwingende Ströme

laufen schließlich nicht mehr merklich durch den inneren Teil von Leitungen.

Vgl. auch **85**, 3 u. 4, **85a** und Leistungsmesser **120**.

85. Verschiedene Formen von Stromzeigern.

Vorzüge der neueren, den technischen Bedürfnissen entsprungenen Formen von Strommessern bezüglich bequemen und ausgiebigen Gebrauchs sind:

1. Die Graduierung nach einer unmittelbar verständlichen Einheit. Durch die hohe Unabhängigkeit von äußeren magnetischen Einflüssen sowie durch die Haltbarkeit der Konstruktion und der in ihr enthaltenen Magnete wird die zeitliche Konstanz des Skalenwertes in einem früher nicht erreichten Maße verbürgt, womit indessen Nachprüfungen keineswegs für überflüssig erklärt werden sollen.

2. Der auf die Anwendung temperaturunabhängigen Leitungsmaterials gegründete, konstante und meist auf eine runde Zahl, z. B. 1 oder 100 Θ, zurückgeführte Galvanometerwiderstand. Die genaue Abgleichung geschieht in der Regel durch eine Nebenleitung.

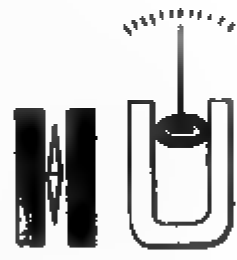
3. Die erhöhte Empfindlichkeit auch ohne Spiegelablesung.

4. Die rasche, sichere Einstellung, welche großenteils mit der Weston'schen Aufhängung zwischen Spitzen und der dabei angewandten elektromagnetischen Dämpfung zusammenhängt.

5. Die Erweiterung des Empfindlichkeitsbereiches für Strommessung durch nebengeschaltete (**86**), für Spannungsmessung durch vorgeschaltete (**101**) Widerstände. Die Nebenschlüsse können in der Regel gleich zu dem Instrument mitbezogen werden, meistens in Beträgen, welche den Skalenwert mit 10, 100, 1000, 10000 aber auch Zwischenstufen multiplizieren. Zum Vorschalten können Rheostaten, und zwar wegen der runden Zahl des Hauptwiderstandes in bequemer Weise gebraucht werden. Das Instrument gewinnt so einen weiten Umfang seines Gebrauchsgebietes.

1. Feststehender Multiplikator und Magnetnadel mit Zeiger.

Ältere Instrumente haben meistens diese Form. Die Empfindlichkeit ist der magn. Feldstärke umgekehrt proportional, welche deswegen bei Instrumenten für starke Ströme wohl durch genäherte Magnetpole vergrößert wird (Fig.). An einer vertikal drehbaren Nadel kommt die Schwere hinzu. Konstanz der Angaben setzt also voraus, daß der Nadelmagnetismus und die Lage des Schwerpunkts gegen die Drehaxe, im allgemeinen auch die Stellung gegen den Meridian ungeändert geblieben sei. Die Skale muß also kontrolliert werden. In jedem Fall soll die nicht abgelenkte Nadel den Windungen parallel stehen.

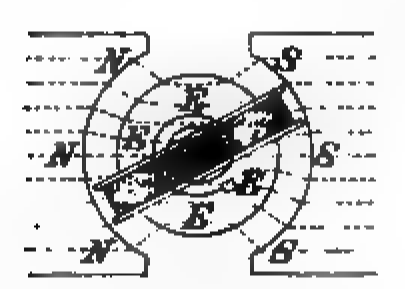


Die Abhängigkeit des Ausschlages von der Stromstärke ist nach der Gestalt verschieden und stellt häufig eine komplizierte Funktion dar, so

daß man aus der Ablenkung nur auf ein Mehr oder Weniger der Stromstärke schließen kann, was aber für eine Reihe von Anwendungen genügt. Teilungen, welche wirklich die Stromstärke angeben sollen, müssen empirisch hergestellt und geprüft werden (89).

2. Weston's Drehspulen-Strom- und Spannungsmesser. Vgl. S. 391.

Im starken Magnetfelde ist zwischen Spitzen eine Spule drehbar (Fig. von oben gesehen). Elastische Spiralfedern geben Stromzuführung und Direktionskraft, welche die nicht abgelenkten Windungen in die geeignete Stellung zu den Kraftlinien richtet. Der Strom erteilt dann ein Drehmoment, welches die Windungen zu den Kraftlinien senkrecht zu stellen sucht. Halbcylindrische Magnetpole und ein feststehender Eisencylinder E innerhalb der Spule, der die Kraftlinien in dem zwischenliegenden Luftraum fast radial richtet (Fig.), lassen den Ausschlag ziemlich gleichmäßig mit der Stromstärke wachsen. Die Empfindlichkeit ist cet. par. der Feldstärke proportional. Über die Herstellung anderer Skalenwerte durch Abzweigung vgl. 86. — Dämpfung liefern die in dem Metallrähmchen der Spule durch die Bewegung im Magnetfeld induzierten Ströme.



Das Instrument muß vor starken magnetischen Einflüssen von außen behütet werden. — Bei dem Ankauf oder bei dem Gebrauch beachte man, ob die elastische Nachwirkung unmerklich ist, d. h. ob nach länger dauernden Ablenkungen der Nullpunkt sich wiederherstellt.

Vgl. z. B. Raps, Elt. ZS 1896, 264.

3. Strommesser mit weichem Eisen.

Unveränderlich und, geeignet gebraucht, für manche Messungen genügend genau sind die Instrumente, bei denen der Strom auf weiches Eisen in mannigfach ersonnener Weise zunächst magnetisierend und dann drehend oder ziehend wirkt. Für mäßige Ströme sind die Kräfte beiläufig dem Quadrate der Stromstärke proportional. Die Ausschläge durch schwache Ströme werden unbrauchbar klein. Wechselströme (S. 396) wirken auf solche Instrumente. Eine Graduierung für Wechselstrom muß die Wechselfrequenz berücksichtigen.

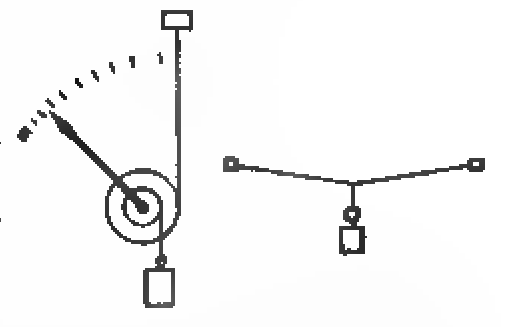
Multiplikator mit weichem Eisendraht (Bellati). Ein aufgehängter Eisendraht bilde mit der Windungsebene einen Winkel von etwa 45°. Der Strom magnetisiert das Eisen und lenkt es infolgedessen zugleich ab. Die Ausschlagsrichtung ist von der Stromrichtung unabhängig, also kann man das Instrument für Wechselströme gebrauchen. Auch ein gewöhnliches Galvanometer mit schräg gestellter Nadel reagiert auf Wechselströme (Cheesman).

Vgl. Giltay, Wied. Ann. 25, 325. 1885.

Feder-Stromwage (Fig.). Eine vertikale Spule zieht einen an einer elastischen Feder aufgehangenen Eisenkörper je nach der Stromstärke mehr oder weniger tief in sich hinein Die Ablesung erfolgt an dem Eisenkörper selbst oder an einem von ihm bewegten Zeiger. Die Graduierung des Instrumentes geschieht empirisch (89). Die Angaben sind konstant, wenn man das Eisen vor der Ablesung tiefer in die Spule eintaucht, sonst bleiben sie bei ansteigender Stromstärke ein wenig hinter dieser zurück. Für schwache Ströme und Wechselströme gilt das oben Gesagte. — Permanent magnetische Stahlnadeln sind auch für schwache Ströme geeignet. Man magnetisiert sie zuvörderst durch einen kräftigen Strom in der Spule. Nach längerem Nichtgebrauch erneuert man dies.

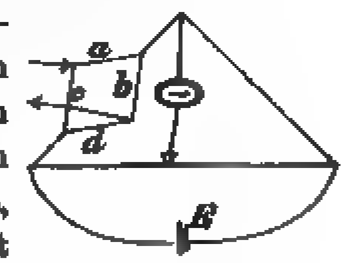
4. Erhitzungs-Strommesser.

Hitzdraht-Strommesser (Hankel; Cardew). Die durch einen Widerstand entwickelte Wärme ist dem Quadrate der Stromstärke proportional. In den Grenzen, innerhalb deren die abgegebene Wärmemenge dem Temperaturüberschusse über die Umgebung proportional und der Widerstand hinreichend konstant ist, mißt also die Temperaturerhöhung eines Drahtes das Quadrat der Stromstärke, ev. bei Wechselstrom der effektiven Stromstärke (wie bei dem Dynamometer, S. 396). Die Erwärmung wird aus der Ausdehnung (Schema s. Figg.), ev. durch eine Übertragung auf einen drehbaren Zeiger oder Spiegel, auch wohl thermoelektrisch, beurteilt. Für weitere Stromgrenzen wird mit Gleichstrom empirisch geeicht. Als Leiter eignen sich Eisen, Nickel, reines Platin.



Ausgeführte Hitzdrahtinstrumente z. B. bei Hartmann u. Braun.

Hitzdraht in der Doppelbrücke nach dem „Bolometerprinzip" (Paalzow und Rubens, Wied. Ann. 37, 529 1889). In der großen Verzweigung, welche durch ein, einige Zeit zuvor geschlossenes, konstantes Element E gespeist wird, sind die Widerstände so abgeglichen (93), daß das Galvanoskop keinen Strom zeigt. Der zu messende, konstante oder Wechsel-Strom wird dann durch das Viereck $abcd$ geschickt, in welchem $a:b=c:d$ (z. B. $a=b=c=d$) gemacht ist, damit die beiden Stromquellen sich gegenseitig nicht beeinflussen. — Durch die Stromwärme ändert sich der Widerstand des Vierecks und das Galvanometer zeigt einen der Leistung des zu messenden Stromes proportionalen Ausschlag.



Um von äußeren Änderungen ungestört zu bleiben, gestaltet man einen Nachbarzweig der großen Verzweigung dem Viereck kongruent und schließt beide Zweige in dasselbe Kästchen ein.

Das äußerst empfindliche Verfahren dient z. B. zur Beobachtung der Strahlungsenergie Hertz'scher elektrischer Wellen (125).

Photometrische Strommessung. Starke Ströme lassen sich aus der Glühtemperatur bestimmen, die sie einem bestimmten Leiter in bestimmter Umgebung mitteilen. Der Glühzustand wird photometriert (48a III u. 72); eine Skale entwirft man empirisch mit bekannten durchgeschickten Stromstärken. Bei Wechselströmen wird die effektive Stromstärke (S. 396) erhalten. Orlich, ZS f. Instr. 1904, 65.

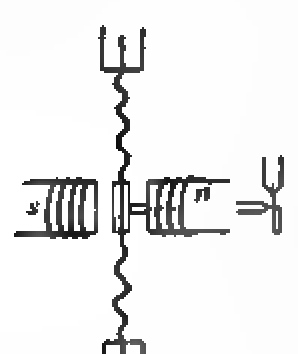
5. **Saitengalvanometer** mit mikroskopischer Ablesung. Ein dünner leitender Faden (z. B. Streifchen von Blattaluminium; Platin- oder Phosphorbronze-Draht; versilberter Quarzfaden) ist quer durch ein starkes magnetisches Feld gespannt. Die Ausbiegung des Fadens durch den Strom wird mikroskopisch abgelesen oder projiziert. Bei schwacher Anspannung eines Fadens, der freilich 10000 Ω Widerstand hat, wird angegeben, daß 10^{-12} A noch wahrnehmbar sind. Einthoven, Ann. der Ph. 12, 1059. 1903; 14, 182. 1904; Arch. Néerl. (2) 9, 186. 1904.

85a. Hörtelephon, optisches Telephon, Vibrationsgalvanometer.

Die durch elektromagnetisch bewegte Membrane auf das Ohr oder einen Lichtstrahl wirkenden Instrumente reagieren auf Wechselströme und dienen hier vorwiegend, das Hörtelephon ausschließlich, bei Nullmethoden.

I. Hörtelephon (Bell 1876). Die Brauchbarkeit muß ausprobiert werden. Ein aus dem Verkehr übernommenes Instrument wird man oft durch eine Wickelung von kleinerem Widerstande verbessern können. Das Telephon wird mäßig fest ans Ohr (ev. an das empfindlichere) angedrückt, das andere Ohr vielleicht mit Watte oder „Antiphon" verstopft.

II. Optisches Telephon (M. Wien). Eine gewellte Membran mit Eisenplättchen ist zwischen zwei Hufeisen-Elektromagneten aus magnetisiertem Stahl ausgespannt. Durch deren periodische Erregung gerät die Membran in Schwingungen, die durch einen Stift auf einen Kontaktspiegel



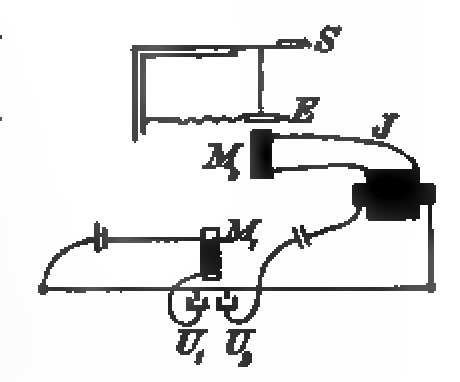
an einer Feder übertragen werden. Das in diesem beobachtete schmale Bild eines Spaltes oder einer Glühlampe geht bei der Bewegung in ein der erregenden Stromstärke ungefähr proportional breites Band über. Das Instrument spricht wesentlich nur auf die eigene Schwingungszahl der Membran an. Um es einzustimmen, dienen auswechselbare Membrane, ferner kleine Änderungen durch Variieren der aufgeschraubten Eisenplatten oder der Dämpfung durch Verstellen des Magnets. Auch darf man den Eigenton der Feder, welcher dem der Membran gleich ist, in engen Grenzen verstimmen, ohne die Empfindlichkeit zu schwächen.

Störende Obertöne vermindert man 1. durch einen Unterbrecher aus amalgamiertem Kupfer an Quecksilber; 2. durch einen Nebenschluß zum Unterbrecher; 3. durch eine Induktionsrolle mit Eisenkern im sekundären

Kreis; 5. durch einen zum opt. Telephon parallel geschalteten induktionsfreien Widerstand oder einen Kondensator von einigen Mikrofarad.

III. Vibrationsgalvanometer (Rubens). Dasselbe benutzt Torsionsschwingungen einer gespannten Saite, deren Eigenton durch Länge oder Dicke variiert wird. Die Erregung geschieht durch Eisenstäbchen, die an der Saite in der Nähe von vier über Kreuz stehenden Telephon-Elektromagnetpolen befestigt sind. Der Wechselstrom ist so geführt, daß seine elektromagnetische Wirkung das durch die permanenten Stahlpole magnetische Eisenstäbchen zum Vibrieren bringt. — Beobachtet wird wie am opt. Telephon.

Zur Erzeugung der Wechselströme dient für das Hörtelephon ein kleines Induktorium (Neeff'scher Hammer; vgl. S. 96) von möglichst geräuschlosem Gang, für die anderen Instrumente ein Saitenunterbrecher, dessen Schwingungszahl durch verschiebbare Stege oder Anspannen reguliert wird. Von den beiden Platin- oder Quecksilberkontakten dient der eine U_1 zum Antrieb der Stahlsaite durch die Anziehung des Elektromagnets M_1, während U_2 zum primären Kreis des Induktoriums J gehört. M_2 deutet die das opt. Telephon (oder das Vibrationsgalvanometer) bewegende, elektromagnetische Vorrichtung an.



M. Wien, Wied. Ann. 42, 593; 44, 681. 1891; Rubens, ib. 56, 27. 1895. Über den Gebrauch einer Kupfersaite mit Antrieb durch ein quergestelltes Magnetfeld s. Arons, Wied. Ann. 66, 1177. 1898; Orlich, Elt. ZS 1903, 502.

Oszillographen s. 122 V.

86. Messung stärkerer Ströme mit Abzweigung.

Dieses Verfahren, welches für alle Galvanometer Bedeutung hat, ist für sehr große Stromstärken unersetzlich geworden. Ist das Instrument für die zu messenden Ströme zu empfindlich, so führt man einen Teil des Stromes durch eine konstante Nebenleitung unwirksam (was besonders bei starken Strömen zu beachten ist) an dem Galvanometer vorüber. Das Galvanometer erhält dadurch nur einen größeren Reduktionsfaktor. Das Metall des Zweigwiderstandes muß gegen Temperatur unempfindlich (Tab. 30) oder so dick sein, daß es nicht durch den Strom in störender Weise erwärmt wird.

Auf Wechselstrom darf wegen der Selbstinduktion und Kapazität der Leitungen die Messung mit Abzweigen im allgemeinen nicht angewandt werden. — Die Integrale einzelner Stromstöße dagegen verzweigen sich nach dem Ohm'schen Gesetz.

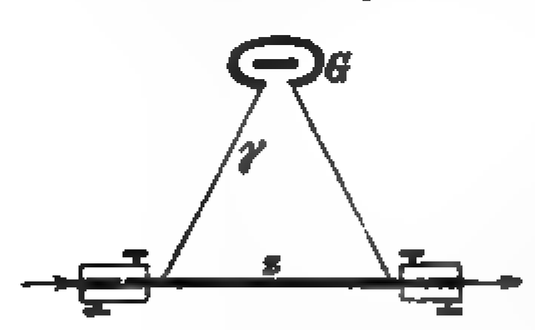
Jede von dem Instrument an sich angezeigte Stromstärke ist dann, um den ganzen Strom zu geben, mit einem kon-

stanten „Abzweigungsfaktor" a zu multiplizieren, der nach dem Ohm'schen Gesetz aus dem Widerstande der Galvanometerleitung γ und dem der Nebenleitung z erhalten wird (Beweis in Beisp. 1, S. 375):

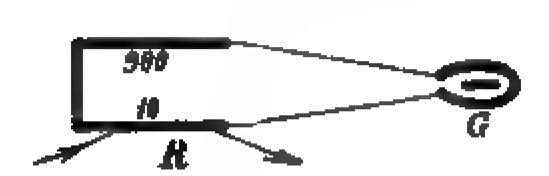
$$a = (z + \gamma)/z \quad \text{oder} \quad = 1 + \gamma/z.$$

Die Rechnung wird am einfachsten, wenn $z = \frac{1}{9}\gamma$ oder $\frac{1}{99}\gamma$ usw., denn alsdann wird $a = 10$, 100 usw.

Solche Abzweigungen sind häufig mit den technischen Strommessern gleich verbunden. Zeigt die Teilung ohne Abzweigung etwa 0,01 A an, so bedeutet sie mit $\frac{1}{9}$ 0,1 A und mit $\frac{1}{99}$ ganze Ampere.



Kleine Zweigwiderstände müssen so in die Leitung eingeschaltet werden, daß die Verbindungswiderstände unschädlich bleiben (vgl. S. 381), z. B. in der durch die Figur angedeuteten Weise. Damit z nicht zu klein wird, kann man zum Galvanometer einen Ballastwiderstand zufügen, der dann in γ mit inbegriffen ist.



Die Figur zeigt, wie aus einem Rheostaten sowohl Zweigwiderstand wie Ballast entnommen wird. Vgl. auch S. 384.

87. Strommessung durch Elektrolyse (Faraday). Voltameter.

Die mit einem Voltameter gemessenen chemischen Zersetzungsprodukte lassen die Stromstärke mit Hilfe der folgenden Sätze bestimmen.

1. Die durch verschiedene Ströme in derselben Zeit zersetzten Mengen sind der Stromstärke proportional.

2. Die Zersetzungsprodukte eines und desselben Stromes in verschiedenen Elektrolyten sind einander chemisch äquivalent (Faraday'sches Gesetz, 1833).

3. Die elektromagnetisch gemessene Elektrizitätsmenge 1 CGS = 10 A·sek scheidet in 1 sek 0,01118 gr Silber aus. Mit 1 gr Silber wandert demnach die El-Menge 1/0,01118 = 89,45; da das (auf $\frac{1}{2}$ O = $\frac{1}{2}$ 16,00 = 8,00 bezogene) Äqu.-Gewicht Ag = 107,93 ist, so wandert also mit der gr-Einheit des chemischen Äquivalents die Elektrizitäts-Menge 89,45 × 107,93 = 9654 CGS = 96540 Amperesekunden oder Coulomb. Statt dessen kann man sagen: die El.-Menge 1 CGS = 10 A·sek befördert 1/9654 = 0,0001036 gr-Äquivalente.

Hiernach ist das elektrochemische Äquivalent E (W. Weber 1840)

für	Silber	Kupfer	Wasserstoff	Sauerstoff	Wasser
Äqu.-Gew. =	107,98	31,8	1,008	8,00	9,01
E =	1,118	0,3294	0,01044	0,08287	0,0933 mg/(A sek).

0,0933 mg Wasser geben 0,1740 cm³ Knallgas von 0° u. 760 mm.

Vgl. auch Tab. 34.

Man leitet den zu messenden Strom i während einer Zeit τ durch den Elektrolyt; die dadurch zersetzte oder ausgeschiedene Menge sei m. Dann ist die Stromstärke (über E siehe oben)

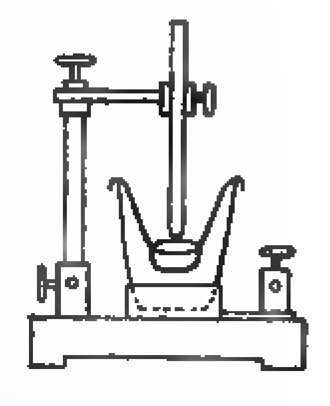
$$i = \frac{1}{E}\frac{m}{\tau}\,A \quad \text{oder} \quad = \frac{1}{10E}\frac{m}{\tau}\ \text{CGS-Einheiten.}$$

Das Voltameter wird meistens zur Messung einer durchgeflossenen Gesamtmenge von Elektrizität dienen, auch wohl um die Skale eines Stromzeigers zu prüfen. Als Übungsaufgabe kann auch das elektrochemische Äquivalent bestimmt werden, indem man mit einer in denselben Stromkreis eingeschalteten Tangentenbussole (81) oder einem geprüften Westonzeiger den Strom in absolutem Maße mißt.

Unbequem ist die Inkonstanz des Stromes, die durch Widerstandsänderung der Lösungen besonders in den Metallvoltametern bewirkt wird und die man nötigenfalls mit einem Rheostaten korrigiert. Durch Anwendung einer starken elektromotorischen Kraft, deren Strom man mittels Ballastwiderstandes auf die gewünschte Stärke bringt, vermindert sich die Inkonstanz.

Die Versuchsverhältnisse, unter denen die beabsichtigte Stromstärke entsteht, sind vor der Messung auszuprobieren.

I. Silber-Voltameter.



15- bis 30-prozentige Lösung von neutralem Silbernitrat vom spez. Gew. 1,15 bis 1,33 mit einer Anode aus Silber. Gewogen wird der Niederschlag auf der Kathode. Bequeme Form ist ein Platintiegel als Kathode; reines Silber bildet die Anode. Gegen Herabfallen von Teilen der Anode schützt am besten ein eingehängtes Glasschälchen (Fig.), auch wohl eine eingehängte poröse (gut gereinigte!) Thonzelle.

Der Niederschlag wird zuerst mit chlorfreiem destillierten Wasser gewaschen, bis das Waschwasser bei dem Zusatz eines

Tropfens Salzsäure keine Trübung zeigt, dann 10 min lang mit destilliertem Wasser von 70 bis 90° ausgelaugt und schließlich mit dest. Wasser gespült. Das letzte Waschwasser darf kalt durch Salzsäure nicht getrübt werden. Die Kathode wird heiß getrocknet, bis zur Wägung im Trockengefäß aufbewahrt und nicht früher als 10 min nach dem Erkalten gewogen.

Die Stromdichte soll an der Kathode, um das Herauswachsen von Silberfäden zu vermeiden, unter $\frac{1}{50}$ A/cm², an der Anode unter höchstens $\frac{1}{5}$ A/cm² bleiben. — Ferner soll, um das Auswaschen zu erleichtern, die abgesetzte Silberschicht nicht zu dick werden, also etwa, wenn sie 0,1 gr/cm² beträgt, mit Salpetersäure entfernt werden.[1])

Das elektrochemische Äquivalent des Silbers 1,118 mg/(A sek) (Lord Rayleigh, F. u. W. Kohlrausch) ist mit neutralen Lösungen erhalten worden, die in freier Luft kurze Zeit elektrolysiert wurden. Sowohl in sauerstofffreier Umgebung, z. B. im Vakuum (A. Schuster u. Crossley, Myers), wie bei schwachem Ansäuern oder lange dauernder Anwendung derselben Lösung (Kahle, Richards) erhält man bis zu $\frac{1}{1000}$ mehr Silber. S. auch Leduc, Guthe. — Praktisch sind die Verhältnisse herzustellen, die der angenommenen Zahl 1,118 entsprechen. Demgemäß sind für genaue Versuche neutrale Lösungen mit Luftzutritt zu verwenden, und wenn man ganz sicher gehen will, nicht länger, als bis etwa 3 gr Silber auf 100 cm³ Lösung ausgeschieden sind.

Mit diesen Maßregeln bietet das Silbervoltameter, wenn richtig gewogen wird, sicher eine Konstanz seiner Anzeigen auf $\frac{1}{2000}$.[2])

II. Kupfer-Voltameter.

Besonders für stärkere Ströme gebraucht.

Man wendet eine nicht gesättigte Lösung von reinem Kupfersulfat in destilliertem Wasser an: durchschnittlich etwa 10 gr kristallisiertes Salz in 50 ccm Wasser gelöst; spez. Gewicht ungefähr = 1,1. Empfohlen wird Ansäuern mit reiner Schwefelsäure bis zu etwa normalem Gehalt; auch Zusatz von einigen Prozent Alkohol. Anode aus reinem Kupfer; Kathode Kupfer oder Platin, ganz untergetaucht. Gemessen wird die Gewichts-

1) Diesen Vorschriften entsprechen die in Deutschland geltenden gesetzlichen Bestimmungen.

2) Infolge der, übrigens sehr verdienstlichen Aufdeckung von Fehlerquellen durch ihre absichtliche Steigerung ist die Genauigkeit des Silbervoltameters zuweilen unterschätzt worden. Die Bedenken beruhten großenteils auf irrtümlichen Annahmen und sind nicht begründet.

zunahme der Kathode, welche abgespült und rasch zwischen Fließpapier und dann am besten unter der Luftpumpe oder im Exsikkator getrocknet wird.

Der Stromstärke muß die Größe der Elektroden angemessen sein. Damit der Niederschlag fest haftet, darf die Stromdichte an der Kathode nicht mehr als etwa 1 A auf 25 cm² betragen.

Bei großer Stromdichte kann eine zu starke Lösung eine Salzabscheidung an der Anode und erhebliche Stromschwankungen veranlassen, die aber auch durch ein Auftreten und periodisches Abstoßen schlecht leitender Überzüge bewirkt werden können; eine zu schwache Lösung führt vermöge der Verdünnung um die Kathode wohl zu einem nicht zusammenhängenden, mit Gasausscheidung verbundenen Niederschlagen des Kupfers.

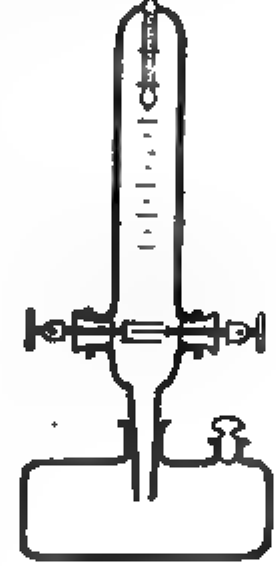
Bei schwachem Strome können im Gegenteil große Elektroden Fehler veranlassen.

Vgl. die Arbeiten von Gray, Vanni, Oettel, Richards, Collins und Heimrod, besonders auch von Förster, ZS f. El. Chem. 5, 479 u. 498. 1899.

III. Wasser-Voltameter.

Dieses arbeitet, weil es keine Wägung beansprucht, bequemer als die vorigen und, verständig behandelt, auf einige Tausendtel genau.

10- bis 20prozentige reine Schwefelsäurelösung (sp. Gew. $s = 1{,}07$ bis 1,14) wird zwischen blanken Platinelektroden zersetzt. Da die Polarisation Wasserstoff-Sauerstoff auf Platin fast 3 V beträgt, so verlangt die Zersetzung mindestens 3 Daniell- oder 2 Bunsen-Elemente oder 2 Akkumulatoren.



Bei starkem Strome mißt man das entwickelte Knallgas als Ganzes. Mit dicht aneinander stehenden Elektroden von etwa je 15 cm² wirksamer Fläche können Ströme bis 40 A noch ohne lästige Erwärmungen gemessen werden. Das nebengezeichnete Instrument wird nach dem Gebrauch (während dessen der kleine Stöpsel zu entfernen ist!) durch Umkehren wieder gefüllt. Die Elektroden sind in Wirklichkeit gegen die Stellung der Figur um 90° zu drehen. Das Knallgas soll nicht so weit entwickelt werden, daß der Strom unterbrochen wird, weil ein Unterbrechungsfunken Explosion bewirkt.

Bei schwachen Strömen ist, wegen der Bildung von Ozon und Wasserstoffsuperoxyd an der Anode, nur das entwickelte Wasserstoffgas aufzufangen; durch Multiplikation mit $\frac{3}{2}$ berechnet sich das Volumen des Knallgases Das abgebildete Voltameter läßt den geteilten Schenkel durch Umkehren wieder mit der Flüssigkeit füllen.

Der maßgebende Schenkel kann behufs genauerer Temperaturbestimmung von einem kleinen, mittels Kautschukstopfens dicht übergeschobenen Thermometerbade umgeben sein. Ist dieses auch oben geschlossen, so läßt es sich mit umkehren.

Formen, die eine genaue Messung, sowie u. a. bezwecken, die Druckdifferenz h (vgl. unten) wegzuschaffen, s Brüggemann, ZS f. Instr. 1893, 417; Naber, Electrician 1894, Aug.; Elektrochem. ZS 5, 45. 1898.

Als weniger Ozon usw. bildend wird auch Phosphorsäurelösung empfohlen. 40% Säure (sp. Gew. 1,25; Tab. 3) leitet etwa wie 5% Schwefelsäure.

Berechnung. Das bei der Temperatur t unter dem Drucke p mm Hg von 0° gemessene Volumen v würde bei 0° und 760 mm betragen haben (Tab. 7):

$$v_0 = \frac{v}{1+0{,}00367\,t}\,\frac{p}{760}\,.$$

Für das trockene Gas gilt als Quecksilberdruck der Barometerstand b, vermindert erstens um die in Quecksilber umgerechnete Höhe h der Schwefelsäure, d. h. ausreichend genau um $h\cdot 1{,}1/13{,}6 = \frac{1}{12}h$; h mißt man mit einem Maßstabe aus freier Hand. Ferner ist abzurechnen die Spannkraft des Wasserdampfs im Knallgase. Über Wasser würde die Spannkraft e zur Temperatur t aus Tab. 13 entnommen werden. Über der Schwefelsäure ist die Spannkraft $= k\cdot e$, wo k ein echter Bruch ist. Es gilt für

	0%	18	27	33% H_2SO_4
$k =$	1,0	0,9	0,8	0,7.

Der Druck des trockenen Gases ist also

$$p = b - hs/13{,}6 - ke \quad \text{oder nahe} \quad p = b - \tfrac{1}{12}h - 0{,}9e.$$

(Sollte, etwa in der obigen Figur, die äußere Flüssigkeit höher stehen als die innere, so ist natürlich $+\frac{1}{12}h$ zu setzen.)

Schließlich berechnet man die Stromstärke i, wenn die Zersetzung τ sek gedauert hatte (vgl. S. 403)

$$i = \frac{1}{0{,}1740}\,\frac{v_0}{\tau} \quad \text{oder} \quad = 5{,}75\,\frac{v_0}{\tau}\ \text{A}.$$

Bequeme Tabelle für 15- bis 20-proz. Schwefelsäure. Das von 1 A entwickelte Volumen v Knallgas liegt bei gewöhnlicher Temperatur nicht weit von $\frac{1}{5}$ ccm/sek. Die folgende Tabelle gibt für den gemessenen Druck p' (d. i. $b - \frac{1}{12}h$) und Temperaturen t die relative Korrektion δ, die man an dem gemessenen Volumen v anbringen muß, um mit dem korrigierten Volumen $v' = v(1+\delta)$ nach der Formel rechnen zu können:

$$i = 5\frac{v'}{\tau}\ \text{A}.$$

t	p'=700	710	720	730	740	750	760 mm
10°	+ 0,009	+ ,024	+ ,038	+ ,053	+ ,068	+ ,082	+ ,097
15°	− ,013	+ ,002	+ ,016	+ ,030	+ ,044	+ ,059	+ ,073
20°	− ,035	− ,021	− ,007	+ ,007	+ ,021	+ ,035	+ ,049
25°	− ,058	− ,045	− ,031	− ,017	− ,004	+ ,010	+ ,024

Vgl. F. K. Elt. ZS 1885, 190.

Beispiel. $v = 198\ \text{cm}^3$ Knallgas in $\tau = 117$ sek bei $t = 17{,}7°$ und $b = 754$ mm. Flüssigkeitssäule (20 % H_2SO_4) unter dem Gase $h = 110$ mm. Also Druck des feuchten Gases $p' = 754 - 110/12 = 745$ mm Hg. Spannkraft des gesättigten Wasserdampfes bei 17,7° (Tab. 13) $e = 15{,}1$, also Druck des trockenen Gases $p = 745 - 0{,}88 \cdot 15{,}1 = 732$ mm. Das auf 0° und 760 mm reduzierte Volumen trockenen Knallgases beträgt also (Tab. 7)

$$v_0 = \frac{198}{1 + 0{,}00367 \cdot 17{,}7} \cdot \frac{732}{760} = 179{,}1\ \text{ccm} \quad \text{und}$$

$$i = \frac{1}{0{,}1740} \frac{179{,}1}{117} = 8{,}80\ \text{A}.$$

Oder: Die Tabelle gibt für 745 mm bei 15° $\delta = +0{,}051$, bei 20° $+0{,}028$, also bei 17°,7 $= +0{,}039$. Also

$$v' = 198 \cdot 1{,}039 = 205{,}7 \quad \text{und} \quad i = 5 \cdot 205{,}7/117 = 8{,}79\ \text{A}.$$

IV. Jodvoltameter.

In 10 bis 15 % Lösung von ZnJ_2 befindet sich ein amalgamierter Zinkstab, mit Pergamentpapier umhüllt, als Kathode, ein Platinblech als Anode am Boden. Das ausgeschiedene Jod wird mit Natriumthiosulfatlösung ($Na_2S_2O_3$) titriert (Herroun). Von 0,1 normaler Lösung entsprechen 0,1036 verbrauchte ccm der Silbermenge 1,118 mg, d. h. der durchgegangenen Elektrizitätsmenge 1 A sek

Vgl. hierüber und über Quecksilbervoltameter Danneel, ZS f. Elektroch. 4, 154. 1897.

88. Strommessung durch Kompensation eines Normalelementes.

In der Leitung eines Stromes i mögen zwei Punkte, zwischen denen keine elektromotorische Kraft liegt, mit A und B bezeichnet werden; Fig. f. S. Der (positive) Strom trete bei A in diese Strecke der Leitung ein und B sei

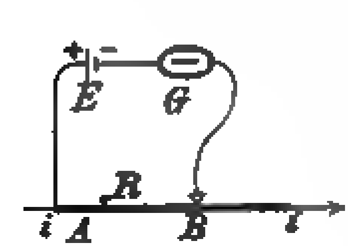
der Widerstand zwischen A und B. Dann ist nach 80 I 4 die Spannung in A um Ri größer als in B; es besteht zwischen den Punkten eine Spannungsdifferenz $E = Ri$. Diese Beziehung wird zur absoluten Messung von i jetzt meistens, und zwar in der Weise gebraucht, daß man im Stromkreise den Widerstand sucht, zwischen dessen Enden eine bekannte, z. B. durch ein Normalelement (80 II) gegebene Spannungsdifferenz besteht. — Zur bequemeren Ausführung dient der Kompensationsapparat (108).

Das Normalelement E nebst einem Galvanoskop G wird an die Enden eines Teiles der Stromleitung, dessen Widerstand man in beliebiger, bekannter Weise regulieren kann, so angelegt, daß es dem Strome entgegenwirkt, welcher ohne das Element in der Nebenleitung entstehen würde. Der Zink- oder Cadmiumpol des Elements ist also mit dem Punkte B zu verbinden. Jetzt wird der Widerstand R gesucht, welcher zwischen den beiden Punkten bestehen muß, um den Strom in dem Galvanoskop der Nebenleitung zum Verschwinden zu bringen. Dann ist also die gesuchte Stromstärke i in der Hauptleitung $i = E/R$, wo E die Spannung (el. Kraft) des Normalelements bedeutet. Den veränderlichen Widerstand R liefert ein Schleifkontakt oder für genaue Messungen ein Rheostat.

Als Normalelement kann mit mäßigem Anspruch an die Genauigkeit ein Akkumulator ($E = 2{,}02$ V), auch wohl ein Daniell-Element ($E = 1{,}1$ V) dienen. In diesem Fall besteht keine Schwierigkeit. Bei den Quecksilberelementen mit Zink (Clark) oder Cadmium (Weston; vgl. S. 377) muß man aber bei dem Ausprobieren des kompensierenden Widerstandes beachten, daß diese Elemente dauernd nur sehr geringe Ströme vertragen, ohne ihre el. Kraft für einige Zeit zu ändern. Während des Ausprobierens ist also einem solchen Normalelement ein großer Widerstand so lange vorzuschalten, bis man der Kompensation nahe gekommen ist.

Zu vermeiden sind Fehler aus der Stromwärme in R.

I. Verfahren mit einem Schleifkontakt. In der Stromleitung befinde sich ein blanker Draht, dessen Widerstand für seine Längeneinheit in Ohm bekannt ist. An das eine Ende des Drahtes und an den Schleifkontakt legt man Normalelement und Galvanoskop in der beschriebenen Weise an und sucht die Stellung des Kontaktes, bei welcher der



Strom verschwindet. Nennt man R den Widerstand der alsdann eingeschalteten Drahtstrecke, so ist $i = E/R$.

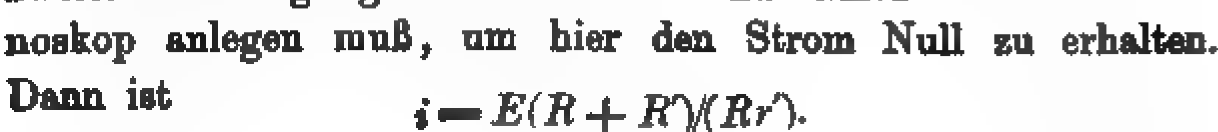
Dies folgt auch aus der zweiten Kirchhoff'schen Regel (80 I). Es muß nämlich in dem Kreise, welcher E und R enthält, da in der Nebenleitung der Strom Null ist, $iR = E$ sein.

II. Verfahren mit einem Rheostaten. In der Leitung des zu messenden Stroms i befinde sich ein Rheostat, an dessen Enden die Nebenleitung mit E und G angelegt wird. Man zieht nun so viel Widerstand R, daß der Strom in G verschwindet, dann ist $i = E/R$.

Hier ist jedoch zu beachten, daß durch das Ziehen von R der Hauptstrom selbst geändert wird. Um dies zu verhindern, muß aus der Hauptleitung, in der also zu diesem Zweck noch ein Rheostat eingeschaltet sein muß, jedesmal so viel Widerstand ausgeschaltet werden, wie man in R einschaltet. Dies selbsttätig zu besorgen ist das Prinzip des Kompensationsapparats (103).

Eine gewöhnliche Anwendung des Verfahrens wird die Prüfung eines Strommessers sein. In diesem Falle kommt es nicht auf ganz bestimmte Stromstärken an, also bedarf man im Hauptkreise nur einiger Regulierwiderstände für die Stromstärke.

III. Nebenschaltung; besonders für starke Ströme. An einen bekannten Widerstand R der Hauptleitung, welcher so groß sein muß, daß $Ri > E$ (also wenn E ein Normalelement, für $i = 100$ A z. B. $R = 0{,}02\ \Theta$), wird eine Abzweigung zu einem Rheostaten gelegt; vom Übergangswiderstande wird nur verlangt, daß er gegen den Gesamtwiderstand der Abzweigung verschwindet. Der letztere heiße R', während r' der Widerstand ist, an den man nun eine zweite Abzweigung mit Element und Galvanoskop anlegen muß, um hier den Strom Null zu erhalten. Dann ist



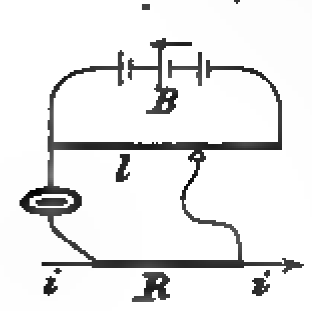
$$i = E(R + R')/(Rr').$$

Folgt aus $(i - i')R = i'R'$ und $i'r' = E$, wenn i' der Strom in der Abzweigung.

Wenn R' groß gegen R, so wird durch Stöpseln in R' der Strom i wenig geändert.

IV. Übertragung. Irgend eine konstante Säule B (Akkumulatoren) wird durch einen konstanten Widerstand mit Schleifkontakt geschlossen. An diesen Strom legt man zunächst ein Normalelement (E) und ein Galvanoskop so an, daß der Zweig stromlos ist; die Drahtlänge zwischen den Abzweigungspunkten sei für diesen Fall $= l_0$, also E/l_0 das Potentialgefälle auf dem Draht. Das Normalelement wird nun entfernt.

Nunmehr kann derselbe Draht mit dem Strome seiner Hilfsbatterie B, dessen Konstanz nötigenfalls mit irgend einem Strommesser geprüft wird, zur Messung eines anderen Stromes i gebraucht werden. Von einem bekannten Widerstande R in der Leitung des letzteren zweigt man nämlich zu einem solchen Stück l des Rheostatendrahtes ab, daß der Strom im Galvanoskop verschwindet (Fig.).



Dann hat man offenbar

$$i = \frac{E}{l_0} \cdot \frac{l}{R}.$$

89. Prüfung eines Strommessers. Empirische Bestimmung eines Reduktionsfaktors.

Die in der Überschrift genannten Aufgaben sind identisch mit der Aufgabe, eine Stromstärke in einer Leitung zu messen, in die ein zu prüfender Strommesser eingeschaltet ist. Die Aufgabe ist also eigentlich in 81, 87 und 88 enthalten. — Strommesser von geeigneter Beschaffenheit werden auch von der P. T. Reichsanstalt geprüft.

Die Teilung auf dem Zifferblatt eines Stromzeigers prüft man an einer den Umständen entsprechenden Anzahl von Punkten. Daraus wird eine Tabelle für die ganze Teilung am einfachsten graphisch abgeleitet (6), indem man die beobachteten Teilstriche als Abszissen, die zugehörigen Stromstärken oder auch die Korrektionen der Teilung auf richtige Stromstärke als Ordinaten einträgt. Die so festgelegten Punkte, die in der Zeichnung einen regelmäßigen Verlauf zeigen werden, verbindet man durch eine Kurve und entnimmt aus dieser eine Tabelle für jeden Teilstrich oder von 10 zu 10 T.-Str. usw.

Ist das Gesetz bekannt, nach welchem die Stromstärke

mit dem Ausschlage wächst, so braucht nur der **Reduktionsfaktor** $\mathfrak{C}$ oder C durch die Beobachtung eines Ausschlages e bei einer bekannten Stromstärke i ermittelt zu werden. Bei dem Spiegelgalvanometer (83) ist z. B. $i = \mathfrak{C}\cdot e$, also $\mathfrak{C} = i/e$; bei einem Tangentengalvanometer $i = C\cdot \operatorname{tg}\alpha$, also $C = i/\operatorname{tg}\alpha$; bei einem Dynamometer $i = \mathfrak{C}\cdot\sqrt{e}$, also $\mathfrak{C} = i/\sqrt{e}$ zu berechnen.

$\mathfrak{C}$ ist bei demselben Spiegelgalvanometer natürlich dem Skalenabstande A umgekehrt proportional. **Absoluter Reduktionsfaktor** C heißt der Faktor, welcher mit einer in absolutem Winkelmaß gemessenen (Anh. 3) Ablenkung α multipliziert die Stromstärke gibt. Da nach 25 $\alpha = e/(2A)$, so ist also $C = \mathfrak{C}\cdot 2A$ oder $\mathfrak{C} = C/(2A)$ Aus dem ein für allemal bestimmten C wird hieraus $\mathfrak{C}$ für den jeweiligen Skalenabstand gefunden.

Über Abweichungen von der Proportionalität vgl. S. 390.

Es kommt vor, daß man ohne Anspruch auf eine definierte Einheit der Stromstärke, zwei Galvanometer nur aufeinander reduzieren will. Die Aufgabe ist durch die Vorschriften dieses § in leicht ersichtlicher Weise mit erledigt.

Prüfung durch ein Normalinstrument von ungefähr gleicher Empfindlichkeit.

a) **In gewöhnlicher Schaltung.** Man schaltet das zu prüfende und das Normalinstrument hinter einander, ev. mit einem Rheostaten in den Stromkreis einer geeigneten Batterie, und reguliert den Strom mittels der Anzahl der Elemente und mit dem Rheostaten auf die gewünschten Stärken.

b) **Durch sukzessives Einschalten;** nur für empfindliche Galvanometer genau und bequem. Es werde dieselbe konstante Säule folgeweise durch das eine und das andere Instrument geschlossen. Die beiden Gesamtwiderstände seien W und W_1 usw. Dann ist $C : C_1 = \alpha_1 W_1 : \alpha W$.

Prüfung durch ein Normalinstrument von sehr abweichender Empfindlichkeit.

c) **Mit Abzweigung.** Man verfährt wie oben, versieht aber das empfindlichere der beiden Instrumente mit einer Abzweigung (86), die von dem Strome nur einen bekannten Bruchteil durch das Instrument fließen läßt. Dieser Bruchteil beträgt $s/(s+\gamma)$,

wenn z den Widerstand der Abzweigung, γ den des abgezweigten Galvanometers bedeutet, wobei in γ zugleich ein dem Galvanometer ev. zugeschalteter Widerstand mit inbegriffen sei. Die Angaben dieses Instruments sind also mit $\frac{(z+\gamma)}{z}$ oder $1+\frac{\gamma}{z}$ zu multiplizieren und dann mit denen des anderen Instruments zu vergleichen.

d) Im Nebenschluß. Ein Strom werde durch beide Galvanometer nebeneinander verzweigt, nötigenfalls unter Einschaltung von Rheostatenwiderständen. Die Gesamtwiderstände der Zweige seien w und w_1 usw. Es ist

$$C:C_1 = \alpha_1 w_1 : \alpha w.$$

Meistens empfiehlt sich die Anwendung von Kommutatoren, besonders auch, um Wechselwirkungen der Galvanometer zu eliminieren.

e) Zwei Windungslagen I und II desselben Instruments reduziert man auf einander, indem man denselben Strom durch beide hinter einander schickt: erstens gleichsinnig, Ausschlag $=\alpha$; alsdann II kommutiert, Ausschlag $=\alpha'$. Es ist $\alpha:\alpha' = (C_1 + C_2):(C_1 - C_2)$, also

$$C_1 : C_2 = (\alpha + \alpha'):(\alpha - \alpha').$$

Auf Wechselstrommesser dürfen *c*) bis *e*) nicht angewandt werden.

Mit dem Voltameter.

Man läßt durch das Galvanometer und ein Voltameter denselben Strom eine gemessene Zeit lang hindurchgehen. Die Stromstärke findet sich nach 87. Da der Strom nicht konstant sein wird, so beobachtet man das Galvanometer z. B. von Minute zu Minute und nimmt schließlich das Mittel aus den Ablesungen. Das Galvanometer (nicht das Voltameter) kann hierbei durch einen rasch wirkenden Stromwender kommutiert werden.

Zu stärkeren Strömen ist das Kupfer- oder das Knallgasvoltameter (Fig. S. 405), zu schwächeren das Silber- oder das Wasserstoffvoltameter (Fig. S. 406) geeignet. Am Galvanometer (nicht am Voltameter!) kann auch mit Abzweigung beobachtet werden, wie oben unter *c*) beschrieben wurde.

Mit einer bekannten elektromotorischen Kraft.

1. Direkt. Für einen empfindlichen Strommesser hat man ein oft genügendes sehr einfaches Verfahren, indem man ihn mit einem Element von bekannter el. Kraft (80 II) (Daniell, Akkumulator, für die allerempfindlichsten Instrumente auch Normalelemente) und mit einem bekannten großen Widerstande zum Stromkreise schließt. Beträgt die el. Kraft E V, der Gesamtwiderstand w Θ, so ist die Stromstärke $i = E/w$ A.

w besteht aus eingeschaltetem Widerstand, Galvanometer und Säule. Der letztere Teil kann oft vernachlässigt werden.

Stehen keine ausreichend großen Widerstände zur Verfügung, so legt man das Galvanometer an einen Nebenschluß. z sei der Widerstand des letzteren, W der Gesamtwiderstand der Leitung ohne den Galvanometerzweig, welcher selbst den Widerstand γ habe, dann ist (aus den Kirchhoff'schen Regeln leicht abzuleiten; 80 I) $\quad i = E \cdot z/(W\gamma + Wz - z^2)$.

2. Mit Kompensation. Das Verfahren ist in 88 beschrieben; s. auch 103.

Über die ballistische Konstante eines Strommessers s. 109.

90. Widerstandsbestimmung durch Vertauschen.

Über Widerstands-Einheiten und Rheostaten s. 80 I und IV, über sichere Verbindungen 80 III. — Über Messung sehr großer Widerstände vgl. 94 a.

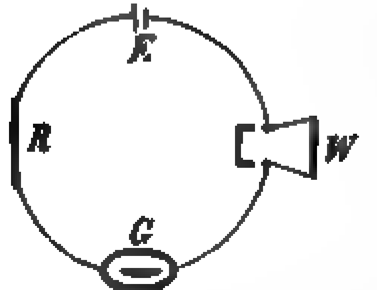
Widerstände auf ihre Gleichheit zu prüfen, wird verlangt sowohl bei der Kopierung eines Widerstandes, wie auch bei der Bestimmung eines unbekannten Widerstandes mittels eines Satzes von bekannten Widerständen. Wir nehmen diese letztere Aufgabe an.

Widerstände sind gleich, wenn sie, einzeln in denselben Stromkreis eingeschaltet, dieselbe Stromstärke geben.

Man stellt also einen Stromkreis[1]) her, bestehend aus der

---

1) Bei den Figurenskizzen hat man im allgemeinen die untere Seite nach dem Beobachter zu gerichtet zu denken. Im vorliegenden Falle z. B. wird man ein Zeigergalvanometer sich zunächst aufstellen und R und W so, daß sie mit beiden Händen bequem zu erreichen sind. — Ovale bez. runde Leiter mit Magnetnadel deuten Stromzeiger bez. Strommesser an.



konstanten Säule E (Akkumulator, Daniell), dem Stromzeiger G, dem Rheostaten R. Der zu bestimmende Widerstand W ist in der Zeichnung eingeschaltet, kann aber, etwa durch eine widerstandsfreie Nebenschließung (die gewöhnlichen Stromschlüssel sind oft unzuverlässig), ausgeschaltet werden. Zuerst wird die Einstellung beobachtet, während W eingeschaltet, der Rheostat aber gestöpselt, d. h. ausgeschaltet ist. Dann wird W ausgeschaltet; der Rheostatenwiderstand, welcher statt dessen eingeschaltet werden muß, um die Nadel auf dieselbe Einstellung zurückzuführen, ist gleich dem gesuchten Widerstande W.

Wenn der Rheostat nicht erlaubt, Widerstände in genügend kleinen Intervallen herzustellen, so interpoliert man (5) aus den Nadeleinstellungen bei dem nächst kleineren und dem nächst größeren Widerstand. Sind die Unterschiede klein, so kann man Proportionalität zwischen Vergrößerung des Widerstandes und Verringerung des Ausschlages annehmen. Werden also die Einstellungen beobachtet:

α bei dem gesuchten Widerstande W,

α_1 und α_2 bei den Rheostatenwiderständen R_1 und R_2,

so ist $$W = R_1 + (R_2 - R_1)(\alpha - \alpha_1)/(\alpha_2 - \alpha_1).$$

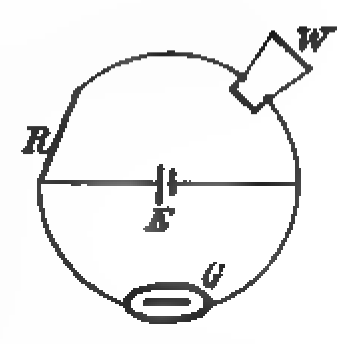
Beispiel. Eingeschaltet W $R_1 = 14$ $R_2 = 15$ Θ
Nadeleinstellung $\alpha = 45{,}3$ $\alpha_1 = 47{,}9$ $\alpha_2 = 44{,}5$
Dann ist $W = 14 + 2{,}6/3{,}4 = 14{,}76$ Θ.

Die Methode gibt bei nicht zu kleinen Widerständen eine mäßige Genauigkeit. Kleine Änderungen des Elements werden durch passende Wiederholung der Beobachtung und Mittelnehmen eliminiert, oder durch rasche Beobachtung unschädlich gemacht.

Wenn der zu messende Widerstand klein ist, so schlägt die Nadel vielleicht über die Teilung hinaus. Man kann dies verhindern, indem man einen Teil des Rheostaten konstant als Ballast einschaltet; die Messung wird aber hierdurch unempfindlicher. Besser ist es deswegen, die Nadel z. B. durch einen konstant hingelegten Magnet zurückzutreiben. Oder man verschafft sich eine angemessen kleinere el. Kraft nach Fig. S. 380.

Zweigschaltung. Das genannte Hindernis kann auch

dadurch wegfallen, daß man, statt Galvanometer und Widerstände in denselben Strom hinter einander zu schalten, den Strom durch beide Teile verzweigt, etwa nach dem nebengezeichneten Schema. Die Gleichheit des Ausschlages zeigt wie oben die Gleichheit der ausgewechselten Widerstände an.



Ganz kleine Widerstände, die durch Abzweigpunkte definiert werden (S. 381), sind von der Methode ausgeschlossen.

91. Widerstandsbestimmung durch Strommessung.

I. Direkte Methoden.

Nr. 1 kann in Ermangelung eines Rheostaten Wert haben, Nr. 2 ist nur von historischem oder pädagogischem Interesse.

1. Eine Batterie von der bekannten el. Kraft E V werde durch den zu bestimmenden Widerstand w und ein Galvanometer geschlossen, welches die Stromstärke in Ampere anzeigt. Beobachtet werde der Strom i A, dann ist E/i der Widerstand W der gesamten Leitung in Ohm, von welchem der des Galvanometers und der Batterie abzuziehen ist, um w zu ergeben. Das Verfahren kann mit einem hinreichend empfindlichen Galvanometer besonders auf sehr große Widerstände angewandt werden, bei denen dann die beiden anderen Widerstände oft zu vernachlässigen sind.

Beispiel: Ein Akkumulator ($E = 2{,}02$ V, Widerstand zu vernachlässigen; vgl. S. 379), durch einen Weston-Strommesser von 1,0 Θ und den Widerstand w geschlossen, gab den Strom 0,043 A. Also ist $w = 2{,}02/0{,}043 - 1 = 46{,}0$ Θ.

2. „Ohm'sche Methode". Diese verlangt nur relative Strommessungen. Der Widerstand Batterie + Galvanometer wird eliminiert. Man schließt, nötigenfalls unter Zufügung eines Widerstandsballastes, ein konstantes Element erstens durch das Galvanometer allein; Stromstärke $= J$. Zweitens unter Zuschaltung des zu bestimmenden Widerstandes w; Stromstärke $= i_0$. Drittens indem man w durch einen bekannten Widerstand R ersetzt; Stromstärke $= i$. Dann ist

$$w = R\,\frac{J - i_0}{J - i}\,\frac{i}{i_0}\,.$$

Für J, i_0, i werden die Ablenkungswinkel bez. deren Tangenten usw. gesetzt.

Die Gleichung folgt aus $E = J\gamma = i_0(\gamma + w) = i(\gamma + R)$.

II. Abzweigmethode. Sehr kleine Widerstände.

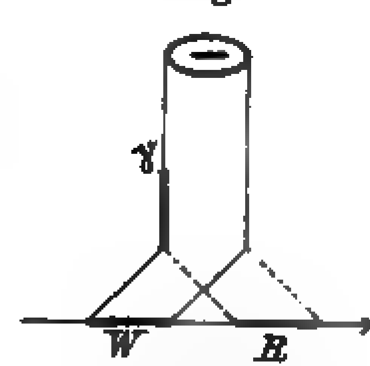
Grundlage. Besteht zwischen den Enden eines metallischen Leiters, während er von dem Strome i durchflossen wird, die Spannung E, so ist sein Widerstand $w = E/i$.

Die Abzweigmethoden sind u. a. von Bedeutung, um Widerstände von Leitern zu bestimmen, während sie durch den Strom beeinflußt werden, z. B. von elektrischen Lampen, während sie leuchten.

Nr. 2 u. 3 werden besonders auf sehr kleine Widerstände angewandt, die in der Starkstromtechnik bis zu 0,0001 Ω abwärts gebraucht werden. Die Abzweigungen sind nach **80**, S. 381 einzurichten.

Über die Benutzung des Kompensationsapparats s. **108**.

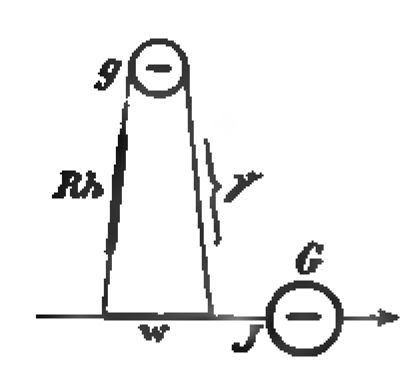
1. Sehr oft und gut brauchbar ist das folgende Verfahren. Die zu vergleichenden Widerstände W und R werden in denselben konstanten Stromkreis hinter einander geschaltet. Man legt erst an die Endpunkte des einen, dann an die des anderen Widerstandes eine Ableitung mit sehr großem Widerstande durch ein empfindliches Galvanometer oder einen Spannungsmesser an.



Vorausgesetzt, daß die zu vergleichenden Widerstände gegen den Widerstand γ der Zweigleitung sehr klein sind, verhalten sie sich zu einander direkt wie die zugehörigen Stromstärken i_w und i_r oder Spannungen in den angelegten Ableitungen. Andernfalls genügt es, i_w/i_r mit $1 + R(i_w - i_r)/(\gamma i_r)$ zu multiplizieren.

Zweckmäßig ist die Anwendung eines Kommutators am Galvanometer, oder auch an der ganzen Leitung; aber das letztere nur, wenn man sicher ist, daß die Galvanometernadel keine Fernwirkung von dem Hauptstrom erfährt.

2. Man leitet einen konstanten Strom durch einen Strommesser G und den zu messenden Widerstand w hinter einander. An die Enden des letzteren wird eine Ableitung durch ein empfindliches Galvanometer g und durch einen zugefügten großen Rheostatenwiderstand gelegt. γ sei der be-



kannte Gesamtwiderstand dieser Ableitung; J sei die Stärke des Stammstromes, i die Stromstärke in der Ableitung. Dann ist der gesuchte Widerstand $w = \gamma i/(J - i)$.

Es genügt, wenn die Angaben beider Strommesser relativ zu einander richtig sind.

3. Die obige Ableitung enthalte einen Spannungsmesser (**101**, **102**) vom Widerstande $\gamma\,\Theta$ und zeige die Spannung P V. Die Stärke des Stammstromes betrage J A. Dann ist der gesuchte Widerstand gleich $\frac{P}{J - P/\gamma}\,\Theta$. Die Methode unterscheidet sich von Nr. 2 nur durch den Namen Spannungsmesser.

Besonders auch auf Dynamomaschinen wird Nr. 3 angewandt.

Obige Gleichungen werden durch die Ohm-Kirchhoff'schen Gesetze (80 I) bewiesen.

Elektrometrische Methoden siehe **126** sowie **130**.

92. Widerstandsbestimmung mit dem Differentialgalvanometer.

Die Methoden 92 und 93 sind empfindlicher als die vorigen und von der Konstanz einer Batterie unabhängig.

Zwei Widerstände sind gleich, wenn sie, als Zweigleitungen neben einander in einen Stromkreis eingeschaltet, den Strom in zwei gleiche Teile spalten. Die Gleichheit beider Ströme wird mittels des Differentialmultiplikators (Becquerel) untersucht, der aus zwei gleich langen, mit einander aufgewundenen Drähten besteht. Leitet man durch den einen Draht einen Strom, durch den zweiten Draht einen anderen Strom in entgegengesetzter Richtung, so bleibt die Nadel in Ruhe, wenn die Ströme gleich sind.

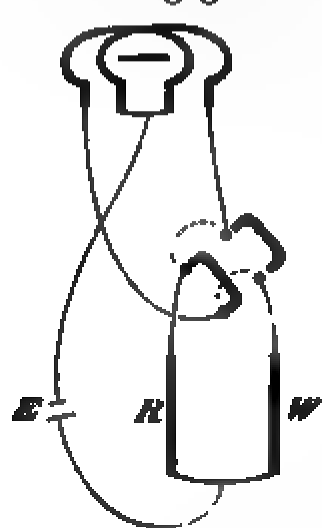
I. Vergleichung gleicher Widerstände.

Gewöhnliche Schaltung. Die Verbindungen zum Zwecke der Widerstandsbestimmung zeigt die Figur. Bei G sind schematisch die beiden Windungen des Galvanometers mit ihren Endpunkten angegeben (welche letztere auch anders angeordnet sein können, was man ausprobieren muß). In die beiden mittleren Enden verzweigt sich der Strom des Elements E, so daß die Zweigströme die Windungen in entgegengesetzter Richtung durchfließen. Von den anderen Enden aus ist der eine Zweigstrom durch den zu bestimmenden Widerstand W, der andere durch den Rheostaten R geführt, worauf

beide sich am anderen Pol des Elements wieder vereinigen. Die Verbindungsdrähte nach W und diejenigen nach R wählt man von gleichem Widerstande.

Der Rheostatenwiderstand, welchen man einschalten muß, um die Galvanometernadel auf ihre Ruhelage zu bringen, ist gleich dem Widerstande W. Gibt der Rheostat nicht genau den gleichen Widerstand, so wendet man das Interpolationsverfahren von S. 414 an.

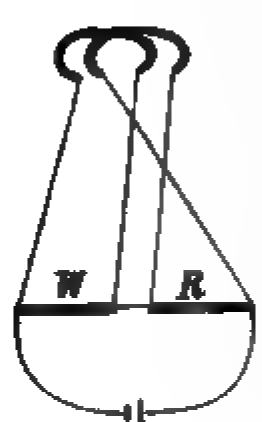
Prüfung des Differentialgalvanometers. 1) Die Bedingung, daß die Ströme gleich sind, wenn die Nadel keinen Ausschlag gibt, prüft man dadurch, daß man denselben Strom durch beide Windungen in entgegengesetzter Richtung leitet, indem man (von links nach rechts gezählt) die Drahtenden Nr. 1 und 2 mit einander, 3 und 4 je mit einem Pole der Säule verbindet. Die Nadel muß dann ruhig bleiben. 2) Die Widerstände der beiden Windungen, die ja zu den abzugleichenden Stücken hinzukommen, müssen gleich sein. Dies konstatiert man nach der vorigen Prüfung dadurch, daß man den Strom einer Säule sich nach dem in der obigen Figur gegebenen Schema, aber ohne die Einschaltung von Widerständen, nur durch die beiden Windungen verzweigen läßt. Die Nadel muß wieder in Ruhe bleiben. — Eine Berichtigung des Instrumentes mittels Hinzufügens ad 1) von Windungen, ad 2) von Widerständen ist in der angegebenen Reihenfolge auszuführen.



Kommutator. Von der genauen Richtigkeit macht ein Kommutator unabhängig, welcher W und R mit einander vertauschen läßt. W und R sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung die Einstellung der Nadel sich nicht ändert. Oder auch: Ist R ein Rheostat, und findet man, daß die Nadel ruhig bleibt, wenn R_1 eingeschaltet ist, bei umgelegtem Kommutator aber R_2, so ist

$$W = \tfrac{1}{2}(R_1 + R_2).$$

Differentialmultiplikator im Nebenschluß. Wenn der zu messende Widerstand kleiner ist als der Widerstand in einem Zweige des Multiplikators, so erreicht man eine größere Empfindlichkeit durch folgende Anordnung. Man schaltet W und R nicht neben, sondern hinter einander in den Strom einer Säule. Die beiden Multiplikatorzweige werden als Nebenschließungen eingeschaltet, aber so, daß der Strom sie entgegengesetzt durchläuft (Heaviside).



Über Abgleichung kleiner Widerstände durch Nebenschalten von Rheostaten vgl. S. 383.

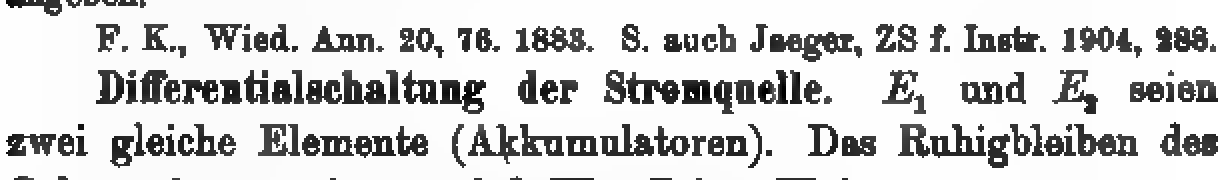
Gerade für kleine Widerstände ist die Messung mit dem Diff.-Multiplikator im Nebenschluß nützlich, da Übergangswiderstände durch die Anwendung von Multiplikatoren von erheblichem Widerstande unwirksam werden.

Übergreifender Nebenschluß (F. K.). Dieser eliminiert Übergangswiderstände völlig. Man vertausche in der vorigen Figur die beiden mittleren Ableitungen, so daß jeder Multiplikator mit beiden Widerständen verbunden ist. Der Ausschlag verschwinde bei der Einschaltung von W und R_1, sodann, nachdem die Stromquelle aus AB' in BA' verlegt worden ist, bei Einschaltung von W und R_2; dann ist $W = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$.

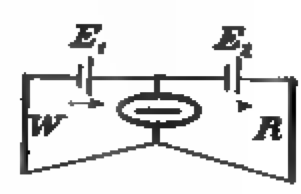
Die Multiplikatorhälften brauchen nicht wirkungsgleich zu sein. Kleinere Unsymmetrien fallen schon bei der obigen Mittelnahme mit heraus. — Von Voraussetzungen unabhängig ist $W = R$, sobald die Nadelstellung sich bei der Verlegung der Stromquelle aus AB' in $A'B$ nicht ändert. — Man kann Stücke von 0,01 Θ leicht bis auf $^1/_{10000}$, solche von 1 Θ genauer als auf 1 Millionteil ihres Betrages vergleichen.

Zum Auswechseln dient ein sechsnäpfiger Kommutator, dessen Quecksilbernäpfe durch drei Kupferbügel paarweise verbunden werden, entweder so, wie die ausgezogenen, oder so, wie die punktierten Linien angeben.

F. K., Wied. Ann. 20, 76. 1883. S. auch Jaeger, ZS f. Instr. 1904, 288.



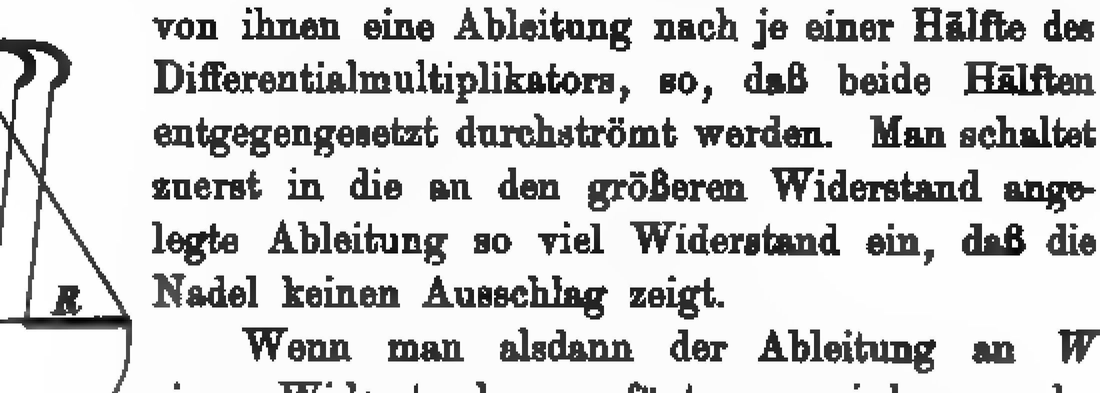
Differentialschaltung der Stromquelle. E_1 und E_2 seien zwei gleiche Elemente (Akkumulatoren). Das Ruhigbleiben des Galvanoskopes zeigt an, daß $W = R$ ist. Kleine Unsymmetrien der Elemente werden durch deren Vertauschung und Mittelnehmen aus beiden Resultaten eliminiert. Das für größere Widerstände gut brauchbare Verfahren kann ebenso genau arbeiten wie das Differentialgalvanometer.



Differential-Induktor. E_1 und E_2 können zwei mit einander aufgespulte Drähte einer Induktionsrolle (112) sein. Mit dem einen Pol eines ballistischen Galvanometers (109) sind zwei einander entgegengerichtete Enden beider Drähte verbunden. — Selbstinduktion oder Kapazität in W oder R veranlassen Korrektionen.

II. Vergleichung ungleicher Widerstände (Kirchhoff).

Man schaltet die beiden zu vergleichenden Widerstände W und R hinter einander in einen Stromkreis und legt an jeden von ihnen eine Ableitung nach je einer Hälfte des Differentialmultiplikators, so, daß beide Hälften entgegengesetzt durchströmt werden. Man schaltet zuerst in die an den größeren Widerstand angelegte Ableitung so viel Widerstand ein, daß die Nadel keinen Ausschlag zeigt.



Wenn man alsdann der Ableitung an W einen Widerstand γ zufügt, so wird man der anderen einen Zuwachs ϱ geben müssen, damit wieder die Nadel in Ruhe bleibt. Dann verhält sich $W:R=\gamma:\varrho$.

Denn die Ströme in den Ableitungen sind gleich, wenn ihre Widerstände sich wie $W:R$ verhalten. Sind diese Zweigwiderstände bei dem ersten Versuch w und r, bei dem zweiten $w+\gamma$ und $r+\varrho$, so ist

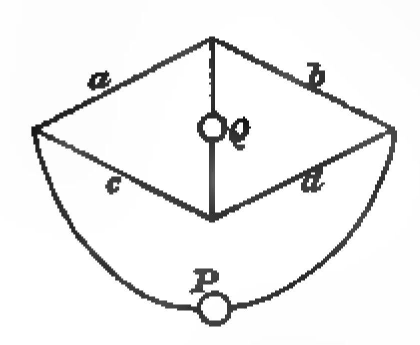
$$W:R=w:r=(w+\gamma):(r+\varrho)=\gamma:\varrho.$$

Das Verfahren eliminiert zugleich die Übergangswiderstände. — Die Multiplikatoren müssen genau auf gleiche Stromstärke justiert sein. Gleicher Widerstand wird nicht verlangt. — Bei momentanem Stromschluß können Extraströme stören.

Vgl. Strecker, Wied. Ann. 25, 464. 1885.

93. Widerstandsbestimmung in der Wheatstone'schen Brücke (1843).

Wheatstone'sche Kombination nennt man die Verzweigung eines Stromes durch zwei Leitungen, zwischen welche eine Querverbindung, die „Brücke", gelegt ist, so daß also die vier „Zweige" a, b, c, d entstehen. P bedeute den Stromerreger, dann ist der Leiter mit Q, welches einen Stromzeiger vorstellt, die Brücke. Durch diese fließt im allgemeinen ein Strom, dessen Richtung und Stärke von dem Verhältnis der vier Zweigwiderstände abhängt. Der Brückenstrom verschwindet nur dann, wenn die Proportion besteht



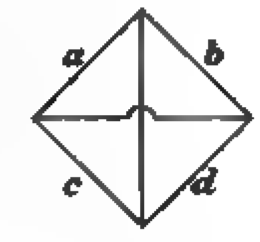
$$a:b=c:d.$$

Beweis. Man denke sich zunächst die Brückenleitung fort. Auf jedem der beiden Wege nimmt die Spannung von dem gemeinschaftlichen Werte an der Eintrittsstelle des Stroms bis zu dem Werte an der Austrittsstelle allmählich ab, und zwar ist der Abfall (der „Spannungsverbrauch") bis zu irgend einem Punkte dem bis dahin durchflossenen Widerstande pro-

portional. An einem Paar von Punkten, die den oberen bez. unteren Weg in die beiden Widerstände a und b bez. c und d zerlegen, muß also die gleiche Spannung bestehen, sobald $a:b=c:d$ ist; folglich wird die Brücke, an diese Punkte angelegt, stromlos sein.

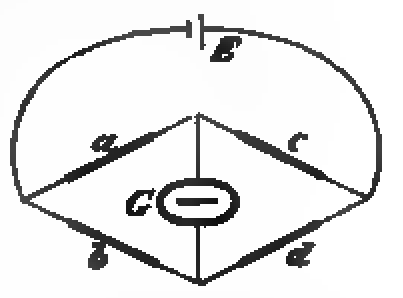
Einen anderen Beweis s. 80 I, S 375.

Durch eine leichte Überlegung sieht man, daß diese Beziehung giltig bleibt, wenn Stromquelle und Stromzeiger mit einander vertauscht werden; am unmittelbarsten folgt dies, wenn man die Figur so umzeichnet wie hierneben. Der horizontale Durchmesser enthalte das Element, der (von ihm isolierte) vertikale bilde die Brücke. Der Brücken-Strom verschwindet, wenn $a:b=c:d$, d. h. wenn $a \cdot d = b \cdot c$ ist. Die relative Lage der Widerstände a, d und b, c ist aber gegen beide Durchmesser dieselbe und es muß also auch, wenn im vertikalen die Stromquelle liegt, bei dem Bestehen jener Gleichung der Strom im horizontalen Durchmesser verschwinden.



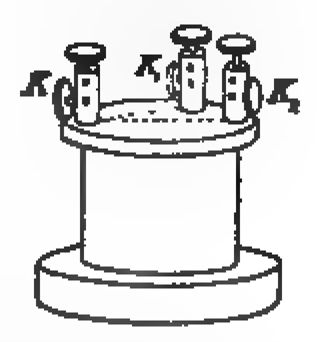
I. Brücke mit gleichen Widerstandspaaren.

a und b seien zwei als gleich bekannte Widerstände, c und d die beiden auf Gleichheit zu prüfenden, z. B. c ein zu bestimmender Widerstand, d ein Rheostat; E bedeutet die Stromquelle, G ein Galvanoskop in der Brücke. Dann ist c gleich dem Rheostatenwiderstand, welchen man einschalten muß, damit der Strom in G verschwindet.



Man kann auch in die Zweige a und c die als gleich bekannten, in b und d die zu vergleichenden Widerstände bringen.

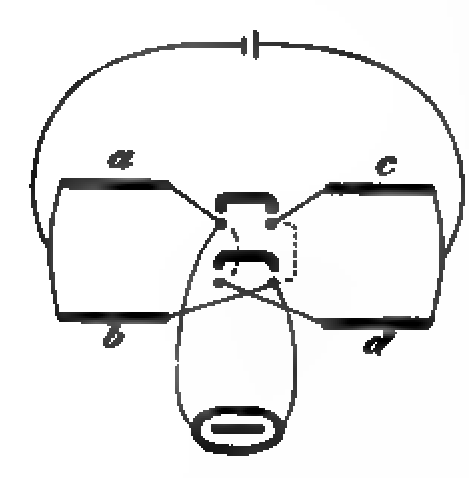
Die beiden gleichen Verzweigungswiderstände können aus zwei mit einander aufgewickelten gleichen Drähten bestehen. Zwei Enden liegen an der Klemme K, die anderen sind mit K_1 und K_2 verbunden. Stücke von 10 bis 100 Ω etwa werden zu den meisten Zwecken passen.



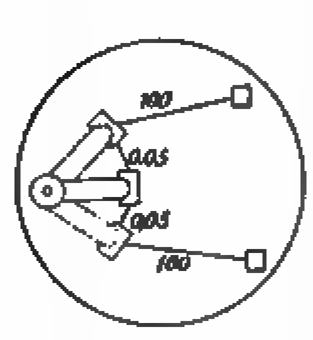
Empfindlichkeit. Je nachdem der Widerstand in der unverzweigten Leitung größer oder kleiner ist als in der Brücke, bietet die Anordnung $a=b$ oder $a=c$ die größere Empfindlichkeit. Außerdem hängt diese von der Größe der Zweigwiderstände ab, sowie von deren Verhältnis zu den abzugleichenden Widerständen und zum Widerstande des Galvanometers. Zweckmäßig ist deswegen, über verschiedene Paare von gleichen Widerständen (z. B. 1 10 100 1000) zu verfügen, aus denen man die passenden wählt. Cet. par. ist ein Paar großer Widerstände vorzuziehen, weil die Zuleitungen in diesem Falle weniger Sorgfalt erheischen.

Über empfindliche Anordnung vgl. z. B. Pogg. Ann. 142, 428. 1871.

Kommutator. Von der genauen Gleichheit der Widerstände a und b macht wieder die Vertauschung unabhängig: c und d sind gleich, wenn bei ihrer Vertauschung das Galvanoskop seine Einstellung nicht ändert. — Oder man verfährt so: d sei ein Rheostat. Um die Nadel auf Null zu bringen, müsse bei der einen Schaltung der Widerstand R_1, nach der Vertauschung R_2 gezogen werden, dann ist $c = \frac{1}{2}(R_1 + R_2)$. Wie man den Kommutator anzuordnen hat, zeigt die Figur.



Interpolation. Die Prüfung auf strenge Gleichheit erschöpft die wirklich vorkommenden Aufgaben nicht, die vielmehr oft darin bestehen, zwischen den beiden nahe gleichen Widerständen W und R den kleinen Unterschied zu ermitteln. Ebenso liefert der Rheostat im allgemeinen nicht den genau gleichen Widerstand, sondern es ist auch da die Differenz von W gegen das nächstliegende R zu bestimmen. In beiden Fällen wird dann, nachdem einer der Widerstände um einen bekannten kleinen Betrag abgeändert worden ist, eine zweite Beobachtung angestellt und die gesuchte Differenz nach der Regel de tri berechnet (5).

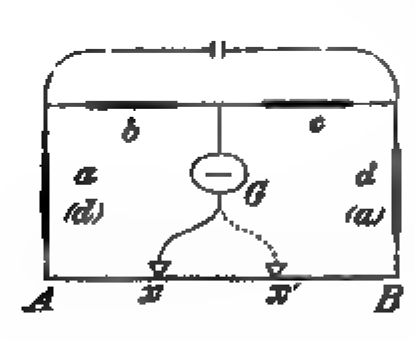


Eine zur Vergleichung nahe gleicher Widerstände bequeme Verzweigungsbüchse mit zwei Hundertern nebst einem beiderseitig vorschaltbaren Zehntel deutet die Figur an. Die Einstellungen seien: ohne Strom e_0; mit Strom ohne Vorschaltung e_1; wenn in dem zu W benachbarten Zweige 0,1 vorgeschaltet ist, e_2. Dann gilt $W/R = 1 + 0{,}001(e_0 - e_1)/(e_2 - e_1)$. — Vgl. Feußner und Lindeck, ZS f. Instr. 1895, 426.

Das Interpolieren mit Anwendung des Kommutators geschieht folgendermaßen. Man beobachtet bei Einschaltung von W und R die Einstellungen e_1 und e_2. Man ändert R um die relativ kleine Größe ϱ und beobachtet die Einstellungen e_1' und e_2'. Die Indices 1 und 2 sollen die Kommutatorstellungen bezeichnen. Dann ist (Vorzeichen beachten!)

$$W = R + \varrho \cdot \frac{e_1 - e_2}{(e_1 - e_2) - (e_1' - e_2')}.$$

Vergleichung nach Foster. a und d bedeuten die zu vergleichenden Widerstände, b und c zwei andere nahe gleiche Widerstände. AB ist ein längs einer Teilung ausgespannter Draht mit Gleitkontakt nach dem Galvanoskop. Der Strom in G ver-



schwinde, wenn der Kontakt bei x steht. Vertauscht man a und d, so verschwinde er bei einer neuen Einstellung x'. Bedeutet r den Widerstand von 1 Sk.-Teil des Meßdrahtes und wächst die Bezifferung von A nach B, so ist offenbar $a-d=r(x'-x)$.

r bestimmt man nach Matthiessen und Hockin, S. 425, oder man setzt einmal als a einen bekannten Widerstand, der etwas kleiner ist als AB, und für d einen dicken Kupferbügel.

Der Gleitkontakt arbeitet sicherer, wenn in der Figur Element und Galvanometer vertauscht werden.

Bestimmung sehr großer oder sehr kleiner Widerstände. Hierbei kann es notwendig oder vorteilhaft sein, die Zweige a und b der ersten Figur unter I in bekanntem Verhältnis (1 : 10, 1 : 100, bei Widerständen von Millionen Ohm auch wohl 1 : 1000) ungleich zu wählen. Die Möglichkeit einer Kontrolle durch Vertauschung fällt dann fort. Vgl. auch **94a**.

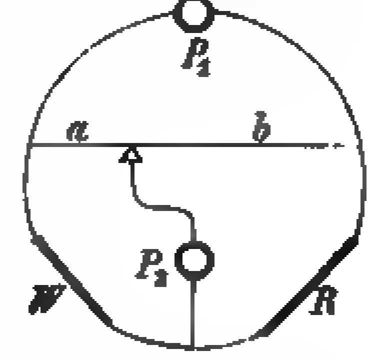
Die Thomson'sche Brückenschaltung siehe unter II.

Über Induktion oder Kapazität vgl. S. 426.

II. Vergleichung von Widerständen in der Wheatstone-Kirchhoff'schen Drahtbrücke.

Eingehende Anweisungen zum genauen Gebrauch z. B. bei Kohlrausch u Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte, 1898, S. 38–51.

In der Zeichnung sollen W und R die zu vergleichenden Widerstände, a und b zusammen einen ausgespannten gut cylindrischen Draht bedeuten, bei welchem man die Widerstände den Längen proportional setzen kann. An dem Drahte liegt ein Gleitkontakt, von welchem die Leitung nach P_2 und von da zwischen die Widerstände W und R geführt ist.



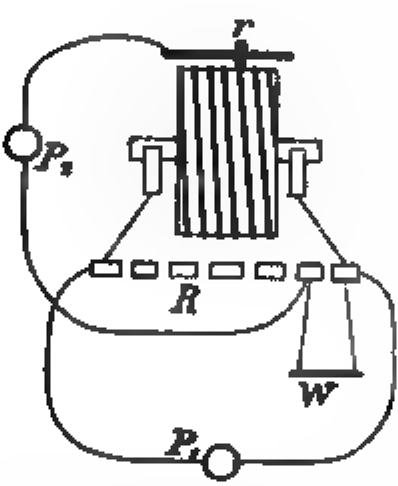
P_1 und P_2 bedeuten die Stromquelle und das Galvanoskop. Es ist im Prinzip gleichgiltig, welchen von beiden Punkten man zum Galvanoskop, oder zur Stromquelle wählt. Unter Umständen kann die Empfindlichkeit in dem einen oder anderen Falle größer sein; vgl. S. 421. Bringt man die Stromquelle nach P_2, so funktioniert der Schleifkontakt sicherer, was eine große Annehmlichkeit beim Arbeiten ist; auch bleiben Thermokräfte des Kontaktes unschädlich. Fehler von einer Erwärmung des

Drahtes durch den Strom werden bei der anderen Anordnung leichter vermieden.

Durch Probieren wird nun das Verhältnis zwischen a und b gesucht, bei welchem das Galvanoskop keinen Strom anzeigt. Dann ist $W:R = a:b$.

Den Quotienten a/b s. in Tab. 52 oder in den ausführlicheren Obach'schen Hilfstafeln, München 1879; lg a/b auch bei Kohlrausch u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte, Tab. 18. Die Teilung am Meßdraht kann auch gleich das Zahlenverhältnis a/b geben, vgl. S. 440.

Die Widerstände der Anschlußdrähte, die zu R und W hinzukommen, haben offenbar keinen Einfluß, wenn sie sich wie $R:W$ verhalten. Nach einem Vorversuch gleicht man daher die beiderseitigen Gesamtlängen der Drähte (von derselben Sorte) ungefähr diesem Verhältnis entsprechend ab; bequem ist hierfür, die Leitung nach P_2 von einer auf einem blanken Drahte zwischen W und R verschiebbaren Klemme aus zu führen.



Walzenbrücke. Bequemer und genauer als der gestreckte Meßdraht arbeitet ein Draht, der in 10 Windungen mit je 100 an einer Trommelteilung abzulesenden Unterteilen auf eine isolierende drehbare Walze gewunden und mit deren Axenlagern leitend verbunden ist. An diese Enden kommen erstens der zu bestimmende Widerstand W und der Rheostat R (der oft gleich fest mit dem Instrument verbunden ist), und zweitens die Leitungen zu dem Stromprüfer P_1. Die Stromquelle P_2 wird an den Schleifkontakt (das Kontaktröllchen r) und die Verbindungsstelle von R und W gelegt.

Zusatzwiderstände. Die Genauigkeit läßt sich durch Anschaltung von Widerständen erhöhen, die zur Bequemlichkeit der Rechnung passende Vielfache des Drahtwiderstandes sind. Um die Genauigkeit bei Vergleichungen in der Gegend von 1 : 1 sowie 1 : 10 zu verzehnfachen, genügen z. B. zwei Widerstände, jeder gleich dem 4,5fachen des Drahtwiderstandes, die man entweder beiderseitig oder beide einseitig zuschaltet. Vgl. F. K., Wied. Ann. 56, 177. 1895.

„Meßbrücken" bequemer und genauer Art u. a. von Siemens & Halske, Wolff, Edelmann, Hartmann & Braun.

Vergleichung nahe gleicher Widerstände. Man eliminiert die im allgemeinen vorhandene Ungleichheit beider Drahthälften, indem man auswechselt und aus den beiden abgelesenen a/b und b/a das Mittel nimmt.

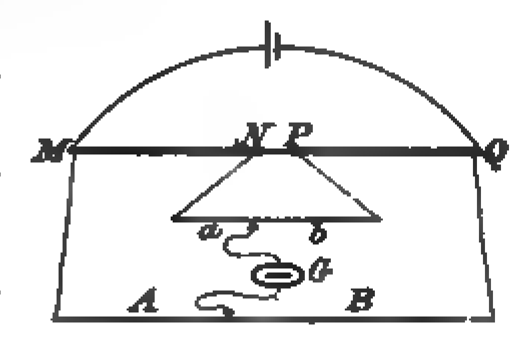
Kalibrierung des Drahtes. Hierüber vgl. **95 II.**

Anwendung eines Rheostaten. Es kann an die Stelle von b ein Rheostat, an die Stelle von a ein bekannter Widerstand (1 10 100 Θ) gesetzt werden.

Sehr kleine Widerstände.

Die nicht erfüllbare Forderung, Verbindungen ganz widerstandsfrei herzustellen, wird in den folgenden Anordnungen umgangen.

a) **Thomson'sche Brückenschaltung.** Die zu vergleichenden Widerstände MN und PQ, z. B. zwei mit einander zu vergleichende Metallcylinder, sind an ihren Enden N und P kurz mit einander, ferner aber mit den meßbar veränderlichen Rheostaten- oder Schleifdraht-Widerständen ab verbunden; ebenso die Enden M und Q mit AB. Die Zuleitwiderstände brauchen nur gegen ab bez. AB klein zu sein. Die Quotienten a/b und A/B werden immer gleich groß gehalten. Dann zeigt die Stromlosigkeit von G wieder das Verhältnis an



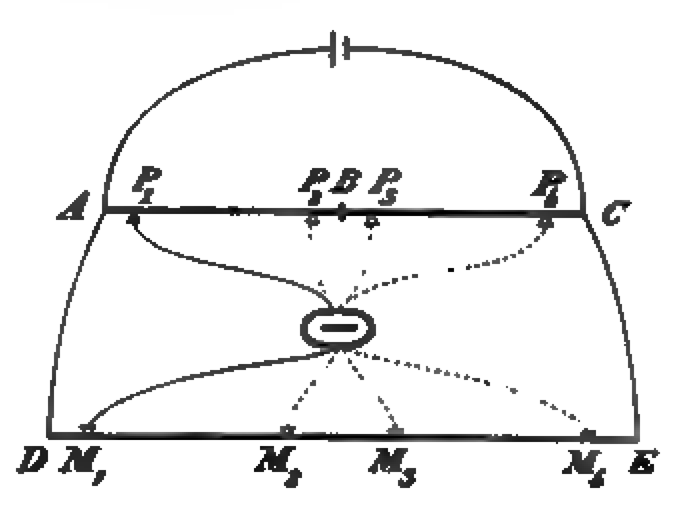
$$MN : PQ = A : B.$$

Denn die Ströme in MN und PQ, a und b, A und B sind dann offenbar paarweise gleich, etwa gleich J_0, i, J. Es folgt nun aus S. 375, B $MN \cdot J_0 + a \cdot i = A \cdot J$ oder $MN/A \cdot J_0/J + a/A \cdot i/J = 1$. Ebenso wird gefunden $PQ/B \cdot J_0/J + b/B \cdot i/J = 1$; da nun $a/A = b/B$, so folgt

$$MN/A = PQ/B, \quad \text{q. e. d.}$$

Über die Behandlung der Korrektion, falls $a:b$ nicht genau $= A:B$ ist, sowie über genaue Messungen an Widerständen bis zu 0,0001 Θ hinab vgl. Jaeger, Lindeck u. Diesselhorst, ZS f. Instr. 1903, 33 u. 65; auch Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. 4, 118. 1903.

b) **Vergleichung kleiner Widerstände** nach A. Matthiessen und Hockin. AB und BC seien die zu vergleichenden Leiter, DE sei ein gespannter Draht. Man sucht zu einem Kontaktpunkte P_1 einen Punkt M_1, welcher den Strom im Galvanometer



verschwinden läßt. Denselben Erfolg sollen die Paare $P_2 M_2$, $P_3 M_3$ und $P_4 M_4$ geben. Dann verhalten sich die Widerstände

$$P_1 P_2 : P_3 P_4 = M_1 M_2 : M_3 M_4.$$

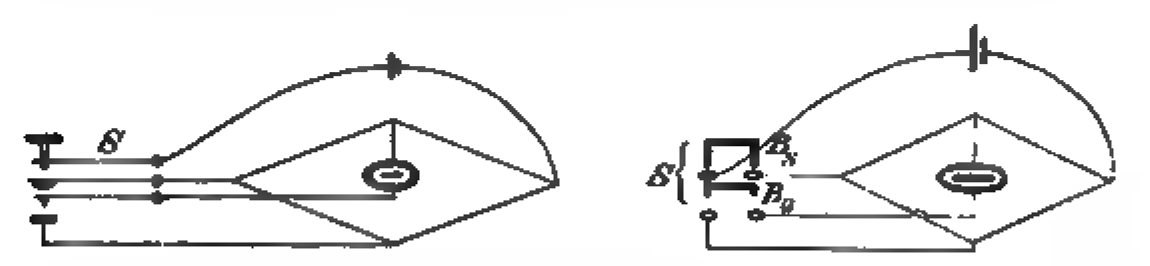
Auch hier werden Element und Galvanometer besser vertauscht.

Beweis. Der Strom Null zeigt an, daß in den zusammengehörigen Kontaktpunkten gleiches Potential herrscht (80 I Nr. 4).

S. auch die Methoden von Foster, Wied. Ann. 26, 240. 1885.

Momentaner Schluß. Wegen der Stromwärme ist es bei Brücke (oder Differentialgalvanometer) oft geboten, kurz dauernde Ströme anzuwenden, wofür auch Induktionsstöße (**112**) dienen können. Dieses Verfahren kann wegen Selbstinduktion oder Kapazität in aufgespulten längeren Widerständen oder gar bei der Anwesenheit von Eisenkernen Fehler bewirken.

Man vermeidet bei Batterieströmen die Fehler, wenn man durch einen Doppelschlüssel S die Verbindung in der Brücke einen Augenblick später schließt als an der Säule. An dem Brücken-Doppelschlüssel mit Kontaktknöpfen drückt der zweite Federkontakt auf den dritten durch einen isolierenden Knopf.



Sicherer arbeitet die Quecksilberverbindung des anderen Schlüssels (Dorn), von dessen zwei Bügeln (auf demselben isolierenden Brettchen an einem Federkontakt mit Druckknopf zu denken) der eine, längere, B_S den Strom etwas früher schließt, als B_G das Galvanometer einschaltet.

Telephon. Dieses läßt sich anstatt des Galvanometers anwenden, falls die Widerstände genügend induktions- und kapazitätsfrei sind. Vgl. **96** I 1.

94. Widerstandsvergleichung durch Dämpfung.

In der geschlossenen Spule eines Galvanometers werden durch Schwingungen Ströme induziert, die auf die Bewegung verzögernd wirken. Das log. Dekrement (27) kleiner Schwingungen ist konstant und dem Gesamtwiderstande $\gamma + w$ des Galvanometers und des Schließungsdrahtes umgekehrt proportional (108 Gl. 8).

w_1 und w_2 mögen die zu vergleichenden Widerstände bedeuten. Beobachtet man die logarithmischen Dekremente:

λ_0, wenn das Galvanometer kurz geschlossen ist,

λ_1 bez. λ_2, wenn es durch w_1 bez. w_2 geschlossen ist,

λ' bei geöffnetem Stromkreise, also z. B. durch den mechanischen Luftwiderstand,

so ist
$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\lambda_0 - \lambda_1}{\lambda_0 - \lambda_2} \frac{\lambda_2 - \lambda'}{\lambda_1 - \lambda'}.$$

Folgt aus $(\lambda_0 - \lambda') : (\lambda_1 - \lambda') : (\lambda_2 - \lambda') = 1/\gamma : 1/(\gamma + w_1) : 1/(\gamma + w_2)$.

Auch kann man mittels $\gamma : w_1 = (\lambda_1 - \lambda') : (\lambda_0 - \lambda_1)$ einen Widerstand w_1 auf γ zurückführen oder umgekehrt.

Schwingungsdauer und Dämpfung lassen sich durch Astasieren von außen vergrößern (**72b**).

Bei sehr starker Dämpfung hat man eine Korrektion anzubringen, nämlich von jedem beobachteten λ abzuziehen $\frac{1}{4}\lambda^3$.

F. K., Pogg. Ann. 142, 430. 1871.

94a. Sehr große Widerstände; Isolationsmessungen.

Sehr große Widerstände, z. B. von ionisierten Gasen oder die Isolationswiderstände von Kabeln oder von plattenförmigem Isoliermaterial, dem man weiche Elektroden anschmiegt, bedürfen oft besonderer Meßmethoden. Falls, wie in den letzteren Fällen, mit den großen Widerständen erhebliche Kapazitäten verbunden sind, so ist praktisch zu beachten, daß die angewandten starken Batterien recht konstant sein müssen, damit nicht die zur Beobachtung kommenden Ströme durch Ladungs- und Entladungsströme gestört werden. Auch darf man wegen der Kapazitäten oft nicht mit kurzem Stromschluß arbeiten.

Vgl. die Werke von Frölich und Raphael-Apt über Isolationsmessung.

S. auch die elektrometrischen Methoden **130** II.

1. Direkte Messung. Wenn genügend empfindliche Galvanometer, bez. vielpaarige Batterien, sowie große Vergleichswiderstände zur Verfügung stehen, so können die Methoden **90** bis **93** angewendet werden; insbesondere die Brückenschaltung S. 423 mit Zweigleitungen etwa im Verhältnis 1 : 1000, die dann für Widerstände bis zu 10 Millionen ausreicht, falls man Vergleichswiderstände bis 10000 besitzt.

2. Durch Teilung einer Batterie. Dieses Verfahren ist meistens am einfachsten. Eine vielpaarige Batterie vom Widerstande w gebe durch den zu messenden Widerstand W und ein Galvanometer vom Widerstand γ geschlossen den Ausschlag e;

der n^{te} Teil der Batterie, durch den bekannten Widerstand R ebenso geschlossen, gebe e'. Dann ist

$$W = (nR + n\gamma + w)e'/e - (\gamma + w).$$

Teilt man die Batterie so, daß e nahe $= e'$ wird, so fällt w heraus und es wird

$$W = n(R + \gamma)e'/e - \gamma.$$

γ wird meistens nur genähert bekannt zu sein brauchen.

Zum Zwecke genauer Messung bestimmt man e' für alle n Teile der Batterie und nimmt das Mittel.

3. Aus Spannung und Stromstärke. Beträgt die Spannung einer Batterie E V und erzeugt sie, durch den Widerstand und einen Strommesser geschlossen, den Strom i A, so bekommt man den Gesamtwiderstand der Leitung $W = E/i$ Θ. Meistens wird ein Spiegelgalvanometer gebraucht werden, dann ist (83) $i = \mathfrak{C} \cdot e$, wenn e der Ausschlag, und $W = 1/e \cdot E/\mathfrak{C}$ Θ.

4. Mit einer Abzweigung am Galvanometer. Eine Batterie, durch den zu messenden Widerstand w und das Galvanometer vom Widerstande γ ohne Abzweigung geschlossen, gebe den Ausschlag e. Sie gebe ferner, durch den bekannten großen Widerstand R und das mit einem Nebenschluß s versehene Galvanometer geschlossen, e'. Ist w_0 der Widerstand der Batterie, so hat man genau

$$w = (e'/e)[(R + w_0)(s + \gamma)/s + \gamma] - \gamma - w_0.$$

Bei sehr großen Widerständen kann γ und w_0 meistens gegen R und w vernachlässigt werden. Dann ist einfach

$$w = (e'/e)R(s + \gamma)/s.$$

5. Mit dem Kondensator (Siemens). Widerstände von sogenannten „Nichtleitern“, z. B. von verschiedenen Sorten Guttapercha u. dgl., sind unter Umständen für galvanometrische Methoden zu groß. Dann läßt sich die Ladungs- oder Entladungszeit eines Kondensators benutzen. Sinkt an einem Kondensator von der Kapazität c (132) das Potential (127) in der Zeit t von dem Werte V_1 auf V_2, so ist der Widerstand des Entladungsweges

$$W = \frac{1}{c} \frac{t}{\lg\text{nat}\, V_1 - \lg\text{nat}\, V_2}. \qquad 1.$$

Beweis. Dem Potentiale V entspricht die Entladungsstromstärke V/W, also im Zeitelement dt die abfließende El.-Menge $dt \cdot V/W$. Dieser

Verlust drückt sich andererseits aus als $-c\,dV$. Gleichsetzen und Integrieren liefert den obigen Ausdruck.

Findet man hiernach den Wert W, wenn der Kondensator für sich allein steht, und dann W', wenn die beiden Belegungen durch den zu bestimmenden Widerstand w mit einander verbunden sind, so beträgt der letztere allein (80)

$$w = WW'/(W - W'). \qquad 2.$$

Ist c in absolutem Maße (Farad) gegeben, so erhält man den Widerstand in ebensolchem Maße (Ohm). Das Maß von V ist gleichgiltig.

Zum Beispiel sinkt in einer Zeit $t = Wc$ nach 1. das Potential V_1 auf $V_1/2{,}718$. Ist etwa $W = 10^8 \Theta$ und $c = 0{,}1$ Mikrofarad $= 10^{-7}$ Farad, so wird $Wc = 10^8 \cdot 10^{-7} = 10$ sek.

Umgekehrt kann man aus bekanntem W und der Entladungsdauer die Kapazität des Kondensators bestimmen (Siemens & Halske).

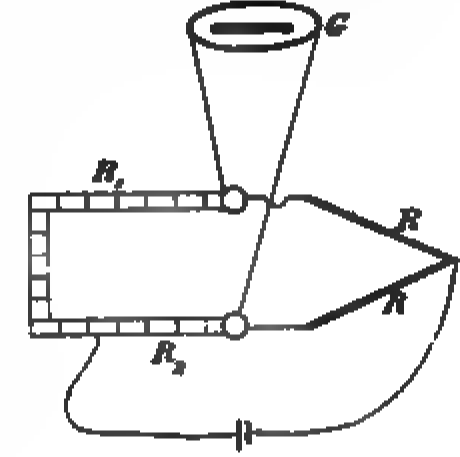
Verfeinerungen der Methode und Formeln für den Verlauf der Entladung s. bei Klemenčič, Wien. Ber. 93, 470. 1886.

95. Kalibrierung eines Rheostaten oder eines Brückendrahtes.

I. Stöpselrheostat.

Die Prüfung bez. Fehlerbestimmung eines Rheostaten geschieht natürlich am einfachsten durch Vergleich mit einem Normalrheostaten. Mangels eines solchen vergleicht man die Stücke bez. Summen von gleichem Nennwert mit einander und ein Stück noch mit einem Normalwiderstande.

Wir wollen zur Vergleichung Brückenschaltung annehmen. Man verbindet einen Pol des Elementes mit einem Klotz der Stöpselvorrichtung. Fehlt dem Rheostaten die Vorkehrung zu diesem Zwecke, so findet man an der Befestigungsstelle der Drähte eine Gelegenheit oder man schabt eine Stelle zu diesem Zwecke blank. Es ist nicht notwendig, daß dieser Kontakt ganz widerstandsfrei sei.



Vom anderen Pole des Elementes führt man eine Verbindung zwischen zwei gleiche Verzweigungswiderstände R (s. z. B. die Fig. S. 421, unten). Die kurzen Drähte von R nach R_1 und R_2 sollen gleichen Widerstand haben, bez. sie können ev. benutzt werden, um eine Ungleichheit von R und R aus-

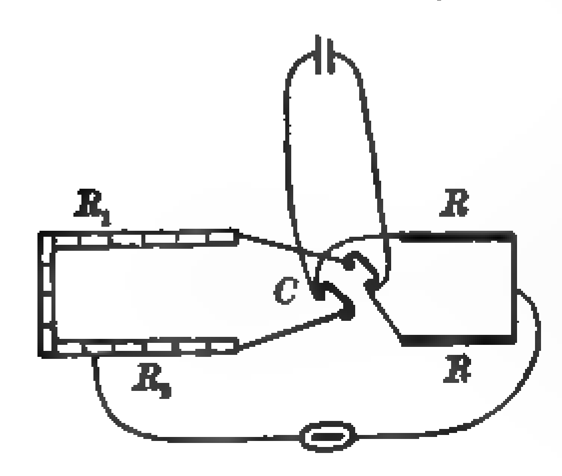
zugleichen. Beiderseitig von der Verzweigungsstelle am Rheostaten werden nun die zu vergleichenden, dem Nennwerte nach gleichen Widerstände R_1 und R_2 gezogen. Man beobachtet die Nadeleinstellung e. Man schaltet zu dem Widerstande R_1 (womöglich dem kleineren) einen relativ kleinen bekannten Widerstand δ (1 oder 0,1 oder 0,01) zu und beobachtet die Nadeleinstellung e'. e_0 sei die Ruhelage ohne Strom. Dann ist

$$R_2 = R_1 + \delta \frac{e - e_0}{e - e'}.$$

Bequem ist es, die kleine Änderung statt an R_1 in konstantem Verhältnis an den R vornehmen zu können; vgl. die Verzweigungsbüchse S. 422, Mitte.

Für RR kann endlich auch ein Draht mit Schleifkontakt benutzt werden, dann findet man (vgl. S. 424) $R_1 : R_2$ durch eine einzige Einstellung. Anstatt mit der Obach'schen Tafel zu rechnen, läßt sich aus einer Einstellung, die um ε T.-Str. von der (richtigen) Mitte der Brücke abweicht, dieses Verhältnis auch berechnen als $\frac{R_1}{R_2} = \frac{500 + \varepsilon}{500 - \varepsilon} = 1 + 0{,}004\,\varepsilon$ (vgl. S. 9).

Kommutator (C in der Figur). Dieser eliminiert Ungleichheiten der R durch Auswechseln von R_1 und R_2. Seine Kontakte müssen widerstandsfrei sein; die kurzen Drähte von C nach R_1 und R_2 sollen gleichen Widerstand haben. Man beobachte die Einstellungen e_1 und e_2 bei den Kommutatorstellungen I und II, schalte nun zu R_1 einen relativ kleinen bekannten Widerstand δ zu und beobachte die Einstellungen e_1' und e_2'; dann ist



$$R_2 = R_1 + \delta \frac{e_1 - e_2}{(e_1 - e_2) - (e_1' - e_2')}.$$

Etwaige Thermokräfte fallen in obiger Anordnung heraus.

Auch auf eine Schleifbrücke läßt sich der Kommutator anwenden; der halbe Unterschied der Einstellungen vor und nach dem Kommutieren gibt die Abweichung der richtigen Einstellung von dem Brückenmittelpunkt.

Das Differentialgalvanometer vertritt die Brücke mit etwa gleicher Genauigkeit. Die Anordnung siehe **92** I bei „Kommutator". *RW* ist der Rheostat.

Kleine Widerstände. Für Stücke von 0,1 bis 1 oder 2 Θ ist am besten das Differentialgalvanometer im Nebenschluß oder im übergreifenden Nebenschluß (S. 419; s. auch die Herstellung kleiner Widerstandsänderungen S. 383). — Einfacher und hier meist genau genug ist die Abzweigmethode **91** II 1, die den Vorteil bietet, alle notwendigen Bestimmungen ausführen zu können, auch wenn der kleinste Widerstand nicht doppelt vorhanden ist. Man kann z. B. 1 mit 2 vergleichen oder auch durch abwechselndes Ziehen der Stöpsel 1 + 4 mit 2 + 3.

Verschraubungen an den Widerständen sind sorgfältig zu überwachen. Über die Behandlung der Stöpsel s. **80** IV. — Von Zeit zu Zeit ist die Kalibrierung, besonders wenn starke Ströme durchgegangen sind, zu wiederholen.

Berechnung der Korrektionstabelle. Es werde die übliche Anordnung 5, 2, 2, 1 vorausgesetzt; die einzelnen Stücke werden durch Indices unterschieden. Wir nehmen noch einen zweiten Einer an, wofür etwa die Summe der Zehntel genommen werden kann. Die Beobachtung habe nun ergeben:

$$\begin{aligned} 5' &= 2' + 2'' + 1' + \alpha \\ 2'' &= 2' \qquad\qquad + \beta \\ 2' &= 1' + 1'' \qquad + \gamma \\ 1' &= 1'' \qquad\qquad + \delta \end{aligned}$$

Außerdem sei anderweitig, nämlich durch eine Vergleichung mit einem Normalwiderstand oder mit der höheren Reihe des Rheostaten gefunden, daß die Summe einen Fehler ϱ besitzt,

$$5' + 2' + 2'' + 1' = 10 + \varrho.$$

Man berechne $\sigma = \frac{1}{10}(\alpha + 2\beta + 4\gamma + 6\delta - \varrho)$, so wird (vgl. **14**) die Korrektionstabelle

$$\begin{aligned} 5' &= 5 - 5\sigma + \alpha + \beta + 2\gamma + 3\delta \\ 2'' &= 2 - 2\sigma + \beta + \gamma + \delta \\ 2' &= 2 - 2\sigma + \gamma + \delta \\ 1' &= 1 - \sigma \quad + \delta \\ \text{und } 1'' &= 1 - \sigma. \end{aligned}$$

Ebenso verfährt man mit den Zehnern, Hundertern usw.

Bei einem Rheostaten von stärkerem Temperatur-Koeffizienten (**80** IV, **95a** u. Tab. 30) wird es sich im Interesse kleiner Korrektionszahlen empfehlen, zunächst die Summe der sämtlichen Widerstände (oder auch der vier größten) als richtig anzunehmen; ein gemeinsamer, von der Temperatur abhängiger Korrektionsfaktor reduziert dann die aus der Tabelle korrigierten Resultate auf absolute Werte.

Bei der Anordnung 4, 3, 2, 1 vergleicht man 4 mit 3+1, 3 mit 2+1, 2 mit 1+1′ und 1 mit 1′, wo unter 1′ die Summe der Zehntel verstanden ist, oder auch 4+1 mit 3+2 (vgl. oben).

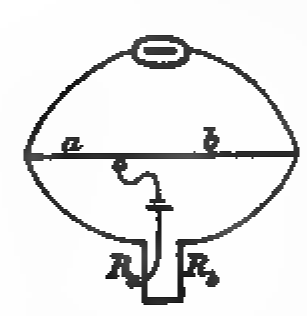
Für Dekaden mit 10 gleichen Widerständen ergibt sich das Verfahren von selbst.

Drahtwiderstände werden von der P. T. Reichsanstalt beglaubigt.

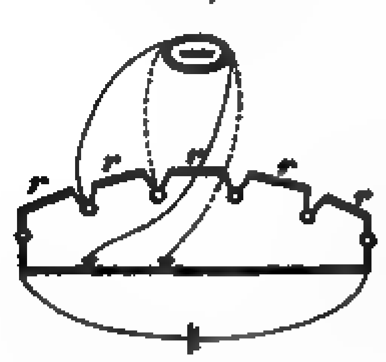
II. Kalibrierung eines Drahtes.

Ausführlicheres z. B. bei Kohlrausch u. Holborn, Elektrolyte S. 45—51.

1. Mit dem Rheostaten. Am einfachsten erzielt man die Korrektionstabelle für den Draht mit einem kalibrierten Rheostaten. Man schaltet den Draht ab mit einem Rheostaten zusammen, wie die Figur anzeigt. Man zieht im Rheostaten Widerstandsverhältnisse $R_a:R_b$ (etwa nach und nach 1:9; 2:8; 3:7 usw.; nicht zu kleine Stücke) und bestimmt so je das entsprechende Verhältnis $a:b = R_a:R_b$. Einige Punkte nahe den Enden werden außerdem mit $R_a:R_b = 1:99$ u. dgl. bestimmt. — Die Zuleitungen zu R_a und R_b wählt man hinreichend dick, daß man sie vernachlässigen darf.



2. Mit wandernden Drahtstücken; vgl. S. 425 (Strouhal und Barus). Es werden einzelne, nahe gleiche Widerstände r in der Anzahl der zu vergleichenden Drahtstrecken durch Quecksilbernäpfe hinter einander geschaltet. Man vergleicht eines jener Widerstandsstücke mit den verschiedenen Strecken des Drahtes, wozu man das erste Stück nach jeder Bestimmung um einen Platz vorschiebt. Wied. Ann. 10, 326. 1880.



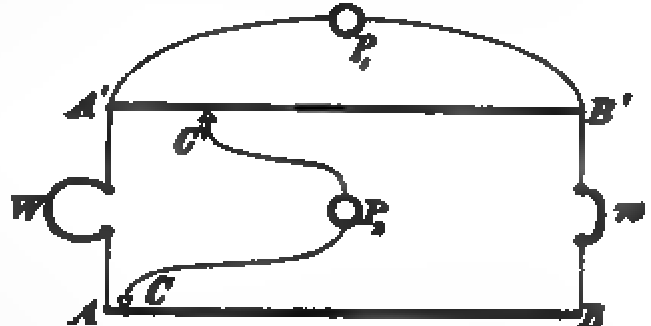
Dabei erhält man also auf dem Drahte lauter Stücke von gleichem Widerstande.

3. Mit einer Anzahl nahe gleicher Widerstände (Heerwagen). Eine Anzahl N (etwa 10) nahe gleicher Widerstände (Drahtstücke mit amalgamierten Kupferbügeln), mit Quecksilbernäpfen beliebig hinter einander zu verbinden, liefert jedes Verhältnis $m:n$ des Drahtes, wo $m+n=N$ ist, in folgender Weise. Zwei Gruppen von m und n Stücken werden mit den Drahtabschnitten verglichen. Man vertauscht dann zwischen den beiden Gruppen einzelne Stücke, vergleicht wieder, usf., bis

jedes Stück sich n mal in der einen, m mal in der anderen Gruppe befunden hat. Man erhält so $m+n$ unabhängige Einstellungen des Kontakts, deren Mittel den Draht genau im Verhältnisse $m:n$ teilt.

Heerwagen, ZS f. Instr. 10, 170. 1889. Daselbst auch Erörterungen über die Genauigkeit verschiedener Methoden.

4. Nach Foster. AB ist der zu kalibrierende Draht, $A'B'$ ein Hilfsdraht. P_1 und P_2 bedeuten Galvanoskop und Stromquelle. Der Widerstand W ist gleich einem Bruchteil, etwa $1/_{10}$ oder $1/_{20}$ von AB; w bedeutet einen Bügel von dickem Kupferdraht. W und w lassen sich widerstandsfrei auswechseln.



Man setzt den Kontakt C nahe an A und schiebt den Kontakt C' so, daß der Strom im Galvanoskop verschwindet. Man wechselt W und w aus, läßt C' stehen und verschiebt C, bis der Strom verschwindet: der Widerstand der Verschiebungsstrecke des Drahtes ist offenbar $= W - w$. Nun läßt man C stehen, bringt W und w an ihren früheren Ort, verschiebt C' bis zum Strome Null, wechselt dann W und w wieder aus und bestimmt durch Verschieben von C die zweite Drahtstrecke, deren Widerstand $= W - w$ ist, usf.

Foster, Wied. Ann. 26, 239. 1885; früher J. Soc. Telegr. Eng.

5. Mit einem wandernden Schneidenpaar. Man sendet durch den Draht einen konstanten Strom. Ein empfindliches Galvanometer mit großem Widerstande sei mit zwei Schneiden verbunden, die einen konstanten Abstand von einander haben. Man setzt das Schneidenpaar auf verschiedene Strecken des Drahtes; den beobachteten Galvanometerausschlägen sind die Widerstände der Strecken proportional (**91 II**). Die Konstanz des Stromes muß geprüft werden, am einfachsten, indem man von Zeit zu Zeit auf dieselbe Strecke zurückkommt. An Walzendrähten ist die Methode besonders leicht auf die einzelnen ganzen Windungen anzuwenden.

Um nur zu prüfen, ob ein Draht gutes Kaliber hat, bewegt man die beiden Schneiden längs des Drahtes und sieht, ob das Galvanometer konstant bleibt (Braun).

6. Mit dem Differentialgalvanometer. Man versieht die Zuleitungen zu jedem Multiplikator mit Schneiden und setzt die letzteren auf den Draht so auf, daß die Nadel in Ruhe bleibt. Die beiden Strecken haben dann gleichen Widerstand (S. 419). Vorausgesetzt ist in Nr. 5 und 6 ein so großer Widerstand der Multiplikatorzweige, daß die Übergangswiderstände keine Fehler geben.

Korrektionstabelle. Der Brückendraht sei in 1000 Teile geteilt. Hat man durch eins der vorigen Verfahren ermittelt, daß dem Punkte a des Drahtes, welchem also ohne Korrektion das Widerstandsverhältnis $a:(1000-a)$ entsprechen würde, in Wirklichkeit das Verhältnis $(a+\delta):[1000-(a+\delta)]$ entspricht, was die Tafeln von Obach bequem angeben, so ist δ die zur Ablesung a zuzufügende Korrektion. Man trägt die δ zu den a in Koordinatenpapier ein und verbindet die Punkte durch eine Kurve, aus welcher die Korrektionen oder eine Korrektionstabelle genommen werden. Je dichter die Punkte, desto geringer ist die bleibende Unsicherheit.

Die dauernde Giltigkeit der Tabelle kontrolliere man hauptsächlich an den Enden des Drahtes. Vgl. über einfache Kontrollen K. u. Holborn l. c. S. 50.

95a. Temperaturkoeffizient eines Leiters.

Der Widerstand fast aller metallischen Leiter wächst mit der Temperatur. Hat ein Leiter bei t und t' die Widerstände w und w', so nennt man Temperaturkoeffizient des Widerstandes zwischen t und t' den Faktor α in der Gleichung $w'=w[1+\alpha(t'-t)]$.

Zur Temperaturänderung dient etwa ein mit Filz umhülltes, vielleicht elektrisch geheiztes Petroleumbad. Sind w, t und w', t' beobachtet (92 und 93), so ist also

$$\alpha=\frac{1}{t'-t}\frac{w'-w}{w}.$$

Für t wählt man meist 18° oder 0°.

Soll der Koeffizient genau bestimmt werden, so ist eine entsprechend empfindliche Methode erforderlich. Besonders hat man bei kleinen Widerständen auf Konstanz der Verbindungen zu sehen, auch Thermoströme auszuschließen.

Um eine Drahtsorte zu untersuchen, schneide man z. B. zwei Stücke Nr. 1 und Nr. 2 ab, Nr. 2 ein wenig länger. Nr. 1, dessen Widerstand $=w_1$ sei, wird in ein auf konstanter, gewöhn-

licher Temperatur zu haltendes, Nr. 2 in ein zu erwärmendes Bad gebracht. Neben Nr. 2 wird ein Rheostat geschaltet und jedesmal dessen Widerstand R gesucht, der nun mit Nr. 2 zusammen dem konstanten Widerstande w_1 gleich ist. Findet man R für die Temperatur t und R' für t', so berechnet sich (aus den Beziehungen $1/w + 1/R = 1/w_1$ usw. leicht abzuleiten) die gesuchte Größe

$$\frac{w'-w}{w} = \frac{w_1}{R}\,\frac{R-R'}{R'-w_1}.$$

Stehen zwei Rheostaten zur Verfügung, so kann der eine von ihnen statt des Stückes w_1 dienen.

Besitzt man einen Normaldraht vom Widerstande W und bekanntem Temperaturkoeffizienten $\mathfrak{A}$, so bringe man das zu bestimmende Drahtstück auf nahe denselben Widerstand und erwärme beide mit einander. Ist bei den Temperaturen t bez. t' der Widerstands-Unterschied, untersuchter minus Normaldraht, $= \gamma$ bez. γ', so gilt

$$\mathfrak{a} = \left(1 - \frac{\gamma}{W}\right)\left(\mathfrak{A} + \frac{1}{W}\,\frac{\gamma'-\gamma}{t'-t}\right).$$

Bei manchen Legierungen sowie für große Temperaturänderungen ist der Koeffizient nicht konstant. Für genauere Darstellung setzt man $w_t = w_0(1 + \mathfrak{a}t + \mathfrak{b}t^2 \cdots)$.

Über Temperaturbestimmung durch Widerstandsänderung s. 48 II u. 72a II; über Elektrolyte S. 444.

Temperaturkoeffizienten einiger Körper in Tab. 3b, 30 u. 31.

95b. Quecksilberwiderstände (Siemens 1860).

Über Herstellung reinen Quecksilbers vgl. 8, 1.

Glasröhren. Der Querschnitt wird meist zwischen etwa ½ und 3 qmm gewählt werden; man sucht durch eine vorläufige Kalibrierung mit einem Quecksilberfaden möglichst gleichmäßige Röhren aus. Die Herstellung einer ebenen oder eine Spur konvexen Endfläche geschieht durch Schleifen auf einer mit der Drehbank rotierenden Kupferscheibe mit feinem wässerigen Schmirgel.

Ausmessung (21). Die Länge l des Kanales wird mit dem Kontaktkomparator oder z. B. an zwei Glasplättchen gemessen, die man mit verschwindend dünner Kittschicht an die Endquerschnitte anklebt. Man mißt den Abstand von zwei Punktpaaren am inneren Rande, die sich gegenüber liegen. — Der mittlere Querschnitt q findet sich aus der Wägung einer eben abgegrenzten Quecksilberfüllung des ganzen Rohres (23, 24).

Die Widerstandskapazität des Rohres würde bei streng cylindrischer Gestalt betragen l/q.

Kaliberkorrektion. Wegen des ungleichmäßigen Querschnitts kommt hierzu ein Kaliberfaktor C, welcher größer als 1 ist. Ein Quecksilberfaden, welcher im Mittel nahe $n$mal kürzer ist als das Rohr, nehme in an einander stoßenden Strecken die Längen $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$ ein. In erster Annäherung ist dann

$$C = 1/n^2 \cdot (\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2 + \cdots + 1/\lambda_n).$$

Einen für die Rechnung bequemeren Ausdruck erhält man, wenn man $\lambda_1 = l/n + \delta_1$, $\lambda_2 = l/n + \delta_2 \cdots$ setzt, nämlich

$$C = 1 + n(\delta_1^2 + \delta_2^2 + \cdots + \delta_n^2)/l^2 - (\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_n)^2/l^2.$$

Temperatur. Der Widerstand eines Quecksilberfadens von konstanter Gestalt bei der Temperatur t ist (Guillaume; Kreichgauer u. Jaeger)

$$\gamma_t = \gamma_0 (1 + 0{,}000885\, t + 0{,}00000114\, t^2).$$

Endformel. Mit Rücksicht auf die Ausdehnung gewöhnlichen Glases hat eine Quecksilberfüllung des Rohres (l in m, q in mm² bei 0° gemessen) bei der Temperatur t den Widerstand

$$w = C \cdot l/q \cdot (1 + 0{,}000877\, t + 0{,}00000114\, t^2) \text{ Siem. E.}$$

Division durch 1,063 gibt w in Ohm.[1])

Anordnung. Die Enden der Röhre münden in kleine Gefäße mit amalgamierten Platinelektroden (8, 11). Der Verschluß wird mit Kollodium oder Guttapercha usw. gedichtet, das Ganze in ein Bad gestellt. Übergangswiderstände werden eliminiert, indem man den Quecksilberwiderstand zwischen zwei Nebenelektroden mit übergreifendem Nebenschluß (92 I) bestimmt, und zwar wegen der Stromwärme mit sehr schwachen Strömen.

Ausbreitungswiderstand. Nach 80 I 1 fügt man zur Länge des Kanales hinzu $0{,}80(r_1 + r_2)$, wobei r_1 und r_2 die End-Halbmesser des Kanales bedeuten.

Über genauere Kalibrierungsformeln und über die Anordnung der Messungen s. u. a. Siemens, Pogg. Ann. 110, 1. 1860; Rayleigh u. Sidgwick, Phil. Trans. (A) 173, 661. 1883; Strecker, Wied. Ann. 25, 252. 456. 1885; Benoît, Construct. des Étalons prototypes etc. Paris 1885; Weinstein, Elt. ZS 1888, 25; Leman, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. II, 359. 1895; Jaeger, ib. 379; Jaeger u. Kahle, Wied. Ann. 64, 456. 1898. Besonders auch Dorn, Wahrsch. Wert des Ohm, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. II, 261, auch ZS f. Instr. 1893 Febr.-Beiheft.

96. Leitvermögen von Elektrolyten.

Über einige wässerige Salzlösungen s. Tab. 31 bis 33.

Ausführliches bei K. u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte.

Ein Cylinder von der Länge l und dem Querschnitt q aus einem Leiter vom Leitvermögen (auch wohl „spez. L.-V.") $\varkappa$ hat den Widerstand $w = 1/\varkappa \cdot l/q$.

1) Anstatt einer Quecksilbersäule von 1,063 m und 1 qmm bei 0° kann man eine 1,063 m lange Säule von 0° setzen, welche 14,4521 gr wiegt.

Wir nehmen als Einheit des L.-V. das $cm^{-1}\Theta^{-1}$, d. h. das L.-V. eines Körpers, dessen cm-Würfel den Widerstand 1 Θ hat; die bestleitenden wässerigen Säurelösungen kommen bei Blutwärme dieser Einheit nahe. Der Widerstand obigen Cylinders ist dann in Ohm ausgedrückt. Also wenn man, um ein L.-V. $\varkappa$ zu bestimmen, den Widerstand dieses Cylinders mißt und $= w\,\Theta$ findet, so ist

$$\varkappa = \frac{l}{q}\,\frac{1}{w}.$$

$1/\varkappa$ nennt man auch spezifischen Widerstand des Leiters. l/q, d. h. der Faktor, welcher mit $1/\varkappa$ multipliziert den Widerstand des cylindrischen Raumes liefert, heißt Widerstandskapazität dieses Raumes.

Jeder Raum zwischen zwei Elektroden hat in diesem Sinne eine bestimmte Widerstandskapazität, nämlich eine Zahl C, die den Widerstand zwischen den Elektroden dadurch finden läßt, daß man sie durch das Leitvermögen des ausfüllenden Leiters dividiert. Also

$$w = C/\varkappa \text{ oder } C = w\cdot\varkappa \text{ oder } \varkappa = C/w.$$

Das Leitvermögen einer Flüssigkeit wird nun so bestimmt, daß man einen Raum von bekannter Widerstandskapazität C (vgl. S. 441) mit ihr füllt und dann seinen Widerstand w ermittelt, worauf man hat

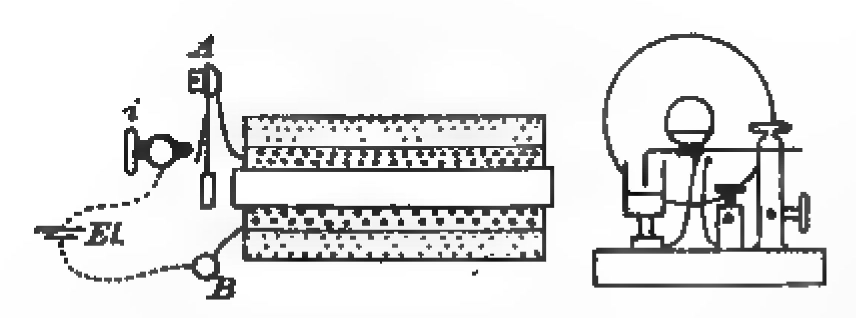
$$\varkappa = C\cdot\frac{1}{w}.$$

Da ein cm-Würfel Hg von 0° den Widerstand 1/10630 Θ hat, so ist ein nach dem früheren Gebrauch auf Quecksilber bezogenes Leitvermögen, um es auf $cm^{-1}\Theta^{-1}$ umzurechnen, mit 10630 zu multiplizieren. Unser C ist das 10000fache des in Siemens-Einheiten ausgedrückten Widerstandes einer Füllung mit Quecksilber von 0°.

Polarisation der Elektroden. Wechselströme. Jeder Strom in einem Elektrolyt ist mit Zersetzung verbunden, wobei die an den Elektroden sich abscheidenden Ionen eine elektromotorische Gegenkraft gegen den Strom, die Polarisation der Elektroden, bewirken, durch welche der Strom geschwächt, also der scheinbare Widerstand vergrößert wird.

Die Polarisation wird unmerklich bei Wechselströmen rascher Periode zwischen Elektroden von hinreichend großer Oberfläche, die, ohne große Dimensionen anzuwenden, durch einen elektrolytischen Überzug der Elektrode mit fein verteiltem Platinmohr erzielt wird; 8, 18. — Wenn der Platinmohr durch Absorption usw. stört, kann man auch wohl blanke Elektroden anwenden, zwischen denen man vor oder unter Umständen während der Messung einen Gleichstrom fließen läßt. Vgl. Wolcott, Ann. der Ph. 12, 653. 1903.

Stromerreger. Der einfachste Erreger von Wechselströmen ist ein kleiner Induktionsapparat, bestehend aus Eisenkern und einer primären Spule mit einem Neeff'schen Hammer als Unterbrecher und einer sekundären Spule, in welcher bei der Unterbrechung und Schließung des Primärkreises kurz dauernde Ströme gleicher Gesamtstärke, aber entgegengesetzter Richtung induziert werden. In der Durchschnittsfigur ist

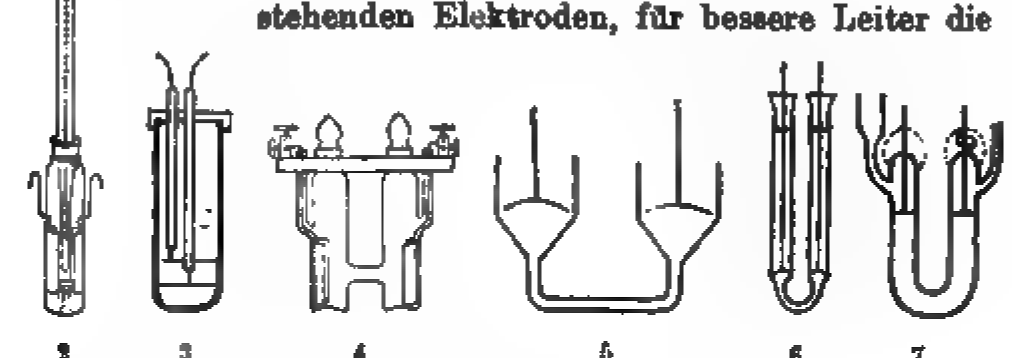


als Hammer ein Platinunterbrecher, in der Seitenansicht ein Quecksilberunterbrecher gezeichnet. Die richtige Stellung des Unterbrechers wird mit der Regulierschraube ausprobiert; das Quecksilber ist zum Schutze gegen die Verbrennung durch die Unterbrechungsfunken mit einer Schicht destillierten Wassers bedeckt, welches zeitweilig erneuert wird. Als Stromerreger dient ein Akkumulator oder ein bis zwei Daniellelemente.

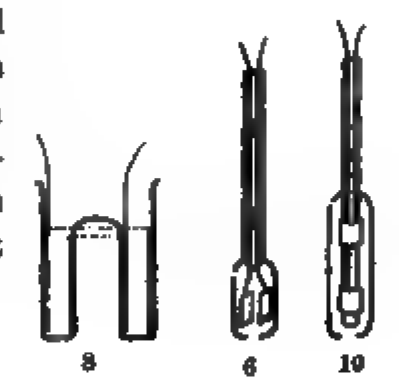
Ein richtig gebauter Unterbrecher hat, besonders wenn der Apparat auf Stückchen Kautschuk gestellt ist, einen leisen Gang. Sonst steckt man Watte in das nicht beobachtende Ohr.

Das Telephon als Stromprüfer. Vgl. 85a. Ein Galvanometer reagiert nicht auf die Wechselströme. Gebraucht wird zuweilen das Dynamometer oder der Bellati'sche Eisendraht (85, 8), meistens aber das Bell-sche Hörtelephon. Ein solches ist fest ans Ohr zu drücken; der Induktionsapparat soll in einiger Entfernung (1 m) von ihm stehen, damit der Elektromagnet nicht etwa direkt wirkt. Die gewöhnlichen, überall käuflichen gestreckten Telephone in Hartkautschukfassung genügen meistens, besonders wenn man ihre dünndrähtige Bewicklung durch eine von kleinerem Widerstande, etwa 5 bis 10 Θ, ersetzt.

Widerstandsgefäße. Für schlechte Leiter wie Wasser und verdünnte Lösungen dienen z. B. die Formen Nr. 1. 2. 3. 8 9 mit breiten, einander nahe stehenden Elektroden, für bessere Leiter die



übrigen. Die Gefäße Nr. 3 bis 8 sind in ein Bad mit Thermometer zu stellen. Die Gefahr eines Nebenschlusses durch das Bad wird bei Nr. 4 durch angeblasene Glasröhren um die Zuleitungen verhindert; Verfertiger z. B. C. Richter, Berlin. Zu beachten ist, daß nicht zu starke Ströme gebraucht werden, die durch Erwärmung das von der Temperatur stark abhängige L.-V. vergrößern.



Nr. 9 bez. 10 taucht man in schlecht bez. gut leitende Flüssigkeiten ein.

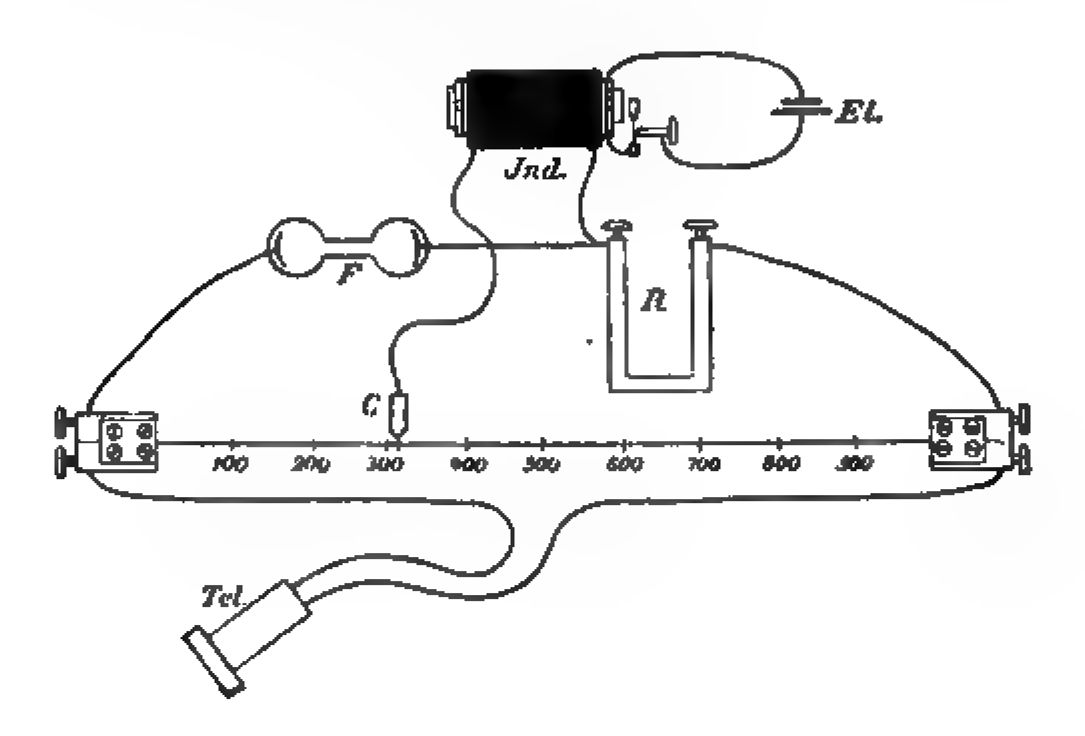
I. Die Messung.

1. Mit Wechselstrom und Telephon; F. K.

Man wendet meistens die Wheatstone-Kirchhoff'sche Drahtbrücke an (93 II); vgl. untenstehende Fig.

F ist das Elektrodengefäß mit der Flüssigkeit, *R* der Satz von bekannten Drahtwiderständen, beide mit den Enden des Meßdrahtes und andrerseits mit einander verbunden. An die letztere Verbindungsstelle kommt zugleich der eine, an den Schleifkontakt der andere Pol der sekundären Rolle des Induktoriums. Das Telephon liegt an den beiden Enden des Meßdrahtes. Vgl. hierüber die Bemerkung zur Fig. S. 423.

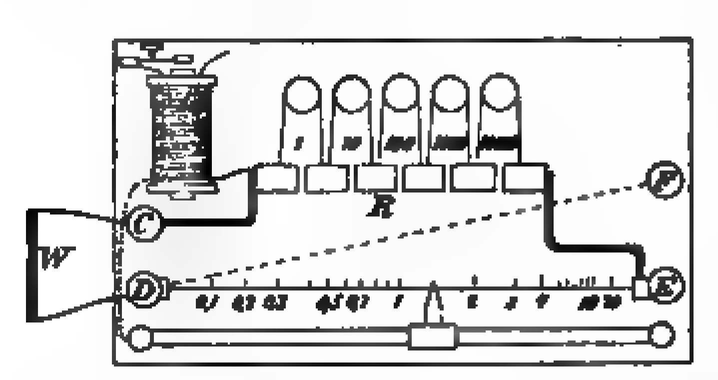
Man stellt nun den Schleifkontakt durch Ausprobieren auf den Punkt der Teilung, an welchem der Ton im Telephon verschwindet bez. sein Minimum der Stärke annimmt. Ursachen eines schlechten Minimums können in der Polarisation bestehen, ferner bei kleinen Widerständen in der Selbstinduktion schlecht gewickelter Drahtrollen, bei großen in der elektrostatischen Kapazität der Drahtrollen oder der Flüssigkeitszelle. Nebenschaltung eines kleinen Kondensators kann letzteres korrigieren. Beträge zwischen etwa 30 und einigen 1000 Θ sind durchschnittlich am besten zu messen. Man sucht also womöglich Gefäße aus, welche solche Widerstände geben. Bei Widerständen von mehreren 100000 Θ gelingt es nicht immer, die Quellen der Unschärfe genügend zu beseitigen.



Unter den Vergleichswiderständen R bevorzugt man diejenigen, welche eine von der Mitte des Meßdrahtes nicht zu weit entfernte Einstellung ergeben.

Bequemer als der gestreckte Brückendraht ist die Walzenbrücke. In Fig. S. 424 würde W das Elektrodengefäß vorstellen, P_1 das Telephon und P_2 die Stromquelle, d. h. die sekundäre Rolle des Induktoriums.

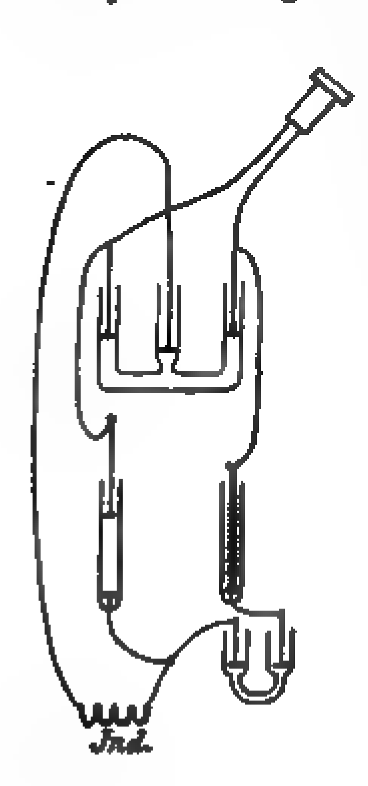
An der kleinen Brücke (Fig.) sind die zur Messung nötigen Teile vereinigt. Zwischen C und D kommt der zu bestimmende Widerstand, an E und D (ev. an E und das mit dem Drahtende D verbundene F) wird das Telephon angelegt. Die Induktionsrolle ist mit dem Schleifkontakt und mit einem Punkte zwischen C und den Rheostatenwiderständen R verbunden.



Das den Strom erregende Element kommt an zwei (nicht gezeichnete) Klemmen. Ein Umschalter an einer von diesen läßt sich so stellen, daß das Induktorium ausgeschaltet wird und gewöhnliche Widerstandsbestimmungen mit konstantem Strome gemacht werden können. Dann wird also ein Galvanometer anstatt des Telephons angelegt.

Die Teilung unter dem Meßdraht ist so ausgeführt und beziffert, daß die abgelesene Zahl gleich das Verhältnis a/b darstellt.

Anordnung von Nernst. Eine Brückenverzweigung besteht aus vier paarweise gleichen Glasröhren, gefüllt mit einer Lösung, deren Leitvermögen von der Temperatur sehr wenig abhängt: 121 gr Mannit und 41 gr Borsäure mit 0,06 gr KCl in Wasser zu 1 l gelöst; $\varkappa_{18} = 0{,}00097$. Einer von den Zweigen enthält eine längs einer Teilung verschiebbare Elektrode. Der dem Skalenteil entsprechende Widerstand dient als Einheit, auch für die Widerstandskapazität des Meßgefäßes.



Ein zu messender Flüssigkeitswiderstand, welchen man diesem Zweige hinzufügt, ist dann durch die Verschiebung der Elektrode gegeben, welche das Telephon wieder zum Schweigen bringt.

Die Anordnung ist wegen ihrer Symmetrie den Störungen des Minimums weniger ausgesetzt und eignet sich infolge dessen auch für sehr große Widerstände.

Nernst, ZSf. phys. Ch. 14, 642. 1894; M. E. Maltby, ib. 18, 133. 1895.

Optisches Telephon s. 85a; elektrometrische Methoden 180.

Über die Anwendung der sehr schnellen Schwingungen einer Funkenentladung vgl. Nernst, Wied. Ann. 60, 600. 1895; Nernst u. von Lerch, Gött. Nachr. 1904, 166.

Berechnung des Leitvermögens.

Wenn der Widerstand der Flüssigkeit in einem Gefäß von der Kapazität $C\,\mathrm{cm}^{-1}$ gleich $w\,\Theta$ gefunden wurde, so ist ihr Leitvermögen $\varkappa = C/w$.

Die Temperatur muß auf $\frac{1}{20}^\circ$ bekannt sein, wenn $\varkappa$ auf 1 Promille sicher sein soll.

Bestimmung der Widerstandskapazität C eines Gefäßes.

a) **Mittels Normalflüssigkeiten.** Geometrische Ausmessung des Raumes zwischen den Elektroden ist selten möglich. Man ermittelt deswegen C aus der Gleichung $C = \varkappa \cdot w$ durch Messung des Widerstandes $w\,\Theta$, den z. B. eine der folgenden Normalflüssigkeiten von **bekanntem** Leitvermögen $\varkappa$ in dem Gefäß ergibt:

Maximalleitende Schwefelsäure, 30%; $s_{18} = 1{,}223$.

Gesättigte Chlornatriumlösung, etwa 26%; vor dem Gebrauch hinreichend mit einem Überschuß von Salz geschüttelt.

Maximalleitende Bittersalzlösung, 17,4% $MgSO_4$; $s_{18} = 1{,}190$.

Normale Chlorkaliumlösung, d. h. 74,60 gr KCl im Liter Lösung enthaltend. — Ferner $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$ und $\frac{1}{100}$ **normale KCl-Lösung.**

Gesättigte Gipslösung mit reinem Wasser angesetzt und vor dem Gebrauch hinreichend geschüttelt. Etwas Trübung schadet nicht.

Die Leitvermögen $\varkappa$ dieser Flüssigkeiten sind (K., Holborn u. Diesselhorst, Wied. Ann 64, 440. 1898):

	H_2SO_4 max.	NaCl gesätt.	$MgSO_4$ max.	KCl normal	KCl $^1/_{10}$ norm.	KCl $^1/_{50}$ norm.	KCl $^1/_{100}$ norm.	Gips gesätt.
15°	0,7028	0,2015	0,04555	0,09254	0,01048	0,002243	0,001147	0,001742
16	,7151	,2063	4676	,09443	1072	2294	1173	1791
17	,7275	,2112	4799	,09633	1095	2345	1199	1841
18	,7398	,2161	4922	,09824	1119	2397	1225	1891
19	,7522	,2210	5046	,10016	1143	2449	1251	1940
20	,7645	,2260	5171	,10209	1167	2501	1278	1990
21	0,7768	0,2310	0,05297	0,10402	0,01191	0,002553	0,001305	0,002039

Bei den drei letzten, die für Gefäße von kleiner Kapazität dienen, kommt das L.-V. **des lösenden Wassers** in Betracht, welches **zu den abgedruckten Zahlen addiert werden muß.**

Gutes Wasser soll ein L.-V. $\varkappa \cdot 10^6 = 1$ bis 2 haben. Das beste Destillat in Luft hat 0,7. — Über die Behandlung von Wasser s. ZS f. phys. Ch. 42, 193. 1902.

b) **Durch Vergleichung mit einem Gefäß von bekannter Kapazität.** Man schaltet das unbekannte und das bekannte Gefäß mit derselben Flüssigkeit gefüllt und in demselben Bade stehend, wie F und R (Fig. S. 439) ein. Das Widerstandsverhältnis gibt dann das Verhältnis der beiden Kapazitäten. Lösungen von $KHSO_4$ oder für kleinere Kapazitäten solche von Mannit und Borsäure (S. 440) sind wegen des geringen Temperatureinflusses zweckmäßig.

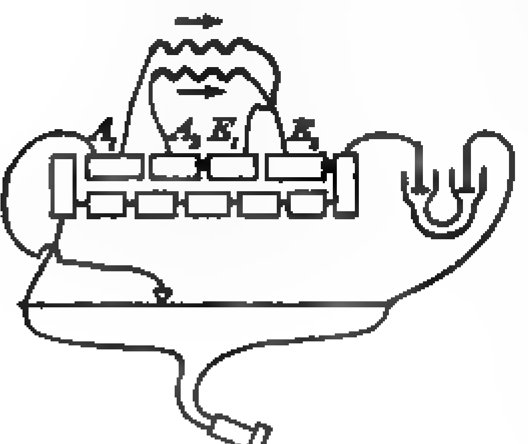
Über genaue Messungen, besonders auch an verdünnten Lösungen, vgl. F. K. u. Maltby, Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. III, 157. 1900.

Bestimmung des Leitvermögens mit einem Gefäß von meßbar veränderlicher Kapazität.

Eine U-förmige Röhre von $\frac{1}{2}$ bis 1 cm² Querschnitt hat verschiebbare, gut platinierte Elektroden (8, 18). Sie ist nach Kapazität geteilt, d. h. wenn die linke Elektrode auf dem Teilstrich c_l, die rechte zugleich auf c_r steht, so ist $C = c_l + c_r$ zu setzen. Für eine genauere Messung hängt man das Rohr in ein Bad mit Thermometer.

Eine Drahtbrücke ist überflüssig, es genügt z. B. die Wheatstone'sche Verzweigung mit gleichen Widerstandspaaren (93) oder ein Differentialinduktor (folg. S.). Als Vergleichswiderstand nimmt man einen passenden Widerstand R von runder Zahl (50 100 200 1000 Θ), stellt die linke Elektrode auf c_l und sucht an der rechten die Stellung c_r, bei welcher der Ton verschwindet. Wird $c_l + c_r = C$ gesetzt, so gibt $\varkappa = C : R$ das Leitvermögen, also wenn R eine runde Zahl ist, ohne große Rechnung.

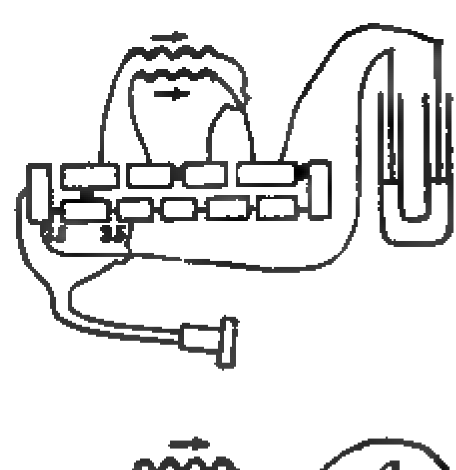
Universalinduktor mit Rheostat. Die sekundäre Rolle des Induktoriums besteht aus zwei gleichen Windungslagen. Zugefügt sind Stöpselklötze, welche erstens Vergleichswiderstände einzuschalten gestatten und zweitens zu den folgenden Schaltungen dienen.



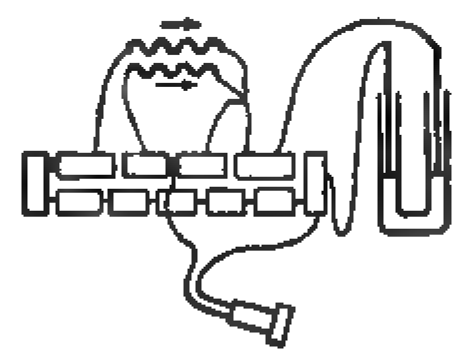
1. Die nebenstehende Figur gibt die ohne weiteres verständliche Schaltung mit einer **Drahtbrücke**. Sämtliche Widerstände sind als Meßwiderstände zu verwenden.

2. **Verwendung als Brücke mit gleichen Widerstandspaaren.** Die

beiden 25er sind hierzu in Anspruch genommen. An ihnen liegt, wie an den Verzweigungswiderständen a und b in Fig. S. 420, das Telephon; ferner einerseits der Rheostat, andrerseits das Elektrodengefäß.



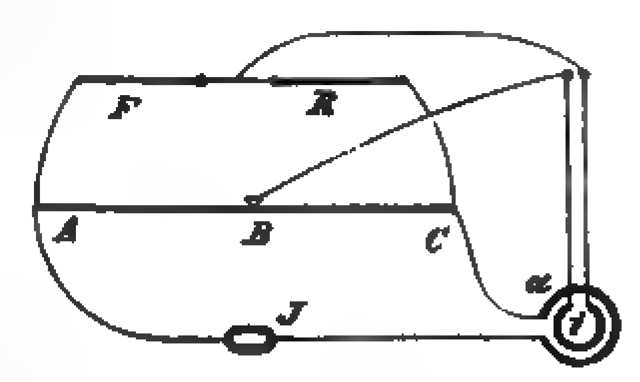
3. Verwendung als Differentialinduktor. Die beiden Lagen der Induktionsrolle sind nicht wie in den anderen Fällen einfach als Ganzes hintereinander geschaltet, sondern so, daß ihre Ströme das Telephon in entgegengesetzter Richtung durchfließen, also es nicht erregen, sobald sie gleiche Stärke haben.



Bei Nr. 2 und 3 zieht man Widerstand R von passender Größe, verschiebt die Elektroden, bis der Ton verschwindet und liest c_l und c_r ab; vgl. vor. S.

2. Bestimmung mit Wechselstrom und Elektrodynamometer.

Man schaltet in die Brücke nicht das ganze Dynamometer ein, weil dann die Stromstärke Null nicht scharf zu erkennen ist, sondern man leitet durch die eine Dynamometerrolle den ungeteilten Strom des Induktors und schaltet nur die andere Rolle in die Brücke.



J bedeutet den Erzeuger der Wechselströme, a die äußere, i die innere Rolle des Dynamometers, F den Flüssigkeitswiderstand, R den Rheostatenwiderstand, je nach Bedürfnis zwischen 10 und 1000 Θ. Die Strecke ABC soll die Verzweigungswiderstände bedeuten, entweder einen Draht mit Schleifkontakt oder zwei konstante Widerstände (vgl. 84 u. 98).

3. Bestimmung mit Gleichstrom.

a) Die Polarisation wird durch Differenzbestimmung mit konstanter Stromstärke eliminiert, indem man mittels Elektrodenverschiebung (Fig. S. 442) verschieden lange Säulen einschaltet. Da die Polarisation nur bei größerer Stromdichte an den Elektroden konstant ist und da meist Gas entwickelt wird, so nimmt man ein Drahtnetz oder einen spiraligen Draht als Elektrode.

Die Wheatstone'sche Brücke oder die Substitution dient für die Widerstandsbestimmung.

b) Sehr schlechte Leiter. Für sehr schlecht leitende

Flüssigkeiten, z. B. auch ganz reines Wasser, wenn der zu messende Widerstand mindestens einige Hunderttausend Ohm erreicht, kann der Gleichstrom Vorteile bieten. Man wählt etwa gewöhnliche Brückenschaltung, eine Säule von hoher Spannung und schließt den Strom ganz kurz. Die Polarisation entwickelt sich bei der geringen Stromstärke hinreichend langsam, daß sie dann meistens zu vernachlässigen ist. — Besser leitende Flüssigkeiten kann man mit Gefäßen von sehr großer Widerstandskapazität ebenso untersuchen, indessen werden die Unbequemlichkeiten die Vorteile überwiegen.

Längerer Stromschluß kann, wenn in der Flüssigkeit nur wenige leitende Bestandteile gelöst sind, durch deren elektrolytische Verschiebung auch den Widerstand erheblich ändern, ihn sowohl durch Bildung von Hydroxyden und Säuren aus Salzen verkleinern, wie durch Hinaustreiben leitender Bestandteile vergrößern. — Auf dem letzteren Wege lassen sich manche Flüssigkeiten reinigen.

F. K. u. Heydweiller, Wied. Ann. 53, 219. 1894; 54, 385. 1895; Warburg ib, 54, 396.

Temperaturkoeffizient.

Das Leitvermögen eines Elektrolytes pflegt mit wachsender Temperatur stark zuzunehmen, und zwar für eine mäßige Temperaturänderung in der Regel dieser Änderung nahe proportional. Die relative Änderung $\mathfrak{c}$ des L.-V. auf 1° heißt Temperaturkoeffizient des L.-V. Es gilt also, wenn $\varkappa_1$ und $\varkappa_2$ den Temperaturen t_1 und t_2 entsprechen,

$$\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{\varkappa}=\mathfrak{c}(t_2-t_1) \quad \text{oder} \quad \mathfrak{c}=\frac{1}{\varkappa}\frac{\varkappa_2-\varkappa_1}{t_2-t_1}.$$

Als Temperatur des $\varkappa$, in dessen Bruchteilen sich $\mathfrak{c}$ ausdrücken soll, wird man je nach dem Zweck t_1 oder $\frac{1}{2}(t_1+t_2)$ oder auch 0° oder 18° wählen.

II. Äquivalentleitvermögen und Ionenbeweglichkeit in Lösungen (F. K.). Elektrolytische Dissoziation (Arrhenius).

Äquivalentleitvermögen Λ. So nennt man das Leitvermögen $\varkappa$, geteilt durch die Äquivalent-Konzentration η der Lösung; η ist gleich der in der Volumeinheit der Lösung enthaltenen Masse, dividiert durch das Äquivalentgewicht des Elektrolytes zu setzen. Die gewöhnliche Definition rechnet die Konzentration, häufig unter der Bezeichnung m, nach gr-Äqu./Liter $v=1/m$ ist die „Verdünnung" in Liter/gr-Äqu. — Wegen der theoretischen Beziehungen ist das 1000mal kleinere gr-Äqu./cm³ hier

vorzuziehen, so daß eine gewöhnlich sog. „Normallösung" von 1 gr-Äqu./Lit. (Tab. 3b) dann die Äqu.-Konzentration $\eta = 0{,}001$ hat. Wir setzen also in $\Lambda = \varkappa/\eta$ die Messung von η in gr-Äqu./cm³ voraus. S. Tab. 32.

Beweglichkeit der Ionen. Ein Äquivalent-L.-V. ist die Summe der „Beweglichkeiten" l_K und l_A des Kations und des Anions, also $\Lambda = l_K + l_A$. Einzeln ergeben sich diese Größen aus Λ und der durch Elektrolyse gemessenen relativen Ionen-Geschwindigkeit (Hittorf), gewöhnlich angegeben als das Überführverhältnis $\mathfrak{n}$ des Anions, so daß $\mathfrak{n} = l_A/(l_K + l_A)$. Hiernach kommt

$$l_K = (1 - \mathfrak{n})\Lambda \quad \text{und} \quad l_A = \mathfrak{n}\Lambda.$$

Die in cm/sek ausgedrückten mittleren Geschwindigkeiten U und V beider Ionen für das Normalgefälle der Spannung von 1 V/cm leiten sich folgendermaßen ab. Ein cm-Würfel hat den Widerstand $1/\varkappa\,\Omega$; 1 V erzeugt hierin also den Strom $\varkappa$ A. Der Strom 1 A scheidet 0,00001036 gr-Äqu./sek aus (S. 402), der obige Strom also $0{,}00001036\varkappa$ gr-Äqu./sek. Nun enthält 1 cm³ Lösung η gr-Äqu. Sollen $0{,}00001036\,\varkappa$ von diesen in 1 sek an den Endflächen frei werden, so ist die mittlere gegenseitige Geschwindigkeit der Ionen in cm/sek

$$U + V = 0{,}00001036\,\varkappa/\eta \quad \text{oder} \quad = 0{,}00001036\,\Lambda,$$

einzeln also $U = (1 - \mathfrak{n}) \cdot 0{,}00001036\,\Lambda$, $\quad V = \mathfrak{n} \cdot 0{,}00001036\,\Lambda$.

Über $\mathfrak{n}$ vgl. z. B. K. u. Holborn l. c. Tab. 9.

Die Beweglichkeiten nehmen mit wachsender Konzentration ab. Tab. 33 gibt die Größen für einige Ionen bei dem Grenzzustand äußerster Verdünnung, so gut sie bekannt sind. Die Zahlen für H, OH und für mehrwertige Ionen sind weniger sicher

Elektrolytische Dissoziation. Unter der Annahme, daß nur dissoziierte Moleküle leiten, und zwar mit einem konstanten elektrolytischen Reibungskoeffizienten, und daß in unendlicher Verdünnung die Dissoziation vollständig erfolgt ist, erhält man den Dissoziationsgrad der Lösung eines binären Elektrolytes $\mathfrak{a} = \Lambda/\Lambda_0$, wenn Λ_0 das Äquivalent-Leitvermögen in unendlicher Verdünnung ist. $\mathfrak{a} \cdot \eta$ gibt dann die Konzentration der „freien Ionen".

Schlechte Leiter, wie die schwachen Säuren oder Basen in Lösung, sind hiernach schwach dissoziierte Elektrolyte. Für solche gilt bis zu mäßiger Konzentration η die Beziehung (Ostwald)

$$\frac{\mathfrak{a}^2}{1 - \mathfrak{a}} = \frac{c}{\eta} \quad \text{oder} \quad \frac{\Lambda^2}{\Lambda_0 - \Lambda} = \frac{C}{\eta},$$

wo c die betr. Dissoziationskonstante und $C = c \cdot \Lambda_0$ ist.

Auf die meisten gut leitenden Salze anwendbar erscheint der an eine Formel von Rudolphi angeschlossene Ausdruck

$$\frac{\Lambda_0 - \Lambda}{\Lambda^p} = B \cdot \eta^{1/3}, \quad \text{wonach} \quad \frac{1 - \mathfrak{a}}{\mathfrak{a}^p} = b \cdot \eta^{1/3}.$$

F. K., Sitz.-Ber. d. Berl. Akad. 1900, 1002.

96a. Konzentration einer Lösung aus ihrem Leitvermögen. Löslichkeit.

1. Sehr verdünnte Lösungen. Löslichkeit schwer löslicher Elektrolyte.

1 mg eines Salzes in 1 Liter Wasser gelöst bewirkt eine Erhöhung des Leitvermögens von der Ordnung 10^{-6}, so daß selbst Körper wie Chlorsilber oder Bariumsulfat eine gut meßbare Vermehrung ergeben.

Tab. 33 gibt die auf $cm^{-1} \Theta^{-1}$ bezogenen Beweglichkeiten l_K und l_A von Ionen in äußerst verdünnter wässeriger Lösung bei 18°. Hat man nun das Leitvermögen der gesättigten Lösung bei 18° um $\varkappa$ größer gefunden als das L.-V. des lösenden Wassers, so berechnet man die in 1 ccm gelösten gr-Äquivalente als $\eta = \varkappa/(l_K + l_A)$. Ist A das Äquivalentgewicht des gelösten Körpers, so gibt dann $A \cdot \eta$ oder $A \cdot \varkappa/(l_K + l_A)$ die Konzentration in gr/cm^3 und $1000 A \cdot \varkappa/(l_K + l_A)$ in gr/Liter. — Bei stärkeren Lösungen ist die Abnahme von Λ mit wachsender Konzentration zu berücksichtigen.

Man wässert den gepulverten Körper aus, trocknet und zerreibt ihn noch einmal im Achatmörser, bringt ihn in das Gefäß Nr. 2 S. 438, gießt vorsichtig Wasser von bekanntem Leitvermögen auf, schüttelt, und bestimmt das Leitvermögen abermals. Meistens wird wegen der Verunreinigungen noch einmal oder mehrere Male von dem Pulver abgegossen und Wasser aufgegossen werden müssen, bis konstante Leitvermögen entstehen.

Beispiel: $BaSO_4$; $l_K = 56$, $l_A = 68$, also $\Lambda = l_K + l_A = 124$ Gefunden wurde $\varkappa_{18} = 2{,}4 \cdot 10^{-6}$, also $\eta = 2{,}4 \cdot 10^{-6}/124 = 0{,}019 \cdot 10^{-6}$ gr-Äqu./cm^3 $= 0{,}000019$ gr-Äqu./Liter — Äqu.-Gew $\frac{1}{2}Ba = 68{,}7$, $\frac{1}{2}SO_4 = 48{,}0$ also $A = 116{,}7$, woraus der Gewichtsgehalt $= 116{,}7 \cdot 0{,}000019 = 0{,}0022$ gr/Liter.

Nur bei Anwendung sehr reinen Wassers (8, 2) und bei neutralen Salzen ist für so verdünnte Lösungen das Verfahren gestattet.

Nähere Anweisung bei K. u. Holborn l. c. S. 129 ff.

Über Löslichkeitsbestimmungen durch Spannungsmessung s. 104.

2. Stärkere Lösungen. Man geht mit dem beobachteten L.-V. in Tab. 31 oder in K. u. Holborn, Tab. 1 u. 2 ein. Zweideutigkeiten, die etwa aus einem Maximum des L.-V. entspringen, sind besonders zu berücksichtigen.

Über die Bestimmung stärkerer Löslichkeiten auf chemischem Wege vgl. Ostwald, phys.-chem. Methoden S. 202.

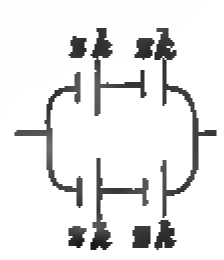
97. Widerstand galvanischer Elemente.

Die Methoden 1 und 2 setzen sehr konstante Säulen von nicht zu kleinem Widerstande voraus, wenn sie brauchbare Ergebnisse liefern sollen. 3 und 4 sind in der Ausführung nicht einfach. 5 ist einfacher und meistens genauer. Allgemein anzuwenden, freilich bekannte Kondensatorkapazitäten voraussetzend, ist Nr. 6.

Mittels des eigenen Stromes.

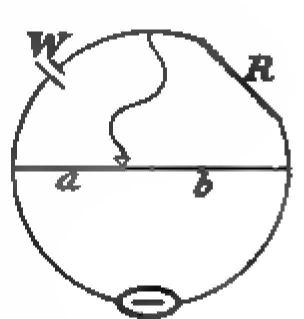
1. In gewöhnlicher Schaltung. Man bewirkt mit dem Element oder der Batterie, nötigenfalls mit Widerstandsballast an einem Strommesser einen passenden Ausschlag; die Stromstärke sei J. Durch Zuschaltung von Rheostatenwiderstand R entstehe die ungefähr halb so große Stromstärke i. Dann hatte der Stromkreis bei der ersten Beobachtung den Widerstand $W = Ri/(J-i)$, von dem man den Galvanometerwiderstand sowie ev. den konstanten Ballast abzieht.

2. Durch Paar- und Einzelschaltung. Eine gerade Anzahl gleicher Elemente wird erstens in Hinterschaltung, zweitens in paarweiser Nebenschaltung (Fig) durch denselben Stromzeiger und je soviel Rheostatenwiderstand R_1 bez. R_2 geschlossen, daß dieselbe Nadelstellung entsteht. Dann betrug der Batteriewiderstand bei der Hinterschaltung $4R_2 - 2R_1$.



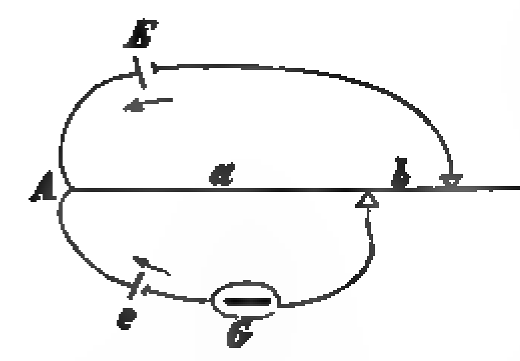
Durch momentanen Stromschluß.

3. In der Wheatstone'schen Brücke (Mance). Bei W ist das Element, bei R ein Rheostatenwiderstand eingeschaltet. Man sucht die Stellung, bei der das abgelenkte Galvanometer in Ruhe bleibt, wenn man den Kontakt momentan schließt; dann ist der Widerstand des Elements $W = R \cdot a/b$. Durch einen konstant genäherten Magnet kann man die Galvanoskopnadel in der Nähe der Ruhelage halten.



Man mißt hier einwandfrei den Widerstand des geschlossenen Elementes.

4. Kompensationsverfahren (v. Waltenhofen; Beetz). ab ist ein dünner Draht von bekanntem Widerstand mit zwei Gleitkontakten oder ein Rheostat mit zwei Abzweigungen. Der Widerstand W von E soll bestimmt werden. e ist eine schwächere konstante Hilfssäule.



Das Galvanoskop G sei stromlos bei den Abzweigungswiderständen a und b und ebenso bei a' und b'. Dann ist einschließlich der Zuleitungen $W = (a'b - ab')/(a - a')$.

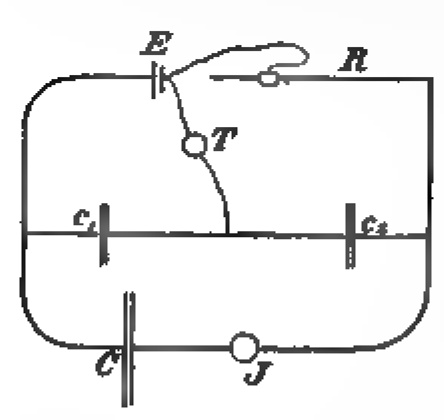
Beweis. Der Kreis $AabE$ habe den Strom i. Es ist (80 I B) $E = (W + a + b)i$; ferner $e = ai$, also $E/e = 1 + (W + b)/a$. Ebenso $E/e = 1 + (W + b')/a'$; also $(W + b')/a' = (W + b)/a$, woraus obiges folgt.

Gibt keine Stellung den Strom Null, so muß der disponible Widerstand vermehrt oder ein schwächeres e genommen werden.

Durch Wechselströme.

5. Am einfachsten ist die Messung mit dem **Telephon** nach 96. Elemente von nicht zu kleinem Widerstande verhalten sich den Wechselströmen gegenüber ähnlich wie gewöhnliche Leiter. Liegen mehrere gleiche Elemente vor, so schaltet man sie gegen einander.

6. **Verfahren mit Kondensatoren** (Nernst und Haagn). Indem man ein Widerstandsverhältnis auf das Verhältnis zweier Kondensator-Kapazitäten zurückführt und zugleich vor das Induktorium einen großen Kondensator einschiebt, der wohl die Induktionsschwingungen überträgt, aber keinen Gleichstrom zustande kommen läßt, werden Dauerströme überall vermieden.



J ist das Induktorium, C der übertragende Kondensator (belegtes Guttaperchapapier). Die Kondensatoren in den Brückenzweigen haben Kapazitäten c_1 und c_2 von bekanntem Verhältnis (132). E ist das Element, dessen Widerstand w gemessen werden soll, R ein meßbar veränderlicher Widerstand, z. B. ausgespannter Draht mit widerstandsfreiem Kontakt. Schweigt das Telephon T, so ist

$$w : R = c_2 : c_1 .$$

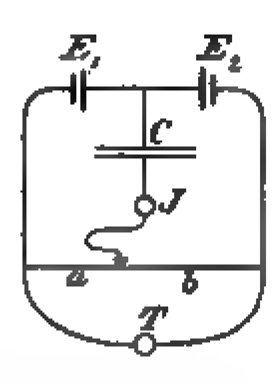
c_1/c_2 kann man in derselben Anordnung bestimmen, sobald man E durch einen bekannten Widerstand ersetzt (132 II 3).

Nernst und Haagn, ZS f. Elektroch. 2, 493. 1896; eine Untersuchung von Elementen und Kritik der sonstigen Verfahren auch bei Haagn, ZS f. phys. Ch. 23, 97. 1897.

Verbindet man in obiger Verzweigung so wie nebenstehend, so braucht der Kontakt

nicht widerstandsfrei zu sein. Es ist dann $(w+R_1):R_2=c_2:c_1$ (Dolezalek u. Gahl).

Endlich kann man Widerstände w_1 und w_2 zweier Elemente E_1 und E_2 von gleicher el. Kraft stromfrei mittels $w_1:w_2=a:b$ in der Brückenverzweigung der Figur mit einander vergleichen.



98. Widerstand eines Galvanometers.

Der Widerstand γ eines Multiplikators läßt sich wie jeder andere nach 90 bis 93 bestimmen. Im folgenden wird die eigene Nadel benutzt. Nr. I wird selten genau ausführbar sein.

I. Direkter Schluß.

Ein konstantes Element von bekanntem, tunlichst kleinem Widerstande w_0 (großer Daniell, Akkumulator) wird durch das Galvanometer geschlossen, wenn nötig unter Einschaltung eines bekannten Widerstandsballastes R_0. Die Stromstärke sei J_0. Man bringe durch Zuschaltung von Rheostatenwiderstand R den Strom auf etwa die halbe Stärke i. Dann ist $\gamma=Ri/(J_0-i)-w_0-R_0$.

Denn es ist $(\gamma+w_0+R_0)J_0=(\gamma+w_0+R_0+R)i$.

II. Bestimmung durch Stromabzweigung.

Dadurch daß man einen Strom durch einen Rheostaten schickt, das Galvanometer in zwei verschiedenen Weisen an diesen Strom anschließt und die Ausschläge mißt, erhält man zwei Gleichungen, aus denen γ abgeleitet wird. Man kann, besonders bei empfindlichen Galvanometern, mit schwachen, unter Umständen auch wenig verschiedenen Strömen arbeiten, so daß die Konstanz der Säule gewahrt bleibt.

Ein Element oder eine Batterie von bekanntem Widerstande sei geschlossen durch eine Leitung, die sich in zwei Zweige teilt, von denen der eine aus dem Galvanometer γ, der andere aus einem bekannten Widerstande z bestehe. z sei von γ womöglich nicht sehr verschieden.

W sei der Gesamtwiderstand des unverzweigten Teiles der Leitung, also einschließlich des Widerstandes des Elements. Es ist vorteilhaft, W groß wählen zu können.

i sei die Stromstärke im Galvanometer (vgl. 83, 85; es genügen relative Messungen), wenn die Widerstände W, z und γ sind.

Allgemeiner Fall. Es werde W in W', z in z' verwandelt und zu γ ein Widerstand w zugeschaltet; dadurch entstehe die Stromstärke i' in γ. Dann ist

$$\gamma = \frac{i'[w(W'+z')/z' + W'] - iW}{i(W+z)/z - i'(W'+z')/z'}.$$

Denn es ist $i = \dfrac{Ez}{\gamma(W+z)+Wz}$; $i' = \dfrac{Ez'}{(\gamma+w)(W'+z')+W'z'}$ (S. 375).

Aus dieser allgemeinen Formel ergeben sich leicht die folgenden Methoden. Die nebengesetzten Figuren zeigen an, wie man die Anordnung mit einem Rheostaten RR treffen kann, wenn man einige Stöpsel mit Klemmschrauben besitzt. Besonders Nr. 3, 4 und 7 werden sich leicht ausführen lassen.

Einzelne Fälle für den Gebrauch.

1. Man lasse W und z ungeändert, schalte aber in den Galvanometerzweig γ noch einen von γ nicht sehr verschiedenen Widerstand w. Die Stromstärke sei nunmehr $= i'$. Über i, W, z siehe oben. Dann ist

$$\gamma = \frac{i'[w(1/z+1/W)+1] - i}{(i-i')(1/z+1/W)}.$$

Ist W sehr groß gegen z, so hat man $\gamma = w\dfrac{i'}{i-i'} - z$.

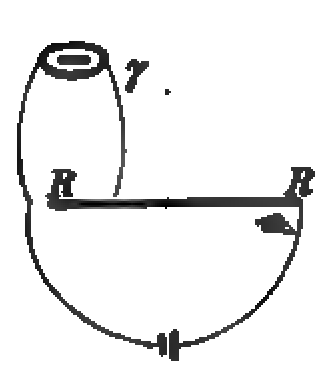
2. Man läßt bei dem zweiten Versuche W und den Galvanometerzweig ungeändert ($w=0$), verwandelt aber z in den beträchtlich größeren Wert z', wodurch in γ die Stromstärke i' entstehe. Es ist

$$\gamma = \frac{i'-i}{i(1/z+1/W) - i'(1/z'+1/W)}.$$

Für großes W entsteht $\gamma = \dfrac{i'-i}{i/z - i'/z'}$.

3. Bei dem zweiten Versuche werde W in W' verwandelt und durch das Galvanometer der ganze Strom i' geleitet (d. h. $w=0$ und $z'=\infty$). Dann ist

$$\gamma = \frac{i'W' - iW}{i(W+z)/z - i'}.$$



Ist der Widerstand des ungeteilten Bogens bei beiden Versuchen der nämliche geblieben ($W' = W$), so gilt

$$\gamma = \frac{i'-i}{i(1/z+1/W) - i'/W}$$

und wenn W sehr groß ist, $\gamma = z(i'-i)/i$.

Im allgemeinen wird es günstig sein, wenn die eine Stromstärke etwa halb so groß ist wie die andere. — Die Anwendung eines Kommutators am Element ist zweckmäßig.

Besonders auf Spiegelgalvanometer von nicht zu großem Widerstande, bei denen die gewöhnlichen Methoden versagen, sind die Methoden 1 bis 3 anwendbar.

Abzweigung mit gleicher Stromstärke.

Um die Methoden auch auf ein Galvanoskop anwenden zu können, welches keine eigentliche Messung erlaubt, reguliere man die Widerstände bei dem zweiten Versuche so, daß die beiden Stromstärken **gleich** sind ($i' = i$).

Dann gilt allgemein (s. oben): $\gamma = z \dfrac{w(W'+z') + z'(W'-W)}{Wz' - W'z}$.

Man hat zwischen folgenden Methoden die Wahl.

4. Der Widerstand W der unverzweigten Leitung bleibe konstant ($W' = W$). Man füge zu dem Galvanometerzweig γ noch einen Widerstand w, der die Stromstärke erheblich (etwa auf die Hälfte) sinken läßt. Alsdann vergrößere man z in z', bis die frühere Stromstärke entsteht. Dann ist

$$\gamma = \frac{wz}{z'-z}\left(1 + \frac{z'}{W}\right)$$

und für sehr großes W einfach $\gamma = wz/(z'-z)$.

Bei der Ausführung nach der Figur zu Nr. 1 hat man nötigenfalls die Widerstände, welche den Strom i' genau $= i$ machen, aus zwei benachbarten Widerständen und Stromstärken zu interpolieren (5).

5. Man lasse z ungeändert, schalte w zu γ und vermindere W in W', bis die alte Stromstärke erreicht ist. Man hat

$$\gamma = w \frac{W'+z}{W-W'} - z.$$

6. Man läßt den Galvanometerzweig bei beiden Beobachtungen ungeändert ($w = 0$). Wenn z und W dieselbe Stromstärke geben wie z' und W' (vgl. Fig. zu Nr. 2), so ist

$$\gamma = \frac{W - W'}{W'/z' - W/z}.$$

7. Mit dem Widerstande W der Hauptleitung und dem Zweigwiderstande z (Fig. bei 2) gebe das Galvanometer den-

selben Ausschlag wie mit dem größeren Widerstande W' ohne Abzweigung (also $w=0$, $z'=\infty$, Fig. bei 3). Dann ist

$$\gamma = z(W' - W)/W.$$

III. Bestimmung in der Wheatstone'schen Brücke (Thomson).

Das Galvanometer kommt in einen der vier Brückenzweige. Als Brücke genügt ein Verbindungsdraht mit Unterbrecher. Wenn der Ausschlag sich bei Schließung und Öffnung der Brücke nicht ändert, so stehen die Widerstandspaare in Proportion. Zu große Ausschläge kann man durch einen genäherten Magnet vermindern. In der Ausführung kostet das Ausprobieren der Proportion einige Zeit.

IV. Durch Dämpfung.

Nach **94**. Wenn die log. Dekremente des Galvanometers sind: λ_0 kurz geschlossen, λ durch einen bekannten Widerstand R geschlossen, λ' unterbrochen, so ist der Galvanometerwiderstand $= R(\lambda - \lambda')/(\lambda_0 - \lambda)$. Das Verfahren ist anwendbar auf alle Spiegelinstrumente, die nicht schon im offenen Zustande eine zu große Dämpfung haben. Bei raschen Schwingungen überspringt man zwischen den Beobachtungen eine gerade Anzahl von Umkehrpunkten.

99. Vergleichung elektromotorischer Kräfte oder Spannungen.

Über Gebrauchselemente vgl. **80** II.

Inkonstanz der Elemente. Im ungebrauchten, stromlosen Zustande ist die el. Kraft eines Elementes eine durch seine Zusammensetzung definierte Größe; mit wachsender Stromstärke verringert sich aber im allgemeinen die el. Kraft wegen der mit der Stromdichte an den Elektroden zunehmenden Polarisation. Die zum nachherigen Depolarisieren nötige Zeit ist verschieden, unter Umständen beträchtlich.

Nahe konstant verhalten sich bei mäßiger Stromstärke das Daniell- und Bunsen-Element mit starker Kupfer- und Chromsäurelösung bez. Salpetersäure, sowie der gut geladene Akkumulator; selbstverständlich um so vollkommener, je größer die Polplatten sind und je rascher sich elektrolytische Änderungen an diesen ausgleichen können. Die Zink- und Cadmium-Normalelemente dagegen vertragen, ohne sich zu ändern, nur geringe Stromstärken. — „Inkonstante" Elemente, zu denen fast alle Kombinationen zweier Metallplatten in einer Flüssigkeit gehören, auch die Gebrauchselemente vom Typus Smee und Leclanché, zeigen mit starkem Strome eine viel schwächere el. Kr. als stromlos oder mit ganz schwachem Strome.

Verkleinerung einer Spannung in bekanntem Verhältnis. Sehr ungleiche el. Kräfte direkt zu vergleichen ist oft unmöglich und mindestens ungenau. Man verkleinert eine el. Kraft auf einen bekannten Bruchteil, indem man sie durch einen Rheostatenwiderstand R schließt und von einem Widerstand r dieses Kreises abzweigt. $r/(R+r)$ gibt den Bruchteil, wenn r der Widerstand des Elements, der gegen R oft zu vernachlässigen ist. Vorteilhaft wählt man den Teil so, daß er der anderen el. Kr. nahe kommt. — Eine Anwendung s. unter 2.

Vergleichung in gewöhnlicher Schaltung.

1. Vergleichung mittels des Rheostaten.

Es wird das eine Element e_1 durch einen Rheostaten und einen Stromzeiger geschlossen und durch Ziehen von Widerstand ein passender Nadelausschlag auf irgend einen runden Teilstrich bewirkt. Dann ersetzt man e_1 durch das andere Element e_2 und bewirkt mit dem Rheostaten denselben Ausschlag. Der Gesamtwiderstand sei im ersten Falle $=w_1$, im zweiten $=w_2$. Dann verhalten sich die Spannungen

$$e_1:e_2=w_1:w_2.$$

w_1 und w_2 enthalten außer dem Rheostatenwiderstand den des Stromzeigers und des Elementes. Nimmt man aber den ersteren groß gegen die übrigen Teile, was durch einen empfindlichen Stromzeiger immer ermöglicht wird, so kann man die letzteren vernachlässigen, oder es genügt für sie eine Schätzung.

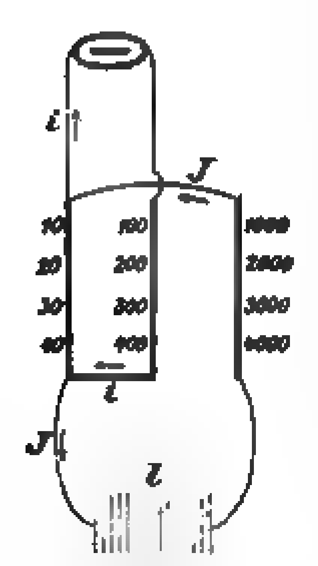
2. Vergleichung mittels eines Strommessers.

Man schließt erst das eine, dann das andere Element durch einen empfindlichen Strommesser unter Vorschaltung eines und desselben Widerstandes. Der Widerstand der Elemente sei gegen die anderen Widerstände zu vernachlässigen. Beobachtet man die Stromstärken i_1 und i_2, so verhält sich $e_1:e_2=i_1:i_2$. Andernfalls hat man, mit w_1 und w_2 die jeweiligen Gesamtwiderstände bezeichnet, $e_1:e_2=i_1w_1:i_2w_2$.

Die Widerstände fallen heraus, wenn beide Elemente zusammen, einmal gleichgerichtet (Strom J), dann entgegengerichtet (Strom i) in denselben Stromkreis geschaltet werden. Man hat dann das Verhältnis des stärkeren zum schwächeren Element $e_1:e_2=(J+i):(J-i)$. Doch darf der Strom i, der das schwächere Element verkehrt durchfließt, in einem nicht umkehrbaren Element, z. B. mit Zink in Schwefelsäure (Daniell oder Bunsen), nur verschwindend schwach sein, wozu in diesem Falle demnach ein sehr

großer Widerstand, also ein sehr empfindliches Galvanometer gehört. Auch dann schließe man tunlichst kurze Zeit.

Beispiel: Vergleichung der Spannung (e_l) einer Gleichstromlichtleitung von angeblich 110 V mit der eines Akkumulators (e_a). e_l wird, wie eingangs angegeben, abgeschwächt gemessen. — Der Stromwärme wegen **schließt man nur kurze Zeit.** — Die Skizze zeigt eine Anordnung, wie sie mit einem einzigen Rheostaten mit trennbaren Dekaden (z. B. mit dem technischen Rheostaten von Hartmann u. Braun) getroffen werden kann. — Die Lichtleitung l ist durch die Tausender- und Zehnerdekade geschlossen (Fig.); in diesem Kreise seien 5000 + 100 Θ gezogen und an die 100 Θ ein Spiegelgalvanometer von 25 Θ mit 1000 Θ Ballast angelegt. Der Ausschlag war = 88,4. — Der Akkumulator gab direkt mit 1000 Θ Ballast an demselben Galvanometer den Ausschlag 91,1.



Ohne Rücksicht auf Korrektionen rechnet man

$$e_l : e_a = \frac{5100}{100} \cdot (1025 + 100) \cdot 88{,}4 : (1025 \cdot 91{,}1) = 54{,}32.$$

Den genauern Ansatz liefern die Kirchhoff'schen Gleichungen (S. 375), nämlich

aus dem Kreise ohne el. Kraft 100, 25, 1000 Θ mit den Stromstärken $J - i$, $-i$, $-i$ } $0 = 100(J - i) - 1025\,i$ oder $0 = 100\,J - 1125\,i$; 1.

aus dem Kreise mit der el. Kr. e_l 5000, 25, 1000 Θ mit den Stromstärken J, i, i } $e_l = 5000\,J + 1025\,i$ 2.

Aus Gl. 1 u. 2 wird gefunden $e_l = 57275\,i = 57275 \cdot 88{,}4 = 5063000$.

Für den Akkumulator gilt $e_a = 1025\,i_a = 1025 \cdot 91{,}1 = 93380$.

Also $e_l : e_a = 5063000 : 93380 = 54{,}22$.

Die Widerstände der Lichtleitung und des Akkumulators sind vernachlässigt und für i ist einfach der Galvanometerausschlag genommen.

Setzt man die el. Kraft des Akkumulators $e_a = 2{,}01$ V, so wird die Spannung der Lichtleitung $e_l = 109{,}2$ V nach der genäherten und 109,0 V nach der genaueren Berechnung.

Kompensationsverfahren.

Die Anwendung des Kompensationsapparats s. in **103**.

Von einem inkonstanten Element kann man die volle Spannung dadurch bestimmen, daß man es durch Kompensation stromlos macht. Die genaue Kompensation ist oft zeitraubend, weil das Element beim Ausprobieren Strom bekommt, dessen Einfluß auf die Spannung eine Zeitlang nachwirkt. Man schalte also während des Probierens einen Widerstandsballast zu dem zu kompensierenden Element und schließe immer nur kurze Zeit, überzeuge sich aber bei der definitiven Beobachtung durch längeren Schluß ohne Ballast, ob die Kompensation wirklich erreicht ist.

3. Kompensation mit Strommessung (Poggendorff).

Das Verhältnis der Spannungen e und e' zweier Elemente zu einander wird dadurch ermittelt, daß jedes an dem Stromkreis derselben **konstanten** und **stärkeren** el. Kraft E im Nebenschluß kompensiert wird.

G ist ein Stromprüfer, S ein Strommesser, der hier nur relativ zu messen braucht, R ein Rheostat oder ein Meßdraht. Man schaltet e in die Leitung von G, reguliert R so, daß G stromlos wird, und beobachtet die Stromstärke J in S. Nach dem Ersatz von e durch e' seien R' und J' diese Werte. Dann ist

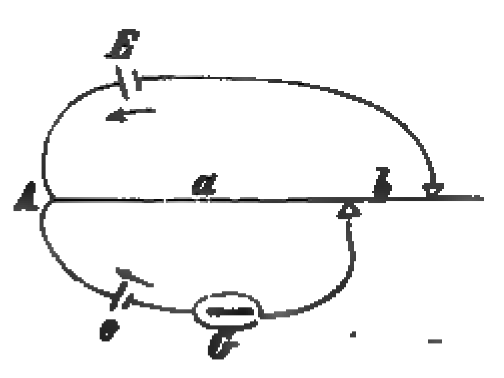
$$e : e' = JR : J'R'.$$

Denn es ist $e = JR$ und $e' = J'R'$ (80 I B), da der Strom in G Null ist. (Vgl. auch die Verwendung von $e = JR$ zur absoluten Bestimmung S. 458.)

Im allgemeinen ist es vorteilhaft, mit großen Widerständen und entsprechend empfindlichen Galvanometern zu arbeiten.

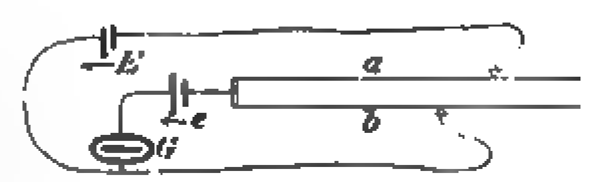
4. Verfahren nach Bosscha.

Die Spannung eines Elementes e sei mit der Spannung E einer **stärkeren** konstanten Säule (Akkumulator; ein oder mehrere Daniell) zu vergleichen. a und b sind veränderliche Rheostatenwiderstände, oder ab ist ein Meßdraht mit zwei Schleifkontakten, an welche die beiden Elemente einander entgegengerichtet angeschlossen werden (Fig.), das inkonstante e mit einem Stromprüfer G. Der Kontakt hinter b wird als widerstandskonstant vorausgesetzt. Man sucht Widerstände oder Drahtabschnitte a und b, für welche G stromlos wird, und wiederholt dies für ein anderes Paar a' und b'. Dann ist



$$\frac{E}{e} = 1 + \frac{b - b'}{a - a'}.$$

Die Schaltung kann auch mit Verzweigung von der Mitte eines Rheostaten oder mit einem Doppeldraht, dessen **beide** Kontakte widerstands-

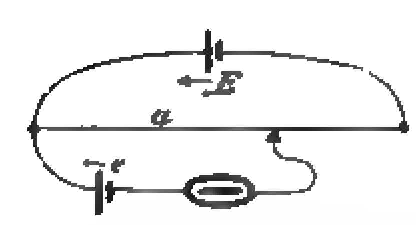


konstant sein müssen, angeordnet werden. Es gilt dann die nämliche Beziehung.

Vgl. 97, 4, wo auch der Beweis und die Bedingung der Ausführbarkeit.

5. Verfahren nach du Bois-Reymond.

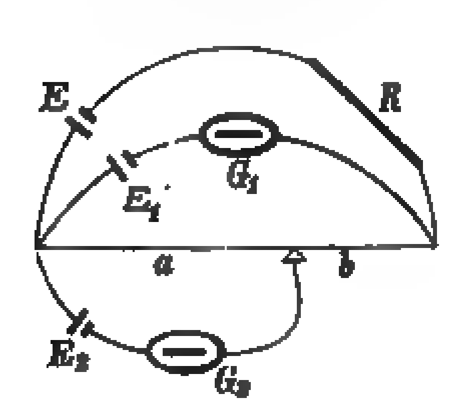
Man läßt den in der ersten Figur mit $a+b$ bezeichneten Widerstand konstant $=l$ und verschiebt nur den Kontakt des Elementes e. Dann ist dessen el. Kraft $e=aE/(W+l)$. Solange also dasselbe E benutzt wird, ist, wenn man $E/(W+l)=C$ setzt, das zu messende $e=C\cdot a$, d. h. der Länge a, welche den Strom in G verschwinden läßt, einfach proportional.

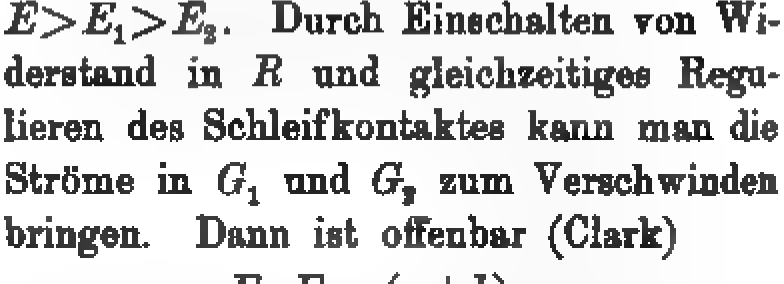


Hier muß also der Widerstand W des Vergleichselementes E, einschließlich seiner Zuleitungen, in Längeneinheiten des Meßdrahtes ausgedrückt, bekannt sein. Unabhängig davon aber läßt sich der konstante Faktor C auch dadurch bestimmen, daß man, unter Belassung des Vergleichselementes E an seinem Platze, an die Stelle von e einmal ein Normalelement von bekannter Spannung e_0 setzt. Wird hierbei die Länge a_0 beansprucht, so ist offenbar $C=e_0/a_0$. Mit anderen Worten: man hat dann e mit e_0 verglichen.

6. Direkte Vergleichung inkonstanter Elemente.

Mittels zweier Stromprüfer G_1 und G_2 und einer stärkeren konstanten Hilfssäule E (Akkumulatoren) werden die E_1 und E_2



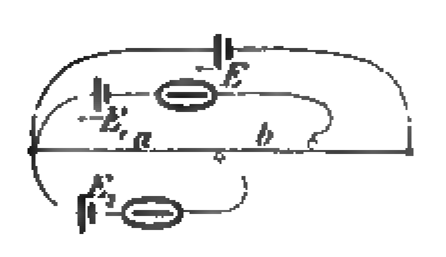


direkt mit einander verglichen. Es sei $E>E_1>E_2$. Durch Einschalten von Widerstand in R und gleichzeitiges Regulieren des Schleifkontaktes kann man die Ströme in G_1 und G_2 zum Verschwinden bringen. Dann ist offenbar (Clark)



$$E_1 : E_2 = (a+b) : a.$$

Der Rheostat R ist unnötig, wenn die Kontakte beider Elemente beweglich sind. Stromlosigkeit in beiden Zweigen gibt wieder $E_1 : E_2 = (a+b) : a$. Geeignete Schneiden lassen sich nötigenfalls dicht zusammen schieben.



In Nr. 4, 5 und 6 lassen sich sowohl gespannte Drähte wie Stöpselrheostaten verwenden.

Über die Anwendung eines Telephons mit vorgeschaltetem Selbstunterbrecher zur Prüfung der Stromlosigkeit vgl. Fischer, ZS f. Elektroch. 1903, 18.

Elektrostatische Methoden s. in **127** oder **130**.

100. Elektromotorische Kraft in absolutem Maße.

I. Die in **99** aufgezählten Methoden der Vergleichung liefern el. Kräfte in absolutem Maße, sobald das Vergleichselement in diesem Maße bekannt ist (**80** II).

II. Bestimmung durch Strommessung.

Eine el. Kraft E wird in Volt ($1\,\mathfrak{V} = 10^8$ CGS; vgl. Anh. **26**) gemessen durch den Strom $i\,\mathfrak{A}$, den sie im Widerstande $w\,\Theta$ bewirkt (vgl. **80** I 4) als

$$E = wi\,\mathfrak{V} \text{ oder } = 10^8 \cdot wi \text{ CGS}.$$

1. Direkte Messung.

Man schließt durch ein Galvanometer, ev. mit zugeschaltetem Widerstand. Die Summe dieser Widerstände sei $= w_1$, der Widerstand des Elements $= w_0$, die Stromstärke $= J$, dann ist

$$E = (w_0 + w_1) J.$$

Bei empfindlichen Galvanometern kann w_0 und häufig auch der Galvanometerwiderstand vernachlässigt werden.

Ist das Element nicht konstant, so gilt E für die vorhandene Stromstärke und kann also durch Variieren des Versuchs, insofern nicht etwa auch der Elementwiderstand von der Stromstärke beeinflußt wird, als Funktion der letzteren bestimmt werden.

Vgl. auch **102** und die elektrometrische Methode **127**. Über Klemmspannung **101**.

„Ohm'sche Methode". Durch doppelte Messung eliminiert man den Widerstand Säule + Galvanometer. Man schließt durch Rheostat und Galvanometer und beobachtet die Ströme i_1 und i_2 bei den Rheostatenwiderständen R_1 und R_2. Dann ist

$$E = i_1 i_2 (R_1 - R_2)/(i_2 - i_1).$$

Der eine Strom mag ungefähr die Hälfte des anderen

sein. 35° und 55° Ausschlag sind für die Tangentenbussole am besten.

Die Methode ist auf „konstante" Elemente beschränkt. Dynamomaschinen sind von der Methode ausgeschlossen.

Spannungsmesser. So heißen Strommesser von sehr großem Widerstande, ev. einschließlich eines konstant vorgeschalteten Widerstandes (so daß der Widerstand der Stromquelle dagegen vernachlässigt werden kann), falls die Ablesung am Instrument gleich das Produkt Stromstärke $\times$ Widerstand, also die Spannung des Elements angibt. — Das Leitungsmaterial soll von der Temperatur wenig beeinflußt werden (Tab. 30).

Vorschaltwiderstände. Ist der Widerstand des Spannungsmessers $=\gamma$, so wird durch Vorschaltwiderstände von 9γ, 99γ usw. der Wert der Teilung 10, 100 usw. mal größer. — Wenn γ eine runde Zahl ist, z. B. $=10000\,\Theta$, so kann dieselbe Teilung auch für Strommessung beziffert sein. Besonders die Weston-Zeiger (85) sind oft als Strom- und Spannungsmesser eingerichtet und zugleich mit Abzweig- und Vorschaltwiderständen versehen, die den Skalenwert bis zum Verhältnis 1:1000 verändern lassen.

Die Prüfung eines Spannungsmessers kann mittels Strom- und Widerstandsmessung oder mit einer Säule von bekannter el. Kraft (80 II) geschehen.

3. Kompensationsmethode nach Poggendorff. Vgl. 99, 3.

Ist die Stärke des in S gemessenen Stammstromes (Fig. S. 455) gleich J A, wenn gleichzeitig die zu bestimmende el. Kraft e an den Enden des Widerstandes $R\,\Theta$ durch diesen Strom kompensiert wird, d. h. wenn G stromlos ist, so hat man

$$e = RJ \text{ V}.$$

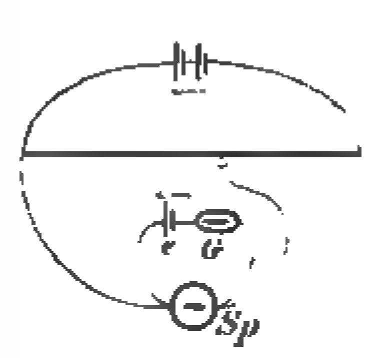
Bei inkonstanten Elementen beachte man S. 452 u. 454.

Zur Vereinfachung der Rechnung kann man R von konstanter runder Zahl wählen, je nach der Größe von e etwa $=1\,\Theta$ oder $=0{,}1\,\Theta$. Das Verschwinden des Stromes in G wird dann nur durch den Rheostatenwiderstand des Hauptstromkreises bewirkt.

Anwendung auf Thermokräfte (vgl. F. K. Pogg. Ann. 141, 456. 1870). — Eine besonders für die Eichung von Thermoelementen bestimmte

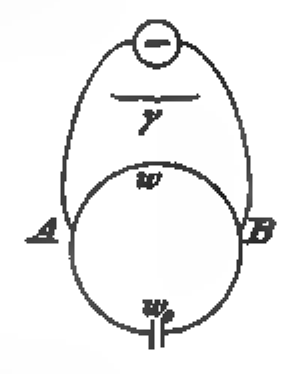
Ausführung mit $R = 0{,}1\,\Omega$ und einem in Milli-A geteilten Weston-Strommesser s. bei Lindeck u. Rothe, ZS f. Instr. 1900, 298.

Anordnung mit Spannungsmesser. Der hier nicht zum Messen, sondern nur zum Regulieren bestimmte Draht oder Rheostat wird von dem konstanten Strome einer Hilfsbatterie (Akkumulatoren) durchflossen. Das zu messende Element *e* bildet einen Stromkreis mit einem Spannungsmesser *Sp* (vor. S.) und einem Galvanometer *G*, liegt aber zugleich an dem Hilfsstrom. Der Spannungsmesser zeigt, vorausgesetzt wieder, daß die Widerstände von *e* und *G* gegen seinen Widerstand zu vernachlässigen sind, die el. Kraft von *e* in dem Zustande an, welcher dem durch *e* fließenden Strome entspricht, also im stromlosen Zustande, wenn der Kontakt auf Verschwinden des Stromes in *G* gestellt ist.



101. Potentialdifferenz im Stromkreise. Klemmspannung.

Um die Potentialdifferenz oder Spannung zu finden, welche zwischen zwei Punkten *A* und *B* eines Stromes besteht, zweigt man zwischen diesen Punkten durch ein empfindliches Galvanometer mit zugefügtem großem Widerstand ab. Ist γ der Gesamtwiderstand und i die Stromstärke in der Abzweigung, so ist der Spannungsunterschied P für sehr großes γ einfach $P = i\gamma$. Ein Spannungsmesser gibt P direkt.



Sind die übrigen Widerstände gegen γ nicht zu vernachlässigen, so kommt eine Korrektion hinzu. Es sei w der Widerstand der Hauptleitung zwischen den beiden Punkten, w_0 ihr übriger Widerstand einschließlich der Stromquelle, dann war die Spannung P vor dem Anlegen des Zweiges, wenn der Versuch P' ergibt,

$$P = i\left(\gamma + \frac{w_0 w}{w_0 + w}\right) = P'\left(1 + \frac{1}{\gamma}\,\frac{w_0 w}{w_0 + w}\right).$$

Wie man eine für direkte Messung zu große Spannung meßbar abschwächt, siehe in **99**, 2; vgl. auch das Beispiel daselbst.

Klemmspannung. Darunter versteht man die Potentialdifferenz an den Polen der Stromquelle (Batterie; Dynamomaschine), während diese Strom gibt. Die Messung geschieht so wie oben; nur legt man die Abzweigepunkte an die Pole (Klemmen) der Stromquelle. Die Bestimmung ist besonders bei Dynamomaschinen von Bedeutung, da deren el. Kraft von der Stromstärke abhängt, bei Serienmaschinen sogar überhaupt nur vorhanden ist, wenn sie geschlossen laufen; **119**. Nur bei großem äußeren Widerstande w ist die Klemmspannung P mit der ganzen el. Kraft E identisch. Bei Batterien und Serienmaschinen ist, wenn w_0 den inneren Widerstand der Stromquelle bedeutet, zu setzen

$$E = P(w_0 + w)/w \quad \text{oder} \quad = i[w_0 + \gamma(w_0 + w)/w].$$

Denn wenn i_0 der Strom in der Stromquelle, so ist $(i_0 - i)w = \gamma i$ oder $i_0 = i(w + \gamma)/w$. Also $E = i_0 w_0 + i\gamma = i[w_0 + \gamma(w_0 + w)/w]$, q. e. d.

Messung großer Stromstärken mit dem Spannungsmesser.

Die Messung besonders von starken Strömen wird häufig auf die Spannung in einem Teile des Stromkreises von bekanntem Widerstande in folgender Form zurückgeführt (vgl. **88** u. **130** III). Die Methode ist von großer Bedeutung.

An einen Teil des Stromkreises, etwa an einen eingeschalteten Starkstrom-Meßwiderstand (**80** IV) vom bekannten Betrage R legt man einen Spannungsmesser an. Aus der Spannung P findet man den Strom in R gleich P/R. Der Stammstrom ergibt sich hieraus durch Multiplikation mit $1 + R/\gamma$, wenn γ den Widerstand des Spannungszweiges bedeutet; häufig wird R/γ zu vernachlässigen sein.

Wenn z. B. $R = 0{,}01\,\Theta$ und $P = 0{,}2\,V$, gemessen mit einem Sp.-Messer vom Widerstande $\gamma = 1000\,\Theta$, so ist $J = \frac{0{,}2}{0{,}01}\left(1 + \frac{0{,}01}{1000}\right) = 20{,}0002\,A$.

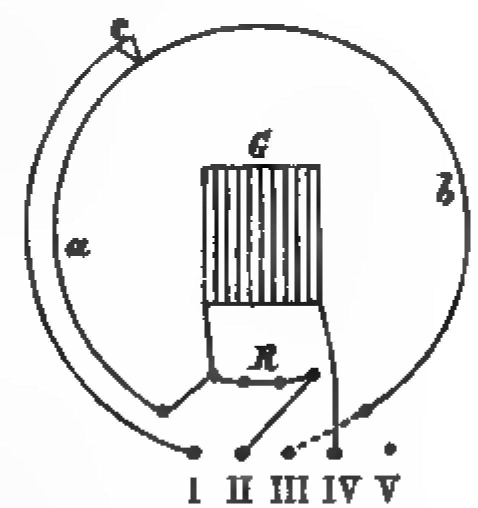
Die Anwendung des Kompensationsapparats s. in **103** I.

102. Universalgalvanometer und Torsionsgalvanometer (Siemens & Halske).

Die Instrumente dienen zur Bestimmung von Stromstärken, Widerständen und Spannungen. Über die neuere Form des Universalgalvanometers vgl. Raps, Elt. ZS 1897, 196, wo auch Isolations- und Fehlerbestimmungen an Leitungen behandelt werden.

I. Universalgalvanometer.

G ist der Multiplikator, *R* bedeute die durch Herausziehen von Stöpseln einzuschaltenden Widerstände 1, 10, 100 oder 1000 Θ, *a* und *b* den kreisförmig gespannten Brückendraht. I, II, III, IV, V sind Klemmschrauben, von denen III und IV durch einen Stöpsel direkt mit einander verbunden werden können. Klemme V mit einem Kontakttaster nach II wird für momentanen Schluß statt II gebraucht. Wenn V fehlt, so kann zu diesem Zweck ein leicht zu handhabender Kontakt an II dienen *C* bedeutet den verstellbaren Kontakt (die wirkliche Verbindung von *C* nach I liegt unter dem Instrument).



Neue Form. Bei Strom- und Spannungsmessungen ist hier eine bestimmte Stromrichtung inne zu halten. Außerdem vermeide man starke Ströme, da sie das Instrument verbrennen können.

Die Sinusbussole ist durch einen Westonzeiger ersetzt, der durch einen, mittels des (nicht gezeichneten) Stöpsels *y* anzuschaltenden Nebenschluß auf 1 Θ Widerstand und den Skalenwert 0,001 A kommt. Um nur relativ oder mit Nullmethoden zu beobachten, kann man durch Offenlassen von *y* die Empfindlichkeit vergrößern.

R hat die Widerstände 1, 9, 90, 900 Θ, aus denen für Vergleichszwecke 1, 10, 100, 1000 gebildet werden können. Außerdem dienen 9, 99, 999 bei Spannungsmessungen als Vorschalter. — Der Einer kann durch Einsetzen eines gespaltenen Nebenschlußstöpsels von $\frac{1}{9}$ Θ in 0,1 verwandelt werden

An dem Schleifdraht ist die Bezifferung nach *a*/*b* adoptiert, so daß nicht gerechnet zu werden braucht.

1. Strommessung. Klemmen II (V) und IV bilden die Pole. *R* kann als Vorschaltwiderstand dienen. Das alte Instrument ist mit der Gradeinteilung am Brückendraht als Sinusbussole (82) zu gebrauchen. — Der Westonstrommesser (85, 2) des neuen zeigt, wenn das Loch *y* gestöpselt ist, Milliampere an. Starkstrom-Nebenwiderstände von $\frac{1}{9}$ bis $\frac{1}{19999}$ Θ, um den Skalenwert mit 10 bis 20000 zu multiplizieren, können geliefert werden.

2. Widerstandsbestimmung. Man schaltet zwischen I und II (V) das Element, zwischen II und III den Widerstand und setzt den Stöpsel zwischen III und IV. Man hat dann die gewöhnliche Brückenschaltung S. 423. Als Vergleichswiderstand *R* wählt man die dem zu messenden Widerstande *w* nächst liegende Größe. Wird *C* so gestellt, daß der Kontakt keinen

Ausschlag gibt, so ist $w = R \cdot b/a$. An älteren Instrumenten ist $b + a = 300$; der Nullpunkt der Teilung liegt in der Mitte. Eine Tabelle erleichtert die Rechnung.

An dem neuen Instrument ist III, anstatt mit b, mit dem Ende a verbunden, so daß $w = R \cdot a/b$ wird.

3. Vergleichung von el. Kräften; altes Instrument (99; Verfahren nach du Bois-Reymond). Man entfernt den Stöpsel III—IV, setzt die Stöpsel von R aber ein, und schaltet ein zu vergleichendes Element e zwischen I und IV, die (stärkere und konstante) Vergleichs-Säule E zwischen II (V) und III, und zwar gleichnamige Pole von e und E mit I und III verbunden. Dann sucht man die Strecke a, bei der die Nadel in Ruhe bleibt; das Element e wird dabei, wenn es inkonstant ist, nur momentan geschlossen, was man mit dem Kontaktröllchen selbst oder an der Klemme I ausführt. Wenn der Widerstand w_0 der Säule E bekannt ist, so gilt dann $e : E = a : (a + b + w_0)$.

Um das Element e mit einem anderen e' zu vergleichen, schaltet man nun e' statt e ein. Findet man jetzt die Einstellung a', so ist, von w_0 unabhängig, $e : e' = a : a'$.

4. Spannungsmessung; neues Instrument. Die Löcher y sowie 1 Θ werden immer gestöpselt gehalten; 9, 99 oder 999 dienen ev. zur Vorschaltung. 1 Teilstrich entspricht 0,001, 0,01, 0,1 oder 1 V Spannung an den Polen des Instruments.

II. Torsionsgalvanometer.

Das T.-G. dient zur Strom- und zur Spannungsmessung.

Vom Erdmagnetismus sind die Angaben bei Orientierung in den Meridian unabhängig. Änderungen des Nadelmagnetismus dagegen, die mit der Zeit oder durch einen zu starken Strom eintreten können, ändern die Konstante, die also häufig neu zu bestimmen ist.

Ferner ist, wenn nicht Multiplikator und Nebenwiderstände aus einem wärmeunempfindlichen Materiale bestehen, auf die Temperatur zu achten und der Strom nicht unnötig lange zu schließen.

Strommessung. Man führt die Nadel durch Drehung des Torsionskopfes um den der Stromstärke proportionalen Winkel α auf ihre den Windungen parallele Nullstellung zurück. Die Stromstärke ist dann $i = C\,\alpha$. Die Konstante C wird mit dem Silbervoltameter (87 I), oder dem Normalelement (88), oder durch Vergleichung mit einem Normalgalvanometer bestimmt (89). Die von Siemens & Halske ausgegebenen zwei Arten von Instrumenten sollen $C = 0{,}001$ bez. $0{,}0001$ A/Grad haben.

Starke Ströme werden mit Abzweigung (86) gemessen. Der Multiplikatorwiderstand beider Instrumente ist auf 1 bez. 100 Θ abgeglichen. Es bewirkt also ein Zweigwiderstand z den Reduktionsfaktor $C = 0{,}001(z+1)/z$ bez. $0{,}0001(z+100)/z$ A. Runde Zahlen erhält man durch die den Instrumenten beigegebenen Zweigwiderstände $z = \frac{1}{9}\ \frac{1}{99}$ usw. bez. $z = \frac{100}{9}\ \frac{100}{99}$ Θ usw., nämlich $C = 0{,}01\ \ 0{,}1$ usw. bez. $C = 0{,}001\ \ 0{,}01$ usw.

Spannungsmessung Die Vorschaltung von R Θ zu den Instrumenten bewirkt den Wert eines Skalenteiles bei dem einen Instrument $= 0{,}001(R+1)$ V, bei dem anderen $= 0{,}0001(R+100)$ V. Bei Vorschaltung von 9, 99, 999 Θ bez. 900, 9900, 99900 Θ bedeutet also 1 Sk.-T. 0,01 0,1 1 bez. 0,1 1 10 V.

103. Kompensationsapparat (K. Feußner).

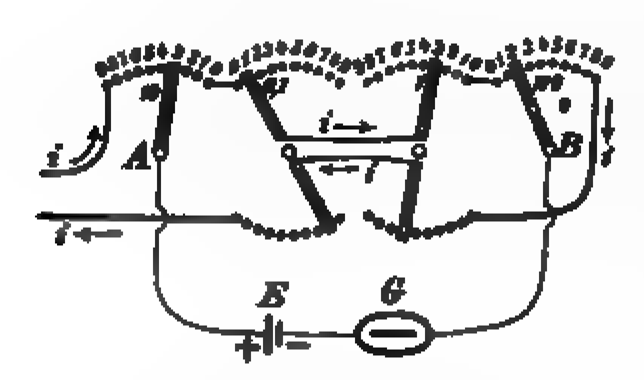
Die früher gegebenen Regeln zur Strom-, Widerstands- und Spannungsmessung mittels Normalelements sollen hier mit Bezug auf den K.-App. spezialisiert werden, der hauptsächlich dazu bestimmt ist, die Zurückführung einer Stromstärke auf Widerstand und Spannung (88) handlich zu machen, der aber auch zur Widerstands- (91, 180) und Spannungsmessung (99 bis 101) gebraucht werden kann.

An Genauigkeit werden die Nullmethoden des K.-App., die Richtigkeit der Widerstandsrollen und eine angemessene Behandlung der Normalelemente vorausgesetzt, die gewöhnlichen Mittel nicht selten übertreffen. Gewöhnen muß man sich durch Übung an die im Vergleich mit gewöhnlichen Galvanometern größere Aufmerksamkeit, die durch die Handhabung und die weniger einfache Anordnung des K.-App. bedingt wird. Bequem sind andrerseits die Anordnungen, welche fast ohne Zahlenrechnung zu arbeiten gestatten, zum Teil freilich einen beträchtlichen Aufwand an verfügbaren Präzisionsrheostaten bedingend.

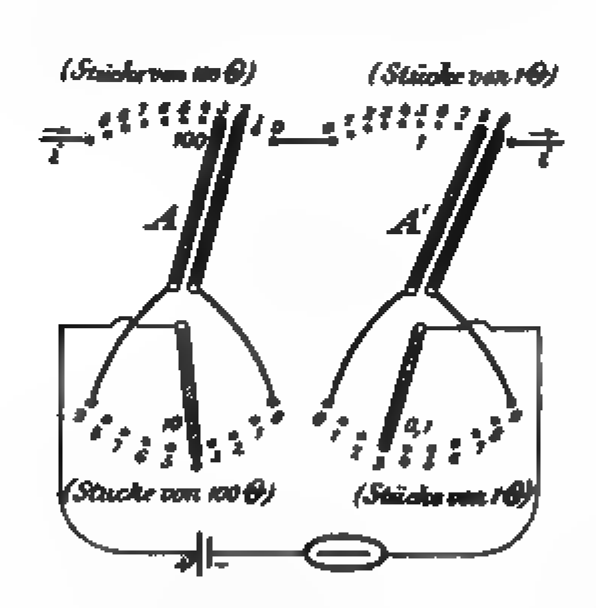
Die Kurbelkontakte wollen sorgfältig behandelt sein, denn nur an den eigentlichen Abzweigpunkten bleiben Übergangswiderstände außer Betracht. Schützen vor Staub, häufiges Abwischen mit etwas Petroleum, auch wohl ständige Bedeckung mit ein wenig feinem Mineralöl ist anzuraten.

Dem K.-App. ist eigentümlich, daß ein aus Rollenwiderständen bestehender Gesamtwiderstand, ähnlich wie sonst ein Schleifdraht (vgl. Fig.), automatisch konstant bleibt, obwohl im Teile AB des Stromkreises, von dem man abzweigt, Änderungen vorgenommen werden. Diese geschehen nämlich an Dekadenwiderständen mittels Kurbeln, von denen die mittleren je eine von ihnen isolierte, aber sich mitdrehende Rückwärtsverlängerung haben, die auf den Knöpfen eines Zwillingsrheostaten den Widerstand, welchen die erstere Kurbel zwischen A und B ein- oder ausschaltet, gleichzeitig in dem äußeren Teile der Stromleitung aus- oder einschaltet.

An einem Rheostaten, der aus zusammen nahe 1000 Θ, nämlich aus je 9 Zehnteln, Einern, Zehnern und Hundertern besteht, zeigt dies schematisch die Figur. Die Abzweigung mit dem Normalelement liegt an den Kurbeln A und B, zwischen denen durch passende Stellung der vier Kurbeln jeder Widerstand zwischen 0,1 und 999,9 eingeschaltet werden kann. Der zu messende Strom i fließt dabei aber konstant durch den Widerstand 999,9, denn der mittels der Doppelkurbeln oben ausgeschaltete Betrag der Einer und Zehntel wird durch die unteren Kurbeln von selbst eingeschaltet. Der Kompensationswiderstand beträgt in der Figur $R = 233{,}1$ Θ.



Anordnung von Raps (Fig.). Der Hauptstrom durchfließt hintereinander nur je zehn Hunderter und Einer. Außerdem ist noch je eine Gruppe von neun Hundertern bez. Einern vorhanden, von denen vermöge der Doppelradien A und A' die eine stets einem der Hunderter, die andere einem der Einer parallel liegt. Der ganze Widerstand im Hauptstrom beträgt hiernach, wie in der vorigen Figur, konstant 999,9 Θ.



Die Abzweigung mit Normalelement und Galvanometer liegt an Kurbeln der beiden Nebengruppen. Den Doppelradien gibt man die Stellungen, bei denen der in der Hauptleitung eingeschaltete Komp.-Widerstand noch eben zu klein ist und rückt dann die Kurbeln auf genaue Kompensation; in der schematischen Figur beträgt er 248,3 Θ.

Vorteilhaft ist die kleinere Gesamtzahl der Widerstände und ihre leichtere Kontrollierbarkeit, da sie nur in zwei Größen vorkommen und da die kleinen Stücke vermieden sind. Nachteilig wirkt der Umstand, daß der Widerstand des Galvanometerkreises je nach der Einstellung sprungweise sich um das Zehnfache ändern kann

Vgl. Raps, Elt. ZS 1895, 507. — Eine andere Konstruktion s. bei Bruger, Phys. ZS 1, 167. 1900.

Häufig sind sämtliche Widerstände 10 mal größer, und es ist in die Verbindung zwischen den mittleren Kurbeln noch eine Zehntel-Dekade gebracht, deren Ein- oder Ausschaltung den Gesamtstrom nicht merklich ändert.

In jedem Falle ist also ein konstanter Gesamtwiderstand vorhanden, innerhalb dessen man durch Kurbeldrehungen von einem beliebigen, in vier oder fünf Ziffern angebbaren Teile abzweigen kann. — Andere, mehr-

seitig für besondere Zwecke konstruierte K.-Apparate (Potentiometer) unterscheiden sich von den hier beschriebenen grundsätzlich nicht.

Über die als Unterlage absoluter Messungen dienenden **Normalelemente** s. 80 II und über die für sie nötigen **Vorsichtsmaßregeln** S. 408. In den Zahlenbeispielen wird hier als Normalelement das von der Weston-Gesellschaft ausgegebene Cadmiumelement unterstellt, welches von der Temperatur unabhängig 1,0190 V hat. Bei anderen Elementen sind dafür die Zahlen aus 80 S. 378 u. 379 einzusetzen.

Herstellung einer bekannten Stromstärke von runder Zahl im Komp.-Apparat.

Diese wird als bequemes Zwischenmittel zur Messung häufig angewandt. Man lege ein Normalelement von der el. Kraft E_0 V an einen Widerstand $10^n E_0$ Θ [z. B. $=100 E_0$, also 101,9 Θ für das Cadmiumelement der Weston-Gesellschaft]. Man schließt eine konstante Batterie durch den Apparat und einen vorgeschalteten Hilfsrheostaten und macht mittels des letzteren das Element stromlos. Dann ist die Stromstärke $i_0 = 10^{-n}$ A [z. B. $=0{,}01$ A]. Damit die Kontrolle von i_0 nicht ein jedesmaliges Wiederanlegen des Elements erfordert, sind den Apparaten häufig für die Stromstärken 0,01, 0,001 und 0,0001 A besondere Widerstände von 101,9, 1019 und 10190 Θ beigegeben, an denen man das Element liegen läßt. Ein Umschalter erlaubt, das Galvanometer jederzeit in diese Abzweigung zu schalten und die Konstanz von i_0 zu kontrollieren.

Ganz schwache Ströme [etwa 10^{-5} A] kann man durch Parallelschalten eines kleineren Widerstandes z zum Widerstande w des Apparates herstellen. Von der Stromstärke der unverzweigten Leitung erhält der Apparat dann (S. 402) den Bruchteil $z/(w+z)$ [z. B. durch $z=10{,}1$ Θ zu den 999,9 Θ der Figur $10{,}1/(999{,}9+10{,}1)=1/100$].

I. Messung einer Stromstärke.

a) **eines durch den K.-App. fließenden Stromes** (wie in 88). Der Strom kompensiere (Fig. S. 464) ein Normalelement von der Spannung E_0 am Widerstande R, dann ist seine Stärke

$$i = E_0/R.$$

Beispiel: In der Figur S. 464 sei $E = E_0 = 1{,}019$ V; dann ist $i = 1{,}019/233{,}1 = 0{,}00437$ A.

b) **eines außerhalb gegebenen Stromes.** Das Verfahren stimmt wesentlich mit 88 I u. II überein. Im K.-App. sei so wie oben eine bekannte Stromstärke i_0 hergestellt. Der zu messende Strom i durchfließe den bekannten Widerstand r. Wird die Endspannung in r durch Anlegen an den Widerstand R des K.-App. (Fig.) kompensiert, so ist

$i = R \cdot i_0/r$. Der Reduktionsfaktor i_0/r kann auf einen runden Betrag gebracht werden, z. B. $i_0 = 0{,}01$ A $r = 1$ Θ $i_0/r = 0{,}01$. r als Starkstromwiderstand von kleinem Betrage [0,001 Θ] läßt so starke Ströme [bis 1000 A] messen. Rechnung kann ganz gespart werden.

II. Messung einer Spannung.

a) Hohe Spannung. Man schließt diese durch den K.-App. und einen vorgeschalteten Rheostaten von großem Betrage. Ist R der Widerstand des K.-App. (ev. + Element), muß außerdem R' vorgeschaltet werden, damit das Normalelement E_0, an die Strecke R_0 angelegt, kompensiert ist, so beträgt die gesuchte Spannung $E = (R + R') \cdot E_0/R_0$.

Der Reduktionsfaktor E_0/R_0 kann wie früher durch die Wahl von R_0 [1019, 101,9 Θ usw.] zur Rechnung bequem gemacht werden. R' wird in diesem Falle zuletzt ausprobiert.

In Ermangelung des geeigneten Hilfsrheostaten R' probiert man, ev. unter Vorschaltung eines konstanten großen Widerstandes R', den Abzweigwiderstand R_0 aus und rechnet nach der Formel. Doch verliert man hierbei unter Umständen an Empfindlichkeit.

Über die Reduktion hoher Spannungen auf einen bekannten Bruchteil s. noch S. 453 u. 464.

b) Kleine Spannungen. Die gesuchte Spannung E wird auf E_0 zurückgeführt, indem man durch den K.-App. einen konstanten Strom schickt und an diesem E bez. E_0 einzeln kompensiert. Bedeuten R bez. R_0 die hierfür nötigen Abzweigwiderstände, so kommt $E = R . E_0/R_0$. Der Faktor E_0/R_0 (der die Stromstärke im Apparat darstellt) kann wieder auf einen für die Rechnung bequemen Betrag (0,01 usw.) gebracht worden sein; vgl. darüber S. 465.

III. Widerstandsbestimmung.

Man läßt den K.-App. von einem konstanten Strome durchfließen, die zu vergleichenden Widerstände hintereinander geschaltet von einem anderen. Beide Ströme werden auf ihre Unveränderlichkeit geprüft, was besonders bei kleinen Widerständen und infolgedessen stärkeren Strömen nötig ist. Die Endspannungen der zu vergleichenden Widerstände werden am

K.-App. verglichen; wie sie verhalten sich die Widerstände. Die Empfindlichkeit richtet sich nach der Stromstärke; je kleiner die Widerstände, desto stärker sucht man den durch sie geschickten Strom zu nehmen, muß aber die durch die Stromwärme gesteckte Grenze innehalten.

Das Verfahren entspricht genau den in **91 II 1 u. 130 II** beschriebenen, mit anderen Mitteln arbeitenden Methoden.

104. Beziehungen der elektrischen Spannung zur Chemie der Lösungen.

Eine Übersicht über die Aufgaben und ihre Grundlagen bei Nernst, Ber D. Ch. Ges. 1897, 1547; auch Theor. Chemie 4. Aufl. S. 698 ff.

I. Konzentrationsspannung auf Elektroden.

Zwischen einer verdünnten Lösung, welche die freien Ionen eines chemisch n-wertigen Metalles in der Konzentration α_1 enthält, und einer Elektrode aus demselben Metall besteht nach der osmotischen Theorie der Stromerzeugung (Nernst) bei der Temperatur t eine nach der Elektrode hin positive el. Spannung $E_1 = \frac{R_0}{n}(273+t)\lg\text{nat}\frac{\alpha_1}{A}$; A heißt elektrolytische Lösungstension des Metalles.

R_0 ist die Gaskonstante, aber bezogen auf die Menge der mit der Elektrizitätsmenge Eins wandernden Ionen, d. h. im elektromagnetischen CGS-System die Zahl (Anh. 9a und 87, 3) $R_0 = 83100000:9654 = 8608$

Die Spannung wird dabei in el.-magn. CGS-Einheiten erhalten, durch Multiplikation mit 10^{-8} also in Volt (Anh. 26). Führt man zugleich den gewöhnlichen Logarithmus ein, indem man $\lg\text{nat} = 2{,}303\cdot\lg\text{brigg}$ setzt, so wird die Konstante $= 8608\cdot 10^{-8}\cdot 2{,}303 = 0{,}0001982$. (Die Ziffern haben mit der z. B. S. 180 auftretenden Konstante 0,00198 keinen inneren Zusammenhang.)

Stehen also zwei gleiche Elektroden sich in überbrückten Lösungen von den Ionenkonzentrationen (vgl. oben) α_1 und α_2 gegenüber, so beträgt die Spannung E zwischen ihnen $E_2 - E_1$, d. h. es ist

$$E = \frac{0{,}0001982}{n}(273+t)\lg\text{brigg}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\ \text{Volt.} \qquad 1.$$

Für $t = 18°$ berechnet sich $E = \frac{0{,}0577}{n}\lg\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ Volt, was bei $n = 1$ z. B. für $\alpha_2/\alpha_1 = 10$ bez. 100 die Spannung 0,058 bez. 0,115 V, also gut ausmeßbare Größen ergibt.

Vgl. Nernst, ZS f. phys. Ch. 4, 147. 1889; über die logarithmische Abhängigkeit auch Eccher, Cim. (3) 5, 5. 1879.

Besteht zwischen zwei gleichen Elektroden eines $n$wertigen Metalles in zwei Lösungen eine Spannung $E_2 - E_1 = E$ V, so gilt

nach Gl. 1 für das Konzentrationsverhältnis α_2/α_1 der Ionen ihres Metalles in den umgebenden Lösungen

$$\lg\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = n\,\frac{5045}{273+t}\cdot E; \quad \text{z. B. bei } 18^{\circ}\ \lg\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = n\cdot 17{,}34\,E.$$

Aus der bekannten Ionenkonzentration α_1 läßt sich also auf eine unbekannte α_2 schließen, wenn es sich um Metalle handelt, die als Elektroden zugänglich sind. Man überbrückt die Lösungen durch einen Heber, der, um die Mischung zu erschweren, etwa Glaswolle enthält. Die im allgemeinen auftretende Korrektion durch die entstehende Diffusionskette kann man dadurch verschwinden lassen, daß sämtlichen Lösungen gleichmäßig ein indifferenter Elektrolyt (KNO_3) in großem Überschuß zugesetzt wird.

Von der Ionenkonzentration wird auf die größere Gesamtkonzentration des Salzes durch Division mit dem Dissoziationsgrad $\alpha = \Lambda/\Lambda_0$ (96 II) zurückgeschlossen.

Löslichkeit schwer löslicher Salze. Das Verfahren ist auf ein Salz anwendbar, dessen Metall als konstante Elektrode gebraucht werden kann. Die zu bestimmende gesättigte Lösung wird mit einer bekannten Lösung eines Salzes von demselben Metall verbunden. Kleine Verunreinigungen sind meistens nur dann von Einfluß, wenn sie dieselben Metallionen enthalten. Zur Beseitigung dieser kann eine gemessene kleine Menge eines löslichen Salzes mit demselben Anion hinzugefügt sein, z. B. KCl bei der Untersuchung von AgCl (d. h. man fällt die schädlichen Verunreinigungen aus).

Über den Einfluß des Zusatzes auf die Löslichkeit und über die Anordnung vgl. Ostwald, Lehrb. d. allg. Ch. 2. Aufl. II, 879; Goodwin, ZS f. phys. Ch. 13, 641. 1894.

II. Normalelektroden.

Um die Spannung auf einer einzelnen Elektrode angeben zu können, mißt man sie, wie unter I, gegen eine als Norm angenommene Elektrode:

1. Kalomelelektrode. Quecksilber, Quecksilberchlorür (Kalomel, länger mit Wasser geschüttelt, mit Quecksilber zu einem Brei verrieben) in $\frac{1}{10}$ (bez. auch in $\frac{1}{1}$) norm. KCl-Lösung. Die Spannung an der Elektrode gegen die Lösung wird zu 0,613 V (bez. zu 0,56 V) bei 18° angenommen (Ostwald).

2. **Wasserstoffelektrode.** Platiniertes Platin, mit daran vorbeigeleitetem Wasserstoff beladen, in norm. H_2SO_4-Lösung. Sie besitzt gegen die $\frac{1}{10}$ KCl-Kalomelelektrode eine Potentialdifferenz von $+0{,}277$ V.

Vgl. z. B. Wilsmore u. Ostwald, ZS f. phys. Ch. 36, 91. 1901. — Eingehenderes u. Literatur bei Ostwald-Luther S. 388.

Auch eine Elektrode der Normalelemente (80 II) kann in Erwägung kommen, z. B. die Merkurosulfat-Elektrode (Hg, Hg_2SO_4 mit $ZnSO_4$ oder $CdSO_4$) oder auch die Zink- oder Cadmiumamalgam-Elektrode.

III. Polarisation von Elektroden; Zersetzungsspannung.

Man schaltet den Elektrolyt zwischen indifferenten Elektroden — meist Platin — mit einem empfindlichen Strommesser in einen Stromkreis, dessen Widerstand bez. el. Kraft (vgl. **80**, Fig. S. 380) regulierbar ist, und mißt die mit allmählich steigender Stromstärke anwachsende Spannung der Polarisation an den Elektroden (**99** bis **101**, **130** I). An dem Punkte, welchem die eintretende Zersetzung entspricht, soll das Anwachsen einen Knick zeigen, der aber in Wirklichkeit meist wenig scharf ausgeprägt ist.

Man pflegt die Resultate graphisch darzustellen und die gestreckten Teile der Kurve bis zu ihrem Schnittpunkt auszuziehen, den man als Zersetzungspunkt ansieht.

In wässrigen Lösungen sind meist mehrere solche Punkte gefunden worden, die als Zersetzungspunkte für verschiedene Paare von Ionen betrachtet werden. Neben denen des gelösten Elektrolyts sind noch H, O und OH möglich.

Die Polarisation an einem einzelnen Pol sucht man dadurch zu erhalten, daß die andere Elektrode verhältnismäßig sehr groß gewählt wird, oder besser dadurch, daß man gegen eine dritte, stromfreie, Hilfselektrode mißt.

Die gemessene Größe enthält außer der Polarisationsspannung die dem Ohm'schen Gesetz entsprechende Spannung iw, die, falls sie bei den kleinen in Betracht kommenden Stromstärken überhaupt merklich wird, abzuziehen ist.

Über Theorie und Versuchsanordnungen vgl. Le Blanc, Lehrb. d. Elektrochemie S. 221. 1900; Nernst, Ber. D. Ch. Ges. 30, 1547. 1897; Ostwald-Luther, S. 390.

105. Bestimmung der erdmagnetischen Intensität durch Strommessung.

I. Mit Voltameter und Tangentenbussole.

Aus der Ablenkung α einer Tangentenbussole durch einen Strom, dessen Stärke i in CGS-Einheiten anderweitig bekannt ist, läßt sich nach Formel S. 386 die erdmagnetische Horizontalintensität H ableiten als

$$H = \frac{2n\pi}{R} \frac{i}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

i kann durch ein gleichzeitig eingeschaltetes Voltameter (87) bestimmt werden, wobei das auf CGS bezogene elektrochemische Äquivalent einzusetzen ist, also für Silber 11,18 mg/sek.

Auch irgend ein richtiger, vom Erdmagnetismus unabhängiger Strommesser, z. B. ein Weston-Zeiger (85, 2) kann i liefern. Angaben in A werden durch Division mit 10 auf CGS reduziert.

II. Mit Bifilargalvanometer und Tangentenbussole (W. Weber).

Der Strom durchfließt ein Bifilargalvanometer (83a) von der Direktionskraft D (27a) und der Windungsfläche f (106) und eine Tangentenbussole (vgl. oben). Die gleichzeitigen Ablenkungen seien φ am Bifilar und α an der Tangentenbussole.

Dann erhält man die Horizontalintensität H aus

$$H^2 = \frac{D}{f} \frac{2\pi n}{R} \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Stromstärke. Man erhält zugleich die Stromstärke i in absolutem Maße aus

$$i^2 = D/f \cdot R/2\pi n \cdot \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\varphi.$$

Der Strom wird in beiden Instrumenten kommutiert. Über Korrektionen der Tangentenbussole vgl. S. 387. Zu R kommt ev. überall der Torsionsfaktor $1 + \Theta$.

Die Ausdrücke ergeben sich, wenn man aus den beiden Gleichungen der einzelnen Instrumente (81 u. 83a) i oder H eliminiert.

Vgl. F. K., Pogg. Ann. 138, 1. 1869.

III. Mit dem Bifilargalvanometer und einer Magnetnadel (F. K.).

Nördlich oder südlich im Abstande a cm von der Mitte der Bifilarrolle ist in gleicher Höhe eine kurze Magnetnadel

aufgehängt. Der Strom, welcher den Ausschlag φ des Bifilars bewirkt, lenke gleichzeitig die Nadel um ψ ab. Dann ist

$$H^2 = \frac{D}{a^3}\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\psi} \quad \text{und} \quad i^2 = \frac{a^3 D}{f^2}\frac{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\psi}{\cos\varphi}.$$

Wegen der Ausdehnung der Bifilarrolle (Halbmesser $= r$) und der Fadentorsion ist H^2 durch Division und i^2 durch Multiplikation mit $(1 - \frac{9}{8} r^2/a^2)(1 + \Theta)$ zu korrigieren.

Man stellt das Magnetometer nördlich und südlich auf, setzt für a den halben Abstand des Aufhängefadens und nimmt aus den Ablenkungen die Mittel. Vergleiche auch 73.

Beweis. φ ist gegeben durch $D \cdot \sin\varphi = fiH \cdot \cos\varphi$. Für die Ablenkung ψ der Nadel durch den Strom der, selbst um φ abgelenkten, Rolle gilt $H(1+\Theta)\sin\psi = \frac{fi\cos\varphi}{a^3(1 - \frac{9}{8} r^2/a^2)}\cos\psi$, woraus die obigen Ausdrücke folgen.

Beobachtung aus 1. Hauptlage. Man stellt das Magnetometer östlich und westlich vom Bifilar auf; dann ist

$$H^2 = \frac{2D}{(a^2 + r^2)^{\frac{3}{2}}(1+\Theta)}\frac{\sin\varphi}{\operatorname{tg}\psi}.$$

Über einige Korrektionen s. F. K., Wied. Ann. 17, 737. 1882.

Die Bestimmung großer Feldstärken s. in 114.

106. Bestimmung der Windungsfläche einer Drahtspule.

I. Aus den gemessenen Durchmessern. Am direktesten, aber entweder mühsam oder weniger genau ist die Ausmessung des Durchmessers jeder Windungslage an mehreren Stellen (mit dem Kathetometer oder dem Zirkel) oder auch des Umfanges (mit dem Bandmaß). Von dem an der äußeren Oberfläche der Schicht gemessenen Durchmesser ist die Drahtdicke abzurechnen.

Ist nur die Windungszahl N, sowie der innere und der äußere Halbmesser r_0 und r_1 gemessen, so hat man bei gleichmäßiger Wickelung $f = \frac{1}{3}\pi N(r_0^2 + r_0 r_1 + r_1^2)$.

II. Aus der Drahtlänge. Für eine nicht zu feine Drahtsorte kann man die Summe der Windungsflächen einer Spule messen, indem man bei dem Aufwinden die Windungszahl und die Länge des Drahtes bestimmt.

Bilden kreisförmige Windungen eine Lage von rechteckigem Querschnitt, ist l die Drahtlänge, n die Anzahl der Windungen, h die Höhe der Windungslage, so wird die Windungsfläche f gefunden $$f = l^2/4\pi n + \tfrac{1}{12}\pi n h^2.$$

Wegen des Einsinkens der Drähte und des Zusammenpressens der Bespinnung wird der so gemessene Wert mehr oder weniger zu groß ausfallen.

Vgl. H. Weber, der Rotationsinduktor, Leipzig 1882.

III. **Durch magnetische Fernwirkung** (F. K.). Derselbe Strom durchfließe die Spule und eine Spiegel-Tangentenbussole mit einer Windung vom Halbmesser R. Auf die kurze Nadel wirken beide Teile des Stromes gleichzeitig. Die Stromleiter sollen folgende Stellung gegen einander haben.

Die Spulenaxe liegt ostwestlich. Ihr Mittelpunkt habe den Abstand a von der Nadel und liege von dieser entweder östlich oder westlich (1. Hauptlage), oder nördlich oder südlich (2. Hauptlage). Den Abstand wählt man so, daß die beiden Wirkungen auf die Nadel, wenn sie entgegengesetzt gerichtet sind, sich nahe aufheben. Ist letzteres genau der Fall, so hat man in erster H.-L. $f = a^3\pi/R$. — Andernfalls sei φ der Ausschlag, wenn der Strom in der Tang.-Bussole allein kommutiert wird, und Φ, wenn man beide gleichsinnig wirkende Ströme kommutiert. Dann ist (Vorzeichen von φ!)

$$f = \frac{a^3\pi}{R}\frac{\operatorname{tg}\Phi + \operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\Phi - \operatorname{tg}\varphi}.$$

In der zweiten H.-L. kommt der Faktor 2 hinzu.

Beweis. Da die Drehmomente des Stromes i auf die Nadel M von der Spule und von der Tangentenbussole zusammen dem des Erdmagnetismus H das Gleichgewicht halten, so hat man (für die 1. H.-L.) $2Mif/a^3 \cdot \cos\Phi + Mi2\pi/R \cdot \cos\Phi = MH\sin\Phi$ oder

$$2i(f/a^3 + \pi/R) = H\operatorname{tg}\Phi;$$

ebenso:

$$2i(f/a^3 - \pi/R) = H\operatorname{tg}\varphi.$$

Hieraus folgt durch Division der obige Ausdruck.

Korrektionen. 1. Wegen des Polabstandes $\mathfrak{l}$ der Nadel ist der Ausdruck für f in der 1. H.-L. mit $1 + \frac{3}{4}\mathfrak{l}^2/a^2 + \frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2$, in der 2. H.-L. mit $1 - \frac{3}{2}\mathfrak{l}^2/a^2 + \frac{3}{16}\mathfrak{l}^2/R^2$ zu multiplizieren.

2. Die Abnahme der Kraft mit $1/a^3$ ist nicht streng richtig. L soll die Länge, r_1 und r_0 den äußeren und inneren Halbmesser der Spule bezeichnen. a sei so groß, daß L^4 und r^4 gegen a^4 zu vernachlässigen sind. $(r_1^5 - r_0^5)/(r_1^3 - r_0^3)$ heiße k. Dann dividiert man den obigen Ausdruck für f in der 1. H.-L. durch $1 + (\frac{1}{2}L^2 - \frac{9}{10}k)/a^2$, in der 2. H.-L. durch $1 + (\frac{27}{40}k - \frac{3}{8}L^2)/a^2$.

3. Wegen Korrektionen der Tangentenbussole s. 81, S. 387.

Messung von a. Man stellt z. B. die Tangentenbussole

folgeweise auf beiden Seiten der Spule auf und setzt für a den halben Abstand der beiden Lagen des Nadelfadens.

Vgl. über Ausführung und Korrektionen F. K., Wied. Ann. 18, 513. 1883. (Mit λ wird daselbst die ganze Nadellänge bezeichnet. In den Formeln für 1. H.-L. muß 0,52 statt $\frac{1}{2}$ stehen.)

Über gestreckte Spulen s. z. B. Heydweiller, Wied. Ann. 41, 876. 1890. Über Vergleichung zweier Windungsflächen in bifilarer Aufhängung s. Himstedt, Wied. Ann. 18, 433. 1883.

Verhältnis des Halbmessers von Drahtringen.

Die Aufgabe kommt z. B. in 84 III vor. — Man stellt die Ringe als Galvanometer-Multiplikatoren mit kurzen Nadeln auf und läßt sie von demselben Strom durchfließen. Sind R_1 R_2 die Halbmesser, n_1 n_2 die Windungszahlen, φ_1 φ_2 die Ablenkungen, so ist $R_1 : R_2 = n_1 \varphi_2 : n_2 \varphi_1$. Ordnet man konzentrisch an und mißt die Ausschläge Φ und φ bei gleich- und entgegengerichtetem Strom, so kommt, wenn Ring I die stärkere Wirkung hat, $R_1 : R_2 = n_1(\Phi - \varphi) : n_2(\Phi + \varphi)$.

Korrektionen aus Ringquerschnitten und Nadellängen s. in 81.

107. Elektromagnetische Drehung des Lichtes (Verdet'sche Konstante).

Ein polarisierter Lichtstrahl durchsetze einen „magnetooptisch aktiven" Körper von der Länge l in der Richtung der Kraftlinien eines magnetischen Feldes H. Der Drehungswinkel α des Lichtstrahles ist dann (Faraday, Verdet)

$$\alpha = C \cdot Hl.$$

C ist die magnetooptische oder Verdet'sche Konstante des Körpers. Sie wächst mit abnehmender Wellenlänge des Lichtes, von rot bis blau durchschnittlich auf das doppelte bis dreifache. Die Drehung geschieht in der Richtung des Stromes, welcher das magnetische Feld durch Umkreisen hervorruft.

In dünnen Schichten magnetisierbarer Metalle findet keine Proportionalität, sondern ein Anwachsen zu einer Grenze statt (Kundt). Die Wellenlänge hat hier den entgegengesetzten Einfluß.

Für Natriumlicht bei 18° ist (Arons, H. Becquerel, Bichat und de la Rive, Gordon, Köpsel, Quincke, Rayleigh, Rodger und Watson, Siertsema) in

	Schwefelkohlenstoff	Wasser	schwerem Glase	
$C=$	0,0425′,	0,0131′,	0,08′	$[\mathrm{cm}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{gr}^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{sek}]$.

C nimmt auf $+1°$ ab: bei CS_2 um 0,00007, bei Wasser in mittl. Temp. um 0,000002. Es ist beiläufig dem Quadrat der Wellenlänge λ des Lichtes umgekehrt proportional, genauer $C = a/\lambda^2 + b/\lambda^4$.

Rodger und Watson, Phil. Trans. (A) 186, 621. 1895; ZS f. phys. Ch. 19, 325. 1896 — Konstanten sonstiger, insbesondere flüssiger Körper u. a. bei Quincke, Jahn, Wachsmuth. Literatur s. Wiedemann, Elektrizität III, 1044 ff. Perkin, Trans. Chem. Soc. 1896, 1026.

Die Messung ergibt sich aus der Formel. Über die Bestimmung von α s. 71. Das magn. Feld wird zwischen breiten Elektromagnetpolen mit möglichst kleinen Bohrungen oder für genaue Messungen in einer Spule erzeugt (114).

Strommessung. Sehr starke Ströme lassen sich durch die Drehung z. B. in CS_2 innerhalb einer Drahtspule (114 I) nach den vorigen Formeln und Konstanten genähert messen.

108. Die Bewegungsgesetze eines schwingenden Körpers mit elektromagnetischer Dämpfung (Ballistisches Galvanometer).

Die Schwingungen werden so klein vorausgesetzt, daß das rücktreibende Drehmoment dem Ausschlage und das dämpfende Drehmoment der Winkelgeschwindigkeit proportional bleibt.

Es soll bedeuten:

K das Trägheitsmoment des schwingenden Körpers (29).

D die Direktionskraft (Anh. 11a), für eine einzelne Magnetnadel $D = MH(1+\Theta)$ (Anhang 21); für einen Körper mit Direktion durch einen elastischen Aufhängedraht (55) $D = \frac{1}{2}\pi\,[F]\cdot r^4/l$.

p die Dämpfungskonstante, d. h. den Faktor, mit welchem die jeweilige Winkelgeschwindigkeit das der Bewegung widerstehende Drehmoment ergibt. — Zunächst werde $p < 2\sqrt{KD}$ vorausgesetzt, wobei periodische Schwingungen stattfinden.

u_0 die Winkelgeschwindigkeit bei dem Durchgang durch die Ruhelage.

α den Ausschlag, welcher ohne Dämpfung darauf erfolgen würde,

$\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3 \ldots$ die Ausschläge, welche mit Dämpfung erfolgen.

$k = \alpha_1 : \alpha_2 = \alpha_2 : \alpha_3 = \cdots$
oder auch $k = u_0 : u_1 = u_1 : u_2 = \cdots$ } das Dämpfungsverhältnis (27).

$\lambda = \lg k$ das briggische logarithmische Dekrement, also $k = 10^\lambda$.

$\Lambda = \lg\,\mathrm{nat}\,k = 2{,}3026\,\lambda$ (Tab. 29) das natürliche logarithmische Dekrement (welches für schwache Dämpfung $= k - 1$ ist), also $k = e^\Lambda$.

τ die Schwingungsdauer ohne Dämpfung,

T die Schwingungsdauer mit Dämpfung.

t_1 die Umkehrzeit nach dem Durchgange durch die Ruhelage.

Für die periodische Bewegung gelten folgende Sätze; Beweise s. S. 477:

$$1. \qquad \Lambda = \frac{\pi}{2}\,\frac{p}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}} = \frac{1}{2}\,\frac{p}{K}\,T. \qquad\qquad \tau = \pi\sqrt{\frac{K}{D}}, \qquad 2.$$

$$T = \pi \frac{K}{\sqrt{KD - \frac{1}{4}p^2}} \qquad \text{oder} \qquad T = \tau \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}} . \qquad 3.$$

Die Schwingungsdauer wächst also mit der Dämpfung. Für schwache Dämpfung kann man schreiben, da π^2 nahe $= 10$ und $\Lambda = k - 1$ ist, $T = \tau[1 + \frac{1}{20}(k-1)^2]$. Eine Dämpfung von einigen Prozenten beeinflußt die Schwingungsdauer nicht merklich. Vgl. Tab. 29.

Die Umkehr trifft auf die Zeit $t_1 = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Lambda}$.

Bedeutet u_1 die Geschwindigkeit bei der ersten Rückkehr in die Gleichgewichtslage, so ist

$$u_0 = k \cdot u_1 . \qquad 4.$$

Ferner ist $\alpha = \alpha_1 \cdot k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Lambda}}$ oder $= \alpha_1 \cdot e^{\frac{\Lambda}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Lambda}}$. 5.

Endlich erhält man aus dem Ausschlage die Anfangsgeschwindigkeit [1])

$$u_0 = \frac{\pi}{\tau} \cdot \alpha = \frac{\pi}{\tau} \cdot \alpha_1 \, k^{\frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\pi}{\Lambda}} . \qquad 6.$$

Der zu π/Λ als $\operatorname{arctg} \pi/\Lambda$ in Bogengraden gefundene Winkel ist durch 57,30 dividiert in die Formel einzusetzen. — Der Faktor $k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda} = e^{\Lambda/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}$ ist für schwache Dämpfung $= \sqrt{k}$; bis $k = 2$, d. h. bis $\lambda = 0{,}3$ oder $\Lambda = 0{,}7$ hinreichend genau $= 1 + 1{,}160\lambda$; er nähert sich für sehr starke Dämpfung, wo $\operatorname{arctg} \pi/\Lambda = \pi/\Lambda$ wird, der Zahl $e = 2{,}718$. Vgl. hierüber und über $\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}/\pi$ auch Tab. 29.

Über die Abnahme von k bei größeren Schwingungen mit der Schwingungsweite und den Einfluß dieses Umstandes auf die Ausschläge s. K. Schering, Wied. Ann. 9, 471. 1880.

Die aperiodische Bewegung s. auf S. 478.

Dämpfung, Galvanometerfunktion und Widerstand.

Handelt es sich um Galvanometer ohne besonderen Dämpfer, also um die Dämpfung einer Magnetnadel durch einen Multiplikator oder um die Dämpfung einer im Magnetfeld schwingenden geschlossenen Spule (S. 392), so besteht zwischen dem log. Dekrement der elektromagnetischen Dämpfung (also vom Luftwiderstande usw. abgesehen; vgl. hierüber folg. S.) und der Galvanometerkonstante eine nahe Beziehung. Es sei

q das von dem Strome Eins bewirkte Drehmoment, die sogenannte „dynamische Galvanometerkonstante".

Für die **Magnetnadel** (Magnetismus $= M$) bedeute G die „Multiplikator-Funktion" d. h. das Drehmoment des Stromes Eins auf eine Nadel vom

1) Mehrseitig gemachte Einwendungen gegen die Formeln 6, insbesondere die Ansicht, daß rechts der Faktor $\sqrt{1 + \Lambda^2/\pi^2}$ fehle, beruhen auf der Auffassung, daß α und α_1 demselben Λ (vgl. Gl. 11a) anstatt demselben u_0 entsprechen sollten. Es ist aber ohne, bez. mit Dämpfung $u_0 = A \cdot \pi/\tau$, bez. $= A \cdot \pi/T = A \cdot \pi/(\tau\sqrt{1 + \Lambda^2/\pi^2})$.

Magnetismus Eins, welches bei gegebener Gestalt der Windungszahl proportional ist; dann ist $$q = GM. \tag{7a}$$

Für die drehbare Spule ist q = Feldstärke $\times$ Windungsfläche
$$q = Hf. \tag{7b}$$

In beiden Fällen gibt nach dem Induktionsgesetz (Anh. 26) $q \cdot u$ die el. Kraft, welche durch die Winkelgeschwindigkeit u entsteht. Nennt man w den Widerstand des Stromkreises in abs. Maße, so entsteht also der Strom qu/w, und von diesem eben stammt das dämpfende elektromagnetische Drehmoment, welches danach die Größe $q \cdot qu/w = u \cdot q^2/w$ hat. Hiernach ist also q^2/w die Dämpfungskonstante, die wir oben p nannten und die nach Gleichung 1 gleich $2K\Lambda/T$ ist. Also besteht zwischen p oder q^2/w und K, Λ und T der einfache Zusammenhang
$$p = q^2/w = 2K\Lambda/T. \tag{8}$$

Die Dämpfungskonstante p ist nach den Gleichungen 7a oder 7b dem Magnetismus der Nadel, welche in dem Multiplikator schwingt, oder der Stärke des Feldes, in welchem die Spule schwingt, quadratisch proportional. Außerdem hängt sie von der Gestalt des Multiplikators ab, aber (bei Kurzschluß) nicht von dem Querschnitt des Drahtes, mit welchem der Raum bewickelt ist. Denn wenn man diesen Querschnitt in irgend einem Verhältnis kleiner, also die Windungszahl in demselben Verhältnis größer nimmt, so ändert sich offenbar q in dem gleichen Verhältnis, w aber mit dem Quadrate desselben. q^2/w bleibt also konstant. $q/\sqrt{w}$ bedeutet die „dynamische Galvanometerkonstante" für eine Wickelung, welche den Widerstand = 1 ergibt. Hierbei ist der Raum, den die Bespinnung beansprucht, sowie der Widerstand der Zuleitungsdrähte einer aufgehangenen Spule nicht berücksichtigt.

Aus K, Λ und T läßt sich q bez. w nach obigem einzeln bestimmen, wenn w bez. q bekannt ist.

Zur statischen Empfindlichkeit steht q in folgender Beziehung. Es sei, wie in 81ff.:

C der gewöhnliche „Reduktionsfaktor" des Galvanometers, welcher aus der Ablenkung α (bez. $\operatorname{tg}\alpha$) die Stromstärke i in abs. Maße als $i = C\alpha$ gibt, d. h. $$C = D/q. \tag{9}$$

Also gilt: für ein Nadelgalvanometer — für ein Drehspulengalvanometer
$$C = \frac{MH}{q}(1+\Theta) = \frac{H}{G}(1+\Theta), \qquad C = \frac{D}{Hf}. \tag{10}$$

In Wirklichkeit stammt ein Teil der Dämpfung von dem Luftwiderstande oder auch von anderen, außer der Multiplikatordämpfung bestehenden Ursachen. Es genügt, wenn dieser Teil mäßig ist, in Gl. 8 statt Λ zu setzen $\Lambda - \Lambda'$, wo Λ das ganze und Λ' das log. Dekrement ist, welches bei geöffnetem Stromkreise stattfindet.

Man setzt hier überall kleine Bewegungen voraus, bei denen Nadel bez. Drehspule nicht in Stellungen kommen, in denen die Multiplikatorfunktion bez. das magnetische Feld sich ändern (vgl. vor. S. u. 86).

Beweise.

Das Drehmoment, welches der schwingende, um den Winkel x abgelenkte Körper nach seiner Ruhelage hin erfährt, setzt sich aus dem Drehmomente Dx der Direktionskraft und dem vom induzierten Strome ausgeübten (vgl. vor. S.) pu oder $p\,dx/dt$ zusammen. Also ist $-(Dx+p\,dx/dt)/K$ seine Beschleunigung. Hiernach gilt als Differentialgleichung der gedämpft schwingenden Nadel

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{p}{K}\frac{dx}{dt}+\frac{D}{K}x=0, \qquad 11.$$

wo x die zur Zeit t bestehende Ablenkung bedeutet. Die Integration ergibt, wie man durch Rückwärtsbehandlung leicht verifiziert, für den Fall $p<2\sqrt{KD}$ den periodischen Zustand:

$$x=Ae^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\sin\left(\frac{\sqrt{KD-\frac{1}{4}p^2}}{K}t\right). \qquad 11a.$$

Daraus lassen sich die Sätze Nr. 1 bis 6 ableiten, wie folgt.

Schreibt man Gl. 11a durch Einführung der Schw.-Dauer T in der Form

$$x=Ae^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\cdot\sin(\pi/T)t, \qquad 12.$$

so sieht man, daß $T=\pi\dfrac{K}{\sqrt{KD-\frac{1}{4}p^2}}$ oder $=\pi\sqrt{\dfrac{K}{D}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{4}p^2/(KD)}}$. 3.

Die Schw.-Dauer ohne Dämpfung ($p=0$) ist $\tau=\pi\sqrt{K/D}$. 2.

Hieraus findet sich leicht die Beziehung $T=\tau\sqrt{1+\frac{1}{4}\frac{p^2}{K^2}\frac{T^2}{\pi^2}}$. 13.

Die Geschwindigkeit zur Zeit t ergibt sich durch Differenzieren

von Gl. 12 $$\frac{dx}{dt}=Ae^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}t}\left(\frac{\pi}{T}\cos\frac{\pi}{T}t-\frac{1}{2}\frac{p}{K}\sin\frac{\pi}{T}t\right). \qquad 14.$$

Sie ist also bei dem ersten Durchgang ($t=0$) $u_0=\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_0=A\cdot\dfrac{\pi}{T}$ 15.

und bei der ersten Rückkehr ($t=T$) $u_1=-\left(\dfrac{dx}{dt}\right)_T=A\cdot\dfrac{\pi}{T}\cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{p}{K}T}$.

Das Dämpfungsverhältnis ist also $k=u_0:u_1=e^{\frac{1}{2}\frac{p}{K}T}$ 16.

und sein nat. Logarithmus $\Lambda=\lg\text{nat}\,k=\frac{1}{2}\frac{p}{K}T$. 1.

Es gilt also die Beziehung $\frac{1}{2}\dfrac{p}{K}=\dfrac{\Lambda}{T}$,

so daß man Gl. 12 auch schreiben kann $x=A\cdot e^{-\frac{\Lambda}{T}t}\cdot\sin\dfrac{\pi}{T}t$; 12a.

ferner wird Gl. 13 $T=\tau\dfrac{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}{\pi}$ 3.

und endlich Gl. 14 $\dfrac{dx}{dt}=A\cdot\dfrac{1}{T}e^{-\frac{\Lambda}{T}t}\left(\pi\cos\dfrac{\pi}{T}t-\Lambda\sin\dfrac{\pi}{T}t\right)$. 14a.

Der erste Ausschlag ($dx/dt=0$) trifft also auf eine Zeit t_1, für welche gilt: $\operatorname{tg}\frac{\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{\Lambda}$, also $t_1=\frac{T}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}$ und $\sin\frac{\pi}{T}t_1=\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}$.

Hiermit findet sich aus Gl. 12a $\alpha_1=A\cdot k^{-1/\pi\,\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}$,

und also wegen 15 $\alpha_1=u_0\frac{T}{\pi}k^{-1/\pi\cdot\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}\cdot\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}}$.

Mit Rücksicht auf Gl. 3 folgt hieraus $u_0=\frac{\pi}{\tau}\alpha_1\cdot k^{1/\pi\cdot\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}$. 6.

Ohne Dämpfung wäre gewesen $\alpha=u_0\frac{\tau}{\pi}$,

also kommt $\alpha=\alpha_1\cdot k^{1/\pi\cdot\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}$. 5.

Aperiodischer Zustand; $p^2>4KD$.

Wie oben bedeutet τ die Schwingungsdauer ohne Dämpfung, u_0 die in der Ruhelage zur Zeit $t=0$ erteilte Geschwindigkeit, α den nach der Zeit $\frac{1}{2}\tau$ darauf folgenden Ausschlag ohne Dämpfung, während mit Dämpfung nach der Zeit t_1 der Ausschlag α_1 folgt. $e=2{,}7183$ ist die Basis der nat. Logarithmen.

1. Grenzzustand; $p^2=4KD$.

Die Bewegung folgt der Gleichung $x=u_0\cdot e^{-(\pi/\tau)t}\cdot t$. 17.

Es ist $t_1=\tau/\pi$ und $\alpha_1=\alpha/e=u_0\cdot\tau/(\pi e)=u_0\cdot\tau/8{,}540$.

Bei dem Rückgang besteht zur Zeit ϑ nach der Umkehr noch ein Bruchteil des Ausschlages

$$=e^{-\frac{\pi}{\tau}\vartheta}\left(1+\frac{\pi}{\tau}\vartheta\right),$$ z. B. nach $\vartheta/\tau=$ 2,1 2,9 3,7 noch 1/100 1/1000 1/10000 18.

Dem Grenzzustande entspricht die möglichst rasche Beruhigung.

Vgl. Diesselhorst, Ann. der Ph. 9, 458. 1902.

2. Allgemeiner Fall; $p^2>4KD$.

Wir bezeichnen kürzend $\frac{1}{2}\frac{p}{K}=a$ und $\frac{1}{2K}\sqrt{p^2-4KD}=b$.

Der Bewegungszustand wird dargestellt durch

$$x=u_0\frac{1}{2b}e^{-at}\left(e^{bt}-e^{-bt}\right).\qquad 19$$

Es ist $t_1=\frac{1}{2b}\operatorname{lg\,nat}\frac{a+b}{a-b}$; $\alpha_1=u_0\frac{1}{2b}\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{1}{2}\frac{a}{b}}\left[\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$ 20.

Zur Zeit ϑ nach der Umkehr besteht noch der Bruchteil des Ausschlages

$$\frac{1}{2b}e^{-a\vartheta}\left[(a+b)e^{b\vartheta}-(a-b)e^{-b\vartheta}\right].\qquad 21$$

Für sehr hohe Dämpfung („Kriechen"), wo p sehr groß ist, a und b wenig verschieden sind und merklich $a-b=D/p$ wird, geht Gl. 21 über in (vgl. Gl. 8)

$$e^{(b-a)\vartheta} = e^{-D/p\cdot\vartheta} = e^{-Dw/q^2\cdot\vartheta}. \qquad 22.$$

Je kleiner der Faktor von ϑ, desto langsamer kriecht das Instrument. Die Anwendung auf Drehspulen s. in 98.

109. Messung kurz dauernder Ströme oder entladener Elektrizitätsmengen.

I. Mit dem ballistischen Galvanometer.

Ballistisch nennt man ein Galvanometer, wenn mit ihm kurze hindurchgeleitete Ströme durch Umkehrpunkte der Ausschläge gemessen werden; es muß zu diesem Zweck hinreichend langsam schwingen.

Wird durch ein Galvanometer in einer gegen die Schwingungsdauer sehr kurzen Zeit eine Elektrizitätsmenge Q entladen, so entsteht eine, der Größe Q (dem Stromintegral, $\int i\,dt$, Stromstoß, Strommenge, Entladungsmenge) proportionale Anfangsgeschwindigkeit und ein erster Skalenausschlag, der dieser Geschwindigkeit, also ebenfalls der El.-Menge Q nahe proportional ist. Wenn C der gewöhnliche Reduktionsfaktor (81, 89) und τ die Schwingungsdauer des Galvanometers, so gilt, ohne Dämpfung, für den ersten Ausschlagswinkel α, falls die Direktionskraft bewirkt wird durch:

Torsionselastizität (Drehspule; vollkommen astatisches System)	magnetisches Feld oder durch bifilare Aufhängung
1. $Q = C\dfrac{\tau}{\pi}\,\alpha.$	$Q = C\dfrac{\tau}{\pi}\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha.$ 1a.

Für kleine Winkel werden beide Ausdrücke gleich (25).

Beweis der Gl. 1a. Ist x die Ablenkung zur Zeit t, also $u = dx/dt$ die Winkelgeschwindigkeit, bedeutet ferner D die Direktionskraft, K das Trägheitsmoment, so gilt $du/dt = -D/K\cdot\sin x$. Durch Multiplikation mit $u = dx/dt$ entsteht $u\,du = -D/K\,\sin x\,dx$. Die Integration ergibt

$$\tfrac{1}{2}(u_0^2 - u^2) = D/K\cdot(1-\cos x) = D/K\cdot 2\sin^2\tfrac{1}{2}x,$$

wenn u_0 die Geschwindigkeit für $x=0$ war. Für den Augenblick des größten Ausschlags ($x=\alpha$) ist $u=0$, also $\tfrac{1}{2}u_0^2 = 2D/K\cdot\sin^2\tfrac{1}{2}\alpha$. Mit Rücksicht darauf, daß $D/K = \pi^2/\tau^2$, entsteht hieraus (wie bei dem Pendel) $u_0 = 2\pi/\tau\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha$.

Bedeutet nun q die dynamische Galvanometerkonstante (108 Gl. 7), so erteilte die El.-Menge Q die Winkelgeschwindigkeit $u_0 = Qq/K$. Da ferner nach 108 Gl. 9 $q/K = 1/C\cdot D/K = 1/C\cdot\pi^2/\tau^2$, so ist $u_0 = Q/C\cdot\pi^2/\tau^2$. Andrerseits war $u_0 = 2\pi/\tau\cdot\sin\tfrac{1}{2}\alpha$. Gleichsetzung beider Ausdrücke liefert $Q = C\tau/\pi\cdot 2\sin\tfrac{1}{2}\alpha$.

Gl. 1 wird einfach mit x statt $\sin x$ bewiesen.

Die Beobachtung wird so gut wie immer mit Spiegel und Skale ausgeführt. Ist $\mathfrak{C}$ der für den Skalenabstand geltende

statische Reduktionsfaktor (88), so entspricht dem ersten Ausschlage s das Stromintegral

$$Q = \mathfrak{C} \frac{\tau}{\pi} \cdot s. \qquad 2.$$

Der ballistische Reduktionsfaktor $\mathfrak{B}$ wird also aus dem statischen $\mathfrak{C}$ erhalten als

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{C} \frac{\tau}{\pi} \cdot \qquad 3.$$

Größere Schwingungen reduziert man nach 25, 2 auf den Sinus des halben einseitigen Ausschlages (vgl. den Beweis S. 479). Von einem beobachteten Ausschlage $= s$ Sk.-T. zieht man also die Größe $\frac{11}{32} s^3/A^2$ ab, wo A den Abstand der Skale vom Spiegel bedeutet.

Gedämpfte Schwingung. In Wirklichkeit tritt die Dämpfung hinzu, die indessen, solange sie konstant ist, bei vergleichenden Bestimmungen außer Betracht gelassen werden kann, weil die Proportionalität des Ausschlages mit dem Stromintegral bestehen bleibt. Bei Beobachtungen in einem dauernd geschlossenen Stromkreise beachte man, daß der von den Galvanometerwindungen herrührende Teil der Dämpfung von dem eingeschalteten Widerstande abhängt! Hier, sowie bei einer absoluten Messung von Q kommt also noch das Dämpfungsverhältnis k (27; vgl. auch 108 Gl. 5) in Betracht. Es sei das natürliche log. Dekrement $\Lambda = \lg\mathrm{nat}\, k = 2{,}3026 \cdot \lg\mathrm{brigg}\, k$. Dann ist (vgl. zur Rechnung Tab. 29)

$$Q = \mathfrak{C} \frac{\tau}{\pi} \cdot k^{1/\pi \cdot \mathrm{arctg}\, \pi/\Lambda} \cdot s \quad \text{oder} \quad = \mathfrak{C} \frac{T}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}} k^{1/\pi \cdot \mathrm{arctg}\, \pi/\Lambda} \cdot s, \qquad 4.$$

wenn τ die Schwingungsdauer der ungedämpften, T diejenige der gedämpften Schwingung ist.

Folgt aus 108 Gl. 6. Siehe ebenda die Vereinfachungen der Rechnung.

Im aperiodischen Grenzfall (S. 392 u. 478) gilt $Q = \mathfrak{C}(\tau/\pi) e \cdot s$, wo e die Basis der natürlichen Logarithmen 2,718 bedeutet.

Die El.-Menge Q wird in der Einheit erhalten, welche dem Reduktionsfaktor C oder $\mathfrak{C}$ zu Grunde liegt, z. B. in CGS oder auch in Amperesekunden oder Coulomb, d. h. 0,1 CGS.

Dauer ϑ des Stromstoßes. Ist diese nicht hinreichend klein gegen die Schw.-Dauer T, so wird der Ausschlag um einen Bruchteil $C\vartheta^2/T^2$ zu klein gefunden; der Faktor C hängt von der Stromform ab und ist für konstanten Strom $= 0{,}4$. Für andere Stromformen ohne Minimum ist C kleiner.

Vgl. Dorn, Wied. Ann. 17, 654. 1882; Diesselhorst, Ann. der Ph. 9, 458 u. 712. 1902.

Über Ladungsmengen von Leidener Flaschen s. auch **181**.

Ermittelung der Schwingungsdauer; **28**. Ist auch bei unterbrochenem Stromkreise wegen der Dämpfung eine größere Reihe von Schwingungen nicht zu erhalten, so beobachtet man mehrere Reihen mit jeweilig neuer Anregung durch den kurzen Schluß eines Stromes. Wenn die Dämpfung sehr stark ist, nimmt man diesen Anfangsstoß ebenfalls sehr stark und kann dann den ersten und einige folgende Rückkehrdurchgänge durch die Ruhelage beobachten, die man zweckmäßig durch einen dicken schwarzen Faden oder dgl. markiert hat.

Ermittelung des Dämpfungsverhältnisses. Man regt durch einen kurzen Strom Schwingungen an und beobachtet und reduziert die Umkehrpunkte nach **27**. Ist die Dämpfung so stark, daß nur wenige Umkehrpunkte erhalten werden, so wiederholt man und nimmt das Mittel.

Das Galvanometer muß hierbei mit demselben Widerstande geschlossen sein, wie bei den Messungen der Elektrizitätsmengen. Andernfalls kann man, falls der übrige Teil der Dämpfung nicht zu groß ist, aus dem bei dem Gesamtwiderstande w_1 beobachteten log. Dekr. Λ_1 das bei einem anderen (w_2) geltende Λ_2 berechnen. Wenn nämlich bei unterbrochener Leitung Λ' gilt, so ist $\Lambda_2 = \Lambda' + (\Lambda_1 - \Lambda') \cdot w_1/w_2$. Vgl. **94**.

Vgl. auch **110** Multiplikation und Zurückwerfung.

Empirische Bestimmung des ballistischen Reduktionsfaktors. In der Galvanometerleitung vom Widerstande w bewirke ein bekanntes el. Kraft-Integral $\int E dt$ den ersten Ausschlag s, dann ist $\mathfrak{B} = \int E dt/(ws)$ Der Stoß läßt sich erzeugen mit dem Erdinduktor (**111** I), mit dem Magnetinduktor (**112**, Einleitung) oder durch gegenseitige Induktion zweier Spulen (Anh 28).

II. Messung mit Dauerablenkung.

Kann man die Elektrizitätsmenge Q längere Zeit rasch wiederholt (Nmal in 1 sek) durch das Galvanometer schicken, so entsteht eine dauernde Ablenkung α. Dann ist $Q = C \cdot \alpha/N$ oder $= \mathfrak{C} \cdot s/N$. Hier ist ev. das Korrektionsglied mit $\mathfrak{C}'$ zu berücksichtigen (**83**). Zum Zählen der Entladungen wird häufig das phonische Rad (**57**, 7) gebraucht. S. z. B. Himstedt, Wied. Ann. 22, 279. 1884.

III. Anwendungen.

Eine el. Kraft E wirke während der Zeit t; das Produkt Et heißt Zeitintegral oder kurz Integral der el. Kraft. Ist E nicht konstant, z. B. bei einer Induktionsmaschine, einem Erdinduktor usw., so hat man anstatt Et die Summe der Produkte $E \cdot dt$ über alle Zeitelemente dt, also $\int E dt$ zu setzen.

Wenn w der Widerstand des Kreises, so ist die Stromstärke in jedem Augenblick $i = E/w$ und die in der Zeit t hindurchgegangene Elektrizitätsmenge

$$Q = \frac{Et}{w} \quad \text{oder} \quad Q = \frac{1}{w}\int_0^t E dt. \qquad 5$$

Es ist nicht zu vergessen, daß auch der von einer konstanten el. Kraft hervorgebrachte Strom im Anfang inkonstant ist, wenn der Stromkreis Selbstinduktion enthält. Die Fehlerquelle läßt sich dadurch vermindern, daß man induktionsfreien Widerstandsballast einschaltet und dadurch die Verzögerungskonstante S/w verkleinert. Vgl. Anh. 28.

Durch Messung eines Stromstoßes Q sind folgende Aufgaben lösbar:

1. Bestimmung eines Widerstandes. Entweder in absolutem Maße, wenn Et oder $\int E dt$ gegeben ist (**116** II, III, V), oder vergleichsweise durch Einschaltung der Widerstände in denselben Induktionskreis (**112**).

2. Bestimmung eines Integrales elektromotorischer Kraft; wenn der Widerstand bekannt ist, in absolutem Maße (**114** II; **115** II; **117** 1 u. 2; **118** I) oder vergleichend (**111**). Hierher gehört die

Bestimmung magnetischer Momente. Zu vergleichende Stäbe werden einzeln in die Mitte einer längeren engen Spule plötzlich hineingeschoben oder herausgezogen. Die magn. Momente sind den Stromintegralen d. h. den Ausschlägen proportional. Hat die lange Spule eine gleichmäßige Wickelung von n Windungen/cm, ist w, der Widerstand des Kreises, ebenso wie Q in CGS gemessen ($1\,\Theta = 10^9$ cm/sek), so erhält man das magnetische Moment eines Stabes (vgl. Anh. 26)

$$M = Q \cdot w/(4\pi n) \text{ CGS}. \qquad 6.$$

Man kann die Auschläge leicht multiplizieren (**110** I).

3. Messung kurzer Zeiten (Pouillet), z. B. Schuß-, Fall- oder Stoßzeiten. Der Strom einer konstanten el. Kraft E wird zu Anfang der Zeit (z. B. wann der Hahn des Gewehrs aufschlägt oder die stoßenden Kugeln sich berühren) geschlossen, zu Ende derselben (z. B. wann das Geschoß die Scheibe trifft

oder einen gespannten Draht durchschneidet usw.) unterbrochen. Ist E und der Widerstand w des Stromkreises in CGS bekannt, so bekommt man die Zeit

$$t = Q \cdot w / E \qquad 7.$$

in sek (vgl. aber die Bemerkung vor. S.).

Pendelunterbrecher (Helmholtz). Ein schweres Pendel bewegt bei der ursprünglichen Form des Apparates in kurzen Zeitintervallen zwei Kontakthebel. In der modifizierten neueren Form (s. unten Holborn) wird der eine Stromkontakt von einem mit dem Pendel verbundenen Arm gebildet, der in Quecksilber taucht. Die Kontakte sind mikrometrisch verstellbar. Man kann so z. B. einen Strom eine beliebige kurze Zeit hindurch schließen.

Das Zeitintervall läßt sich erstens aus dem Abstande der Kontakte und der Geschwindigkeit des Pendels ableiten, die man aus der Fallhöhe des Pendels berechnet (**29a**, 3).

Zweitens kann man die Skalenteile am Schlitten des Kontakts nach Gl. 4 empirisch auswerten, muß dabei aber die Zeit des allmählichen Stromanstieges (vor. S.) berücksichtigen. Entweder drückt man diese durch Einschalten eines großen induktionsfreien Widerstandes unter Verstärkung der Batterie genügend herab, oder man eliminiert sie auf folgendem Wege durch zwei Beobachtungen, unter Anwendung eines Nebenschlusses am Galvanometer (Helmholtz, Ges Abhandl. I 429):

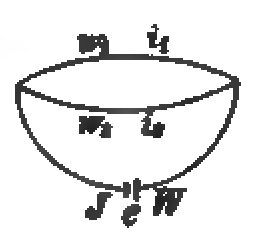
w_1 bedeute die Galvanometerleitung, w_2 ihren Nebenschluß. Durch einen Kommutator bewirkt man, daß der Kontakt einmal in der Leitung W der Batterie e, das andere Mal in w_1 geschlossen und geöffnet wird. Die Zeitdauer t des Kontaktes ist zu bestimmen.

Es ist (**80**, S. 375 u. Anh 28), wenn S der Selbst-Induktionskoeffizient des Galvanometers,

$$J = i_1 + i_2 \qquad e - JW = i_2 w_2 = i_1 w_1 + S di_1/dt,$$

oder

$$[W(w_1 + w_2) + w_1 w_2] i_1 = e w_2 - (W + w_2) S di_1/dt$$



Zur Zeit t nach dem Stromschluß werde

1) i_1 selbst unterbrochen. Dann folgt aus obigem, wenn i_t den Wert von i_1 im Augenblick des Unterbrechens bedeutet,

$$Q = \int_0^t i_1 \, dt = \frac{e w_2 t - (W + w_2) S i_t}{W(w_1 + w_2) + w_1 w_2}. \qquad 8.$$

2) Die Unterbrechung geschehe im Batteriekreise. Dann ist die durch das Galvanometer entladene El.-Menge Q' größer als Q um

$$Q' - Q = S i_t / (w_1 + w_2). \qquad 9.$$

Q und Q' werden nach Gl. 4 aus den Galvanometerausschlägen abgeleitet. Aus Gl. 9 kann man dann $S i_t$ berechnen. Gl. 8 u. 9 zusammen liefern die Zeit

$$t = \frac{1}{e} \frac{Q'(W + w_2)(w_1 + w_2) - Q w_2^2}{w_2}. \qquad 10.$$

Helmholtz, Berl. Mon. Ber. 1871, 295; Schiller, Pogg. Ann. 152, 535. 1874 Anwendung auf oszillierend entstehende Ströme; Holborn, Berl. Sitz.-Ber. 1896, 173 Entstehungszeit von Magnetismus. — Eine Form des Pendelunterbrechers auch bei Edelmann, Ann. der Ph. 3, 274. 1900.

110. Die Multiplikations- und die Zurückwerfungs-Methode (Gaufs und Weber).

Zur Messung kurz dauernder Wirkungen auf ein ballistisches Galvanometer, z. B. besonders zur Messung induzierter Ströme, ist es oft zweckmäßig, die Impulse regelmäßig zu wiederholen. Hierdurch entsteht bei Dämpfung schließlich eine sich konstant erhaltende Bewegung (so, wie die Amplitude eines Uhrpendels, welches bei jeder Schwingung einen Impuls durch das treibende Gewicht erhält, aber durch Reibung und Luftwiderstand gedämpft wird, nach einer Reihe von Schwingungen konstant wird). Die Beobachtung dieses Endzustandes kann man beliebig oft wiederholen und einen genauen Mittelwert nehmen. Ein weiterer Vorzug besteht darin, daß beim Beginn der Beobachtungen nicht notwendig Ruhe bestehen muß.

Wir nehmen an, daß die Schwingungen so klein bleiben, bez. daß der Dämpfer so breit oder bei einem Spulengalvanometer das magnetische Feld so homogen sei, daß ein konstantes Dämpfungsverhältnis besteht.

Größere Ausschläge von Magnetnadeln reduziert man nach S. 490 auf den Sinus des halben Winkels. Vgl. 25, 2 u. Tab. 28.

I. Multiplikationsmethode.

Das Verfahren ist dem Beispiel des Uhrpendels analog. Man erteilt den Impuls; der Körper schwingt hinaus und kehrt zurück. Im Augenblicke, wo er seine Gleichgewichtslage rückwärts durchschreitet, erteilt man den zweiten Stoß in entgegengesetzter Richtung wie den ersten, so daß die Bewegung vermehrt wird. Bei dem folgenden Durchgang durch die Gleichgewichtslage erfolge wieder ein Stoß im ersten Sinne, usf. Die Schwingungen werden allmählich weiter, erreichen aber, je stärker die Dämpfung, desto früher, endlich einen konstanten Grenzwert p.

Kleine Schwingungen vorausgesetzt, ist dieser Grenzbogen proportional dem Geschwindigkeitszuwachs durch den einzelnen Stoß, also auch der jedesmal durch das Galvanometer geflossenen Elektrizitätsmenge.

Der Ausschlag durch einen einmaligen Stoß wird aus der Grenzschwingung p erhalten $= \frac{1}{2}p(k-1)/k$, wenn k das Dämpfungsverhältnis bedeutet (27). Der Ausschlag α, der **ohne Dämpfung** entstehen würde, ist, wenn $\Lambda = \lg\text{nat}\, k$ (vgl. Tab. 29 u. 51),

$$\alpha = \frac{1}{2}p\,\frac{k-1}{k}\,k^{1/\pi\cdot\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}; \text{ für ein mäßiges } k \quad \alpha = \frac{1}{2}p\,\frac{k-1}{\sqrt{k}}.$$

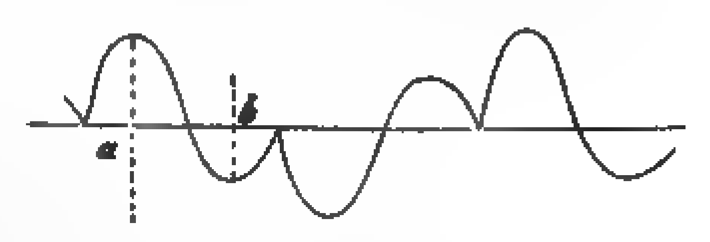
Beweis. Beim Hinausschwingen sei u_0 die Anfangsgeschwindigkeit; dann ist nach 108 Gl. 6 offenbar $u_0 = \pi/\tau\cdot\frac{1}{2}p\cdot k^{1/\pi\cdot\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}$. Bei der Rück-

kehr in die Ruhelage ist die Geschwindigkeit $u_1 = u_0/k$. Die Differenz $u_0 - u_1 = u_0(k-1)/k = u$ ist der durch den Stoß geleistete Ersatz. Diesem allein würde ohne Dämpfung entsprechen der Ausschlag $\alpha = \tau/\pi \cdot u_0(k-1)/k$. Obiges u_0 eingesetzt, gibt den Ausdruck.

II. Zurückwerfungsmethode.

Das Verfahren liefert zugleich das Dämpfungsverhältnis.

Man erteilt einen Stoß, läßt hinaus-, zurück-, nach der anderen Seite hinaus-, und wieder zurückschwingen. In dem Augenblick, in welchem alsdann die Gleichgewichtslage passiert wird, erteilt man den zweiten Stoß in entgegengesetzter Richtung wie den ersten. Dadurch tritt, weil durch die Dämpfung Geschwindigkeit eingebüßt worden ist, Zurückwerfung ein. Nun läßt man abermals zweimal umkehren und wirft bei der nächsten Erreichung der Gleichgewichtslage wieder zurück, usf. Schließlich nehmen die Ausschläge der Nadel konstante Werte an. Dann herrschen also Schwingungen von der in der Figur graphisch dargestellten Form, wo die Zeiten als Abszissen, die Skalenteile, von der Ruhelage der Nadel an gerechnet, als Ordinaten gelten.



Die Herbeiführung dieses gleichförmigen Zustandes kann dadurch beschleunigt werden, daß man den ersten Stoß geeignet abschwächt.

Die Zurückwerfungsmethode liefert also, nachdem man den Mittelwert je aus den entsprechenden Beobachtungen genommen hat, vier Umkehrpunkte auf der Skale. Die Differenz a der beiden äußeren soll der große, die Differenz b der inneren Umkehrpunkte soll der kleine Schwingungsbogen heißen.

Das Dämpfungsverhältnis ist $k = a/b$.

Der Ausschlag α, welchen ein einzelner Stoß ohne Dämpfung hervorbringen würde, ist

$$\alpha = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\,k^{-1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \Lambda/\pi} \quad \text{oder auch} \quad = \frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{\sqrt{ab}}\,\frac{k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}}{\sqrt{k}}.$$

Der Faktor von $\frac{1}{2}(a^2+b^2)/\sqrt{ab}$ kann mit höchstens 1/1000 Fehler bis zu $k = 1{,}1$ vernachlässigt und bis zu $k = 2$ gleich $k^{-\Lambda/\pi^2}$ gesetzt werden (vgl. Tab. 29).

Beweis ähnlich wie oben.

Unter Umständen kann man die „Zurückwerfungsmethode“ zweckmäßig abändern, indem man den Stoß je nach der dritten oder vierten Schwingung erteilt.

Aus α erhält man durch Multiplikation mit π/τ oder $\sqrt{\pi^2+\Lambda^2}/T$ (wo τ ohne, T mit Dämpfung gilt) die durch den

einzelnen Stoß mitgeteilte Winkelgeschwindigkeit. Das Stromintegral Q des Stoßes wird nach **109**, Gl. 1 oder 2 berechnet.

W. Weber, Abh. Sächs. Ges. d. Wiss. I, 341. 1846; oder Weber's Werke Bd. III, 438 u. 441. 1893. — Über den Einfluß der Dauer und Rechtzeitigkeit der Stromstöße siehe S. 480 und Dorn, Wied. Ann. 17, 654 1882.

111. Erdinduktor (W. Weber).

I. Hervorbringung bekannter Integrale von el. Kraft.

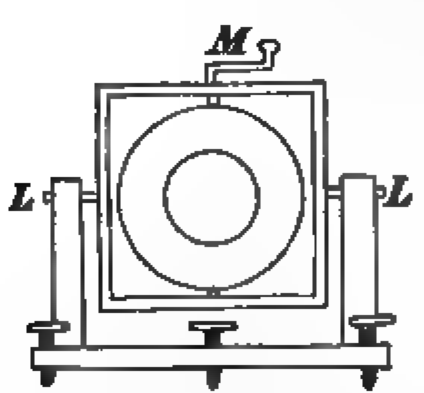
Eine Spule von der Windungsfläche f (106) werde im magnetischen Felde H gedreht; die Fläche bilde vor und nach der Drehung die Winkel φ_1 und φ_2 mit der Richtung von H. Dann ist $\int E dt = H \cdot f(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)$ (Anh. 26). φ ist von 0 bis 360° durchzuzählen. Man kann so beliebige Integrale von el. Kraft hervorbringen. Bei vertikaler Windungsfläche ist H die Horizontalintensität und φ das Azimut gegen den magnetischen Meridian.

Gewöhnlich dreht man um 180° aus der einen in die andere Ostwestlage, dann ist

$$\int E dt = 2 Hf.$$

II. Bestimmung der Inklination.

Die Bestimmung beruht auf der Vergleichung der durch die horizontale und vertikale Komponente des Erdmagnetismus in der Spule induzierten Stromstöße, wenn man die Windungen aus der einen zur Komponente senkrechten Lage rasch in die andere umlegt. Das Verhältnis der Galvanometerausschläge beider Komponenten gibt die Tangente des Inklinationswinkels.



Die Galvanometernadel ist durch den Multiplikator, bez. noch durch einen Kupferrahmen gedämpft. Die Dämpfer sollen hinreichend breit sein, daß das Dämpfungsverhältnis bei beiden Induktionen gleich groß ist. Andernfalls entstehen bei der Multiplikationsmethode Korrektionen, bei der Zurückwerfung weniger.

Vertikale Komponente. Man legt die Axe M horizontal und orientiert sie mit Hilfe einer Magnetnadel in den magnetischen Meridian. Mittels einer Wasserwage wird die Axe LL horizontal gemacht.

Nun wird mit der hinteren Fußschraube die Drehaxe M der Spule genau horizontal gelegt, d. h. so, daß die Luftblase der Wasserwage bei dem Umsetzen auf den beiden gleich dicken Zapfen von M dieselben Teilstriche einnimmt. Jetzt wird ein Satz von Induktions-Beobachtungen ausgeführt, wobei die Spule

jedesmal rasch von dem einen zum anderen Anschlag um 180° gedreht wird.

Horizontale Komponente. Man stellt die Spule aufrecht (Fig.), lehnt sie an einen der Anschläge und setzt auf die Axe M eine Libelle nordsüdlich auf. Die hintere Fußschraube wird so gedreht, daß die Luftblase in den beiden Anschlagstellungen der Spule dieselben Teilstriche einnimmt. Nun wird wie vorher ein Satz Induktions-Beobachtungen ausgeführt, möglichst unter Innehaltung der Drehgeschwindigkeit.

Induktionsmethoden. Beide Induktionssätze werden in gleicher Weise ausgeführt: mit Multiplikation, oder besser mit Zurückwerfung (**110 II**). Die erstere setzt man entweder bis zu einem konstanten Grenzbogen fort, oder, wobei man aber mit ruhendem Galvanometer beginnen muß, man gibt bei beiden Induktionen dieselbe Anzahl von Stößen und addiert beide Male eine gleiche Anzahl von Bögen gleicher Ordnungszahl. Diese Summe, oder auch der Grenzbogen, oder endlich bei der Zurückwerfung der Ausdruck $(a^2+b^2)/\sqrt{ab}$, werde mit S bezeichnet, in den beiden Axenstellungen durch den Index v und h unterschieden, so ist die Inklination J gegeben durch

$$\operatorname{tg} J = S_v/S_h.$$

Prüfungen. Die Windungsfläche soll in den Anschlagstellungen senkrecht auf der zu bestimmenden erdmagnetischen Komponente stehen. Daß die Stellungen um 180° differieren, wird mit einem versilberten Planglase auf der Axe M erkannt. Im übrigen wird die Prüfung des Rahmens mit einer Wasserwage und einer Bussole meistens ausreichen Wenn nicht, so beschränkt man mit dem Ringsektor (Fig.) den Spielraum der Drehung auf etwa 80°. Induktionsbeobachtungen aus beiden Stellungen geben dann, wenn die Anschläge unrichtig stehen, einen ungleichen Nadelausschlag.

Ein Fehler von 1° in den Stellungen kommt kaum in Betracht. Die Axe MM dagegen ist sorgfältig zu orientieren.

Man vermeidet Fehlerquellen leichter, wenn man nicht mit vertikaler und horizontaler Drehaxe arbeitet, sondern wenn man aus einigen Beobachtungen mit einer der Inklination nahe gelegenen Axenrichtung die genaue Inklinationsrichtung der Axe bestimmt, in welcher keine Induktion stattfinden würde (Schering). Die Axen-Neigung wird mit aufgesetztem Spiegel durch den Theodolit oder bei kleinen Instrumenten mit Hilfe eines

Vertikalkreises ermittelt, der am einen Ende der Axe LL befestigt ist.

Vgl. W. Weber, Werke, Bd. II, 277. 1892; Schering, Gött. Nachr. 1882, 345.

Über eine Nullmethode, die die Axenneigung in die Richtung der Inklination mittels des Telephons aus dessen Schweigen bei rascher Rotation des Induktors beurteilt, vgl. G. Meyer, Wied. Ann. 64, 742. 1898.

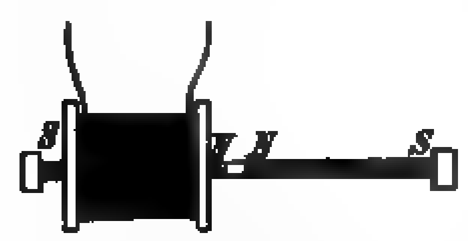
Ein Differential-Erdinduktor, dessen zwei gleiche Rollen mit vertikaler und horizontaler Drehaxe synchron rasch rotieren und das Verhältnis der el. Kräfte E_h und E_v geben, welches auf Widerstandsmessungen zurückgeführt wird, bei Leonh. Weber, Berl. Sitz.-Ber. 1885, S. 1105.

112. Magnet-Induktor (Gauß; Weber).

Integrale elektromotorischer Kraft von beliebigem Betrage kann man durch die gegenseitige Verschiebung eines Magnets und einer Spule erhalten. Wechselt man zwischen zwei bestimmten Stellungen, so entstehen je nach der Richtung entgegengesetzte Integralwerte von gleicher Größe.

Absoluter Integralwert. Das Einschieben eines Magnets vom Magnetismus M (76) aus größerer Entfernung in die Mitte einer längeren, engen Spule, welche n Windungen auf jeder Längeneinheit hat, liefert den Wert $\int E dt = 4\pi n \cdot M$ (Anh. 26).

Doppelmagnet-Induktor. Die Anordnung der Figur ist als Etalon konstanter Induktionsstöße besonders geeignet. Der Doppelmagnet wird ganz durch die Spule oder die Spule über den Magnet geschoben. Die Endstellungen sind mittels der verstellbaren Anschläge oder durch Filzstücke u. dgl. so reguliert, daß in ihrer Nähe keine Induktion stattfindet. Selbstverständlich darf die Verschiebung das Galvanometer nicht durch Fernwirkung beeinflussen. Bei der Berechnung des el. Kraftintegrals aus den Ausschlägen sind, wenn man nicht wärmeunempfindliche Leiter anwendet, Temperaturänderungen zu berücksichtigen.



Widerstandsbestimmung. Die Methode hat nur historisches Interesse. w_0 sei der Widerstand Induktor + Galvanometer; zugeschaltet werde ein Widerstand w; die Nadelausschläge seien bezüglich α_0 und α. Dann kann man aus $w/w_0 = (\alpha_0 - \alpha)/\alpha$ entweder w_0 durch w oder w durch w_0 ausdrücken. Wenn endlich R statt w zugeschaltet den Ausschlag α_1 gibt, so ist $w = R \cdot \alpha_1/(\alpha_0 - \alpha_1) \cdot (\alpha_0 - \alpha)/\alpha$. Über Rücksichtnahme auf die mit dem Widerstande veränderliche Dämpfung s. 109 I, 108 Gl. 5 oder 110 II.

Auch für Nullmethoden (92 u. 98) sind Induktionsstöße brauchbar, falls nicht die Widerstände stärkere Selbstinduktion haben.

113. Magnetischer Induktionskoeffizient eines Stabes in schwachem Felde.

Das magn. Moment m, welches in einem Stabe von der Gestalt gewöhnlicher Magnete durch ein magnetisches Feld $\mathfrak{H}$ induziert wird, ist bei Feldstärken von der Ordnung des horizontalen Erdmagnetismus bis zu vielleicht 4 CGS nahe der Feldstärke proportional $m = p \cdot \mathfrak{H}$. Verstärkungs- und Schwächungs-Koeffizienten permanenter Magnete sind nahe gleich. Bei gewöhnlichen Magneten beträgt die Änderung für die Feldstärke 1 CGS etwa 1,5 bis 2 CGS auf 1 ccm Stahl, oder 0,2 bis 0,3 auf 1 gr. Die Zahl hängt von Gestalt, Härte, chemischer Beschaffenheit ab; sie ist für unmagnetisches Material etwas größer als für magnetisiertes.

Ein Magnet hat also in der Nordsüdlage einen um einige Hundertel CGS auf das Gramm Stahl größeren Magnetismus als in der Ostwestlage. Das Verhältnis $\varDelta = m/M$ des Überschusses m zum eigenen Magnetismus M des Stabes heißt Koeffizient der Induktion durch die Horizontalkomponente (Lamont).

1. Messung mit dem Erdmagnetismus (Weber). Eine um 180° drehbare enge Spule, welche länger sein soll als der Magnetstab, ist durch ein Galvanometer geschlossen. Man dreht aus der einen Meridianlage in die andere. Der Ausschlag betrage: α_0, wenn die Spule allein gedreht wird; α, wenn sie mit dem in der Spulenaxe befestigten Stabe gedreht wird; α_1, wenn ein Stäbchen vom bekannten Magnetismus M_1 (76) aus einiger Entfernung in die leere Spule bis zur Mitte rasch eingeschoben oder von hier herausgezogen wird.

Der durch die nordsüdliche Lage in dem ersteren Stabe induzierte Magnetismus ist dann $m = \frac{1}{2} M_1 (\alpha - \alpha_0)/\alpha_1$; der durch das Feld Eins induzierte Magnetismus ist $p = m/H$, wenn H den Erdmagnetismus bedeutet (73; Tab. 38); endlich der relative erdmagnetische Induktionskoeffizient $\varDelta$, wenn M den ganzen Magnetismus bedeutet, $\varDelta = m/M$.

Man wird für diese Beobachtungen meistens die Multiplikation gebrauchen (110). Bei schwächerer Dämpfung kann man Zeit sparen, wenn man nicht bis zu konstantem Grenzausschlage induziert, sondern in allen Fällen für α den gleichvielten Schwingungsbogen oder besser die Summe einer gleichen Anzahl Bogen von denselben Ordnungsnummern setzt.

2. Untersuchung mit einem Strom. Anstatt Spule und Magnet im magn. Felde umzulegen, läßt man ein Feld dadurch entstehen oder verschwinden, daß man in einer zweiten über-

gewickelten oder geschobenen Spule einen gemessenen Strom i schließt oder öffnet (oder rasch kommutiert). Die innere Spule erfährt dann eine el. Kraft und erzeuge einen Galvanometerausschlag erstens durch die äußere Spule allein α_0, dann durch Spule und Magnet zusammen α und endlich α_1 durch das plötzliche Einschieben eines bekannten kleinen Magnets M_1. Das magnetische Feld in der Stromspule ist $\mathfrak{H} = 4\pi n i$, wenn n die Windungszahl auf ihrer Längeneinheit vorstellt. Man rechnet wie unter 1; es ist dann das vom Felde Eins induzierte Moment $p = m/\mathfrak{H}$.

Vgl. F. K., Wied. Ann. 22, 417. 1884; Sack, ib. 29, 53. 1886.

114. Bestimmung eines starken magnetischen Feldes.

Erzeugung starker Felder.

In einer Kupferspule kann man ohne erhebliche Kühlung bis zu einer Feldstärke von etwa 800 Gaufs oder CGS kommen, mit starker Kühlung bis etwa 1500.

Zwischen den Polen eines Elektromagnets mit kegelförmig zugestutzten Polschuhen kann die Feldstärke bis zu 40000 betragen. Die höchste Stärke liefert ein Kegel vom halben Winkel 55°, ein möglichst gleichmäßiges Feld ein solcher von 40°. — Wegen der Selbstinduktion verstreicht bis zur Erreichung des höchsten Wertes nach dem Stromschluß eine merkliche, unter Umständen Minuten erreichende Zeit. Umgekehrt ist der Extrastrom beim Unterbrechen imstande, die Isolation zu gefährden, weswegen starke Ströme nicht zu plötzlich unterbrochen oder kommutiert werden sollen (Kohleausschalter). (Stefan, Wied. Ann. 38, 440. 1889; Ewing u. Low, Phil. Trans. (A) 180, 221. 1889; du Bois'scher Ringelektromagnet, Wied. Ann. 51, 537. 1894; do. Halbring-El.-magnet, Ann. der Ph. 1, 199. 1900.)

I. Bestimmung in einer Spule durch Rechnung.

In einer im Verhältnis zu ihrer Länge engen gleichmäßig bewickelten Spule von n Windungen auf jedem cm der Länge bewirkt der Strom i CGS (81. 87. 88. 89) das magnetische Feld $\mathfrak{H} = 4\pi n i$ Gaufs.

Vorausgesetzt wird hierbei eine so große Entfernung a vom Ende, daß r^2/a^2, wenn r der Spulenhalbmesser, gegen 1 verschwindet. Sonst ist das Feld in der Axe um den Bruchteil $\frac{1}{2}(\sqrt{r^2+a^2}-a)/\sqrt{r^2+a^2}$ kleiner und beträgt also in der Endfläche $2\pi n i$, da für $a = 0$ jener Bruchteil $= \frac{1}{2}$ wird.

In einem Punkte der Axe einer kürzeren Spule von der Länge l, der um a von der einen Endfläche absteht, ist die Feldstärke

$$2\pi n i\left(a\cdot(r^2+a^2)^{-1/2} + (l-a)\cdot[r^2+(l-a)^2]^{-1/2}\right),$$

also mitten $4\pi n i \cdot l/\sqrt{l^2+4r^2}$ und am Ende $2\pi n i \cdot l/\sqrt{l^2+r^2}$

II. Durch Induktion (Verdet).

Ein kleiner ebener Leiter (Kreisdraht) von der Windungsfläche f wird, mit seiner Ebene senkrecht zu den Kraftlinien, aus größerer Entfernung plötzlich in das Feld hineingestoßen oder aus demselben herausgezogen. Er ist mit einem Spiegel-Galvanometer von nicht zu kleiner Schwingungsdauer verbunden.

Ist $\mathfrak{H}$ die Stärke des Feldes, so wird dadurch eine el. Kraft von dem Integralwert $f\mathfrak{H}$ induziert. (Herumdrehen um 180° statt herausziehen würde $2f\mathfrak{H}$ bedeuten.)

Das Galvanometer gebe den in Skalenteilen gemessenen ersten Ausschlag s. Ergibt die Multiplikation (**110** I) die Grenzschwingung p_0, so ist, wenn k das Dämpfungsverhältnis, $s = \frac{1}{2}p(k-1)/k$. Dann hat man

$$\mathfrak{H} = P \cdot s/f.$$

Bestimmung der Versuchskonstante P.

1. Mit dem Erdinduktor (**111**). In derselben Leitung befinde sich ein Erdinduktor von der Fläche f_0 konstant eingeschaltet. Drehung des Induktors um 180° erzeuge den Ausschlag s_0; H sei die erdmagnetische Intensität senkrecht zu der Windungsebene des Induktors (**73**). Dann ist

$$P = 2Hf_0/s_0.$$

2. Mit dem Magnetinduktor. Eine gestreckte Drahtspule mit der Windungszahl n auf jeder Längeneinheit ihrer Axe sei mit dem kleinen Induktor und dem Galvanometer konstant eingeschaltet. Ein kurzer Magnet von dem Moment M (**76**) werde rasch in die Mitte der Spule eingeschoben oder von dort herausgezogen. Die Nadel mache den ersten Ausschlag s'. Dann ist (vgl. **109** III 2 u. Anh. 26)

$$P = 4\pi n M/s'.$$

3. Aus dem Reduktionsfaktor des Galvanometers. Der gewöhnliche Reduktionsfaktor auf CGS sei $= C$ (**81**; **89**) oder der Reduktionsfaktor für 1 Skalenteil $\mathfrak{C} = C/(2A)$, wenn A den Skalenabstand bedeutet (**83**). Es sei ferner k das Dämpfungsverhältnis, $\Lambda = \operatorname{lognat} k$ (**27**), und endlich τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel. w bedeute den Widerstand Galvanometer + kleiner Induktor in absolutem Maße, d. h. den in Ohm ausgedrückten Widerstand multipliziert mit 10^9 (Anh. 29). Dann ist

$$P = \mathfrak{C} \cdot w\tau/\pi \cdot k^{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\pi/\Lambda}.$$

Über die Berechnung des Exponentialfaktors s. Tab. 29 und die Bemerkung zu 108 Gl. 6.

Beweise. Das el. Kraft-Integral ist bei der Messung $\mathfrak{H} f$ (Anh. 26), bei der ersten P-Bestimmung $2 H f_0$ (111 I), bei der zweiten $4 \pi n M$ (Anh. 26). Da der Widerstand konstant ist, so folgt sofort

$$P = \mathfrak{H} f/s = 2 H f_0/s_0 = 4 \pi n M/s'.$$

Der Ausdruck unter 3 ergibt sich daraus, daß einerseits die Elektrizitätsmenge des Stoßes $Q = \mathfrak{H} f/w$, andererseits nach 109 Gl. 4

$$Q = \mathfrak{C} \tau/\pi \cdot s \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}.$$

III. Mit einem kleinen Bifilargalvanometer.

Auf horizontale Felder beschränkt, nach der Methode von Weber; 106 II.

Ein kleines, mit seiner Windungsfläche f den Kraftlinien paralleles Bifilargalvanometer (88 a) erfahre, von dem Strome i CGS durchflossen, durch das Feld die Ablenkung φ; dann ist $\mathfrak{H} = \operatorname{tg} \varphi \cdot D/(f i)$. Zur Strommessung kann z. B. ein Westonzeiger (85, 2) dienen.

Vgl. Himstedt, Wied. Ann. 11, 828. 1880; Stenger ib. 33, 312. 1888.

IV. Aus der Dämpfung einer schwingenden Spule.

Eine kleine eisenfreie Spule vom Trägheitsmoment K cm²·gr und der Windungsfläche f cm², die Windungsebene parallel der Feldrichtung, habe ungeschlossen die Schwing.-D. τ und das nat. log. Dekrement Λ_0; mit einem Gesamtwiderstand $w\,\Theta = 10^9 w$ cm/sek geschlossen das nat. log. Dekr. Λ (27). Dann ist die Feldstärke

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{f} \sqrt{\frac{2 w \cdot 10^9 K (\Lambda - \Lambda_0)}{\tau \sqrt{(1 + \Lambda^2/\pi^2)}}} \text{ Gauß.}$$

Vgl. 108 Gl. 7b u. 8 u. Tab. 29.

V. Aus der Drehung der Polarisationsebene nach 107.

Man benutzt z. B. Platten aus schwerem Flintglase in durchgehendem oder zwischen den versilberten Endflächen reflektiertem Licht. Schwach keilförmige Gestalt gestattet, störende Reflexe abzublenden. Die Platte wird in dem bekannten magnetischen Felde einer Spule oder durch Vergleichung mit einer Schwefelkohlenstoffschicht geeicht.

Vgl. Quincke, Wied. Ann. 24, 606. 1885; H. du Bois, Wied. Ann. 51. 549. 1894; magnet. Kreise S. 328, Berl. 1894.

VI. Aus der Steighöhe magnetischer Flüssigkeiten (Quincke).

In dem magnetischen Felde befinde sich die Oberfläche einer Lösung eines Eisen-, Mangan- oder Nickelsalzes in einem Steigrohre, welches mit einem außerhalb des Feldes liegenden

Rohre kommuniziert. Durch das magnetische Feld werde die Höhendifferenz h zwischen den beiden Niveaus bewirkt. Dann ist

$$\mathfrak{H} = C \cdot \sqrt{h}.$$

C wird für die betr. Flüssigkeit in einem bekannten Felde bestimmt. Kennt man den Magnetisierungskoeffizienten $\varkappa$ (Anh. 22) der Flüssigkeit, so ist, wenn σ ihr spez. Gewicht und g die Schwerbeschleunigung, $C = \sqrt{2 g \sigma / \varkappa}$. Konzentrierte Eisenchloridlösung hat etwa (h in cm) $C = 7000$.

Quincke, Wied. Ann. 24, 347. 1885; du Bois ib. 35, 137. 1888; auch: magnetische Kreise S. 333. 1894.

VII. Aus Widerstands-Änderungen des Wismuts.

Der Widerstand von Wismut wächst im magnetischen Felde (Righi): für kleines $\mathfrak{H}$ beschleunigt, von etwa $\mathfrak{H} = 10000$ Gauss oder CGS an aber fast gleichförmig, bei $\mathfrak{H} = 20000$ etwa das Doppelte des Anfangswertes erreichend. Eine ebene Spirale aus gepreßtem Wismutdraht, zur Vermeidung von Induktion am besten bifilar gewunden, erfährt bei Querstellung gegen die Kraftlinien die stärkste Änderung.

Der Gang wird aber von der Temperatur beeinflußt. Nach Henderson beträgt im Felde $\mathfrak{H}$ CGS für reines gepreßtes Wismut das Verhältnis des Widerstandes zu dem im unmagnetischen Felde:

	$\mathfrak{H} = 0$	2000	4000	6000	8000	10000	12000 CGS
bei 18°	1,00	1,046	1,14	1,24	1,36	1,48	1,59
bei 0°	1,00	1,064	1,18	1,32	1,46	1,59	1,73.
	$\mathfrak{H} = 0$	15000	20000	25000	30000	35000	40000 CGS
bei 18°	1,00	1,80	2,09	2,39	2,70	3,03	3,37.

Ferner $w_{18}/w_0 = 1{,}070$ im unmagnetischen Felde.

Du Bois und Wills fanden für $\mathfrak{H} = 37500$ das Verhältnis 4 bei 0°, 6 bei −79°, 10 bei −115°, 230 bei −180°.

Das Messungsverfahren ergibt sich, wenn man den Widerstand als Funktion des magnetischen Feldes kennt, von selbst. Die Tabelle oder Kurve muß, ev. mit Rücksicht auf die Temperatur, empirisch hergestellt werden.

Vgl. Lenard, Wied. Ann. 39, 619. 1890; Henderson, Wied. Ann 53, 912. 1894; du Bois, magnet. Kreise S 333, Berl. 1894; du Bois u. Wills, Verh. D. Ph. Ges. 1, 168. 1899.

115. Untersuchung magnetisierbaren Materials. Magnetisierungskoeffizient, Permeabilität, Induktion.

Vgl. auch Anh. 21 bis 22b.

Entsteht in einem magnetischen Material durch eine daselbst herrschende magnetisierende Intensität $\mathfrak{H}$ die „Magnetisierung", d. h. das

magnetische Moment der Volumeinheit $\mathfrak{J}$, so nennt man $\varkappa = \mathfrak{J}/\mathfrak{H}$ den Magnetisierungs-Koeffizient (Suszeptibilität) des Körpers.

$\mu = 1 + 4\pi\varkappa$ heißt Permeabilität, $\mathfrak{B} = \mathfrak{H}\mu$ Induktion. Vgl. S. 497.

$\varkappa$ (oder μ) ist nur für diamagnetische sowie schwach magnetische Körper eine Konstante. Für Eisen steigt $\varkappa$ mit wachsender Feldstärke von einem kleinen, den schwächsten Feldern zukommenden Anfangswerte zunächst zu einem Maximalwerte, nimmt dann wieder ab und wird schließlich Null, da auch durch eine unendlich starke magnetisierende Kraft nur ein endlicher Grenzwert der Magnetisierung erzielt wird. Dieser beträgt bei Zimmertemperatur etwa 1700 CGS für Schmiedeeisen, 1250 für Gußeisen und Kobalt; 540 für Nickel. Beste Heusler'sche Legierung Mn, Al, Cu, längere Zeit bei etwa 110° behandelt, nähert sich bezüglich des Maximums von $\varkappa$ dem geglühten Gußeisen und erreicht etwa 2/3 von dessen Grenzwert. Vgl. Verh. D. Ph. Ges. 5, 220. 1903 u. Schriften d. Naturf. Ges. Marburg 13, 237. 1904; auch Sonderabdruck.

Mit steigender Temperatur nimmt der Grenzwert ab; Eisen ist bei 800°, Nickel schon bei 300° nicht mehr magnetisierbar.

Der Koeffizient der Magnetisierung durch geringere Kräfte wächst bei mäßiger Temperaturerhöhung zunächst an.

Größe und Gang des Magnetisierungs-Koeffizienten werden außer durch den mechanischen Zustand durch chemische Beimengungen besonders stark beeinflußt. Über einige Eisensorten s. Tab. 37.

Manche Manganstahl- und Nickelstahllegierungen haben zwei Zustände kleiner bez. höherer Magnetisierbarkeit, die ihnen durch vorausgegangene Erhitzung bez. Abkühlung erteilt werden.

Entmagnetisierende Intensität. In einem Körper mit freiem Magnetismus bestehen vermöge des eigenen magnetischen Zustandes Kräfte, die der Magnetisierung entgegenwirken und die man aus der Verteilung des freien Magnetismus als dessen Wirkung nach innen gemäß dem Coulomb'schen Gesetz würde berechnen können. Es besteht also, mit Ausnahme eines gleichförmig nach seiner Axe magnetisierten Ringes oder unendlich langen Stabes, in jedem magnetischen Körper eine innere „entmagnetisierende Intensität" H_i.

Eine von außen wirkende magnetisierende Intensität H ist folglich um H_i zu verkleinern, um die wirkliche magnetisierende Intensität $\mathfrak{H}$ zu erhalten. Also wird

$$\mathfrak{H} = H - H_i. \qquad 1.$$

H_i ist im allgemeinen durch den Körper hindurch in ungleicher, von der Gestalt und auch von der Stärke der magnetisierenden Kraft abhängiger Weise verteilt. Nur in einem gleichförmig magnetisierten Ellipsoid herrscht nach der Theorie ein konstanter, der Magnetisierung proportionaler Wert $H_i = P \cdot \mathfrak{J}$, wo P in jedem Falle eine Konstante ist. Hier gilt also

2. $\mathfrak{H} = H - P\mathfrak{J}$ und $\mathfrak{J} = \varkappa\mathfrak{H} = \varkappa(H - P\mathfrak{J})$ oder $\mathfrak{J} = \varkappa H/(1 + \varkappa P)$. 3

Ein Ellipsoid muß sich demnach in einem konstanten magnetischen Feld gleichförmig magnetisieren.

Der „Entmagnetisierungsfaktor“ P hängt von der Lage zu den Kraftlinien und vom Axenverhältnis ab:

Rotationsellipsoid. Die Magnetisierung finde nach der Rotationsaxe l statt, der Rotationsdurchmesser sei $=d$. Es sei $d<l$, also die Exzentrizität $e=\sqrt{1-d^2/l^2}$. Dann ist nach Neumann (Vorles. üb. Theor. d. Magn. S. 74)

$$P=4\pi\frac{1-e^2}{e^3}\cdot\left(\tfrac{1}{2}\lg\mathrm{nat}\frac{1+e}{1-e}-e\right). \qquad 4.$$

Ist das Ellipsoid sehr lang gestreckt, d. h. d/l klein und also e fast gleich 1, so gilt nahe $P=4\pi\frac{d^2}{l^2}\left(\lg\mathrm{nat}\frac{2l}{d}-1\right)$. — Für eine Kugel ist $P=\frac{4}{3}\pi=4{,}19$, für einen relativ unendlich langen Stab $=0$, für eine dünne, breite, der Dicke nach magnetisierte Platte hat es den größten Wert 4π.

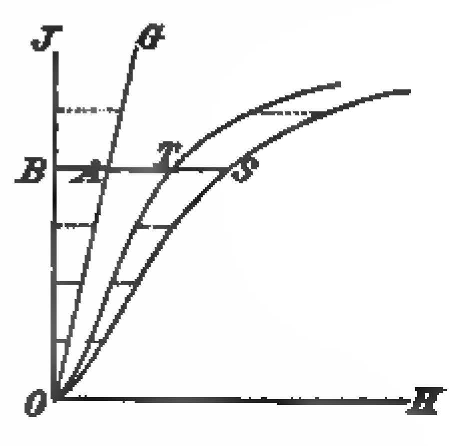
Cylinder. Für einen Cylinder l, d gilt dieselbe Formel um so näher, je größer l/d ist (Kirchhoff, Oberbeck). Die Abweichungen hängen u. a. von der Feldstärke und Magnetisierbarkeit ab.

Tabelle für den Entmagnetisierungsfaktor P (Ellipsoid).

l/d	P	$P\cdot l^2/d^2$	l/d	P	$P\cdot l^2/d^2$	l/d	P	$P\cdot l^2/d^2$
5	0,701	17,5	40	0,0266	42,5	100	0,0054	54,0
10	,255	25,5	50	,0181	45,3	150	,0026	58,3
15	,135	30,4	60	,0132	47,5	200	,0016	64,0
20	,085	34,0	70	,0101	49,5	300	,0007	67,5
25	,059	36,7	80	,0080	51,2	400	,0004	72,0
30	,043	38,8	90	,0065	52,5	500	,0003	75,0

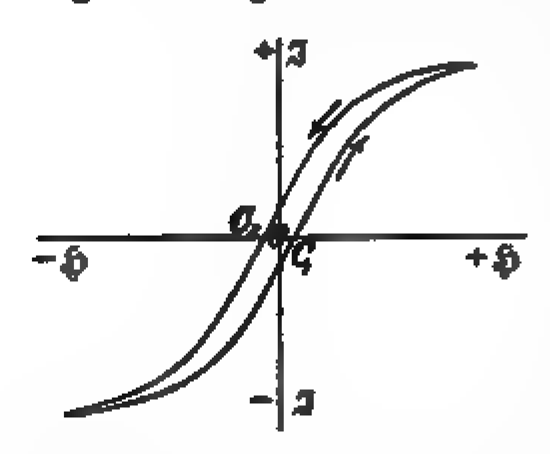
Aus du Bois, magn. Kreise S. 45. Über Cylinder s. besonders Benedicks, Ann. der Ph. 6, 726. 1901; vgl. auch Holborn, Berl. Sitz. Ber. 1898, 159.

Graphische Darstellung. Scheerung. Man kann die beobachteten Magnetisierungen $\mathfrak{J}$ als Ordinaten zu den Intensitäten H auftragen und die Kurve OS ziehen, welche aber nach dem früheren nicht nur von dem Material, sondern auch von der Gestalt des untersuchten Körpers abhängt. Zu $\mathfrak{J}$ als bloßer Eigenschaft des Materials gehört als Abszisse die wirkliche magnetisierende Intensität $\mathfrak{H}=H-P\cdot\mathfrak{J}$ (Gl. 2). Die entsprechende Kurve OT kann aus OS durch folgende „Scheerung“ erhalten werden (Lord Rayleigh). Man zieht eine Gerade OG, bei welcher zur Abszisse H die Ordinate $\mathfrak{J}=H/P$ d. h. zur Ordinate $\mathfrak{J}$ die Abszisse $P\cdot\mathfrak{J}$ gehört. Durch einen Punkt S der Kurve legt man dann eine Parallele SAB zur Abszisse und trägt eine Strecke $ST=AB$ von S aus nach links ab; dann ist offenbar T ein Punkt der gesuchten Kurve. Denn die Abszisse zu T ist ja gegen H um AB, d. i. um $P\cdot\mathfrak{J}$ verkleinert. Phil. Mag. 22, 175. 1886.



Streng gilt diese Betrachtung nur für das Ellipsoid, welches daher den Ausgangspunkt für Untersuchungen von Materialien bildet.

Koerzitivkraft, Hysterese. Wegen der magnetischen Härte gehört zu einer bestimmten Feldstärke bei absteigender Magnetisierung ein stärkerer Magnetismus, als bei zunehmender. Geht man mit der Magnetisierung also wiederholt aufwärts, dann abwärts durch Null hindurch zu entgegengesetztem Magnetismus und wieder rückwärts, so stellen die Beobachtungen sich durch zwei Kurven dar, welche eine Schleife bilden etwa von der Gestalt der Figur, falls man hoch hinauf magnetisiert hat.



Als Maß der Koerzitivkraft betrachtet man die Intensität OC_1 oder OC_2 (Fig.), welche in einem Stabe, der ganz ruhig gehalten wird, nach einer Magnetisierung in der anderen Richtung den unmagnetischen Zustand herstellt (Hopkinson) Bei weichem Eisen etwa $=1$, steigt sie für gehärteten Wolframstahl auf etwa 50—70.

Die Höhe der Ordinate am Nullpunkte von $\mathfrak{H}$ stellt die nach dem Aufhören der magn. Kraft zurückbleibende Magnetisierung des Materials dar, kurz als seine „Remanenz" bezeichnet.

Das Flächenstück zwischen den beiden Kurven ist die molekulare Arbeit, welche der magnetisierende Kreisprozeß in der Volumeinheit des Materials verrichtet, und die sich in Wärmeentwicklung äußert. Sie kommt bei dem Betriebe elektromagnetischer Maschinen als „Energievergeudung" in Betracht. Vgl. Warburg, Wied. Ann. 13, 141. 1881. Man mißt die Fläche mit dem Planimeter oder ausgeschnitten mit der Wage.

Als Ordinate wird, besonders für technische Anwendungen, statt der Magnetisierung oft die Induktion $\mathfrak{B}=\mathfrak{H}+4\pi\mathfrak{J}$ gewählt. Die Remanenz gilt dann auch für $\mathfrak{B}$. Das Flächenstück der Schleife gibt, durch 4π dividiert, die Energievergeudung.

Näheres über die Messungen und über andere Methoden, besonders auch für technische Untersuchungen s. bei du Bois, l. c.; Ewing, magn. Induktion, übers. v. Holborn u. Lindeck 1892; Erich Schmidt, magn. Untersuchung d. Eisens usw., Halle 1900, am letztgenannten Orte auch die in der P. T Reichsanstalt gebrauchten Methoden sowie neue Angaben über Eisensorten.

I. Bestimmung mit dem Magnetometer.

Man wendet langgestreckte Stäbe an, damit die entmagnetisierende Kraft klein ist; Erschütterungen sind zu vermeiden.

Der Stab wird in eine Spule gebracht, deren Strom für die Strecke des Stabes ein gleichförmiges magnetisches Feld

gibt (114 I), und das magn. Moment M bei verschiedener Feldstärke gemessen (76). Wenn V das Stabvolumen, so ist die auf die Volumeinheit bezogene Magnetisierung $\mathfrak{J} = M/V$.

Der Magnetisierungskoeffizient (Suszeptibilität) $\varkappa$ des Materials findet sich dann aus der Feldstärke H als $\varkappa = \mathfrak{J}/(H - P\mathfrak{J})$, und zwar giltig für die magnetisierende Intensität $\mathfrak{H} = H - P\mathfrak{J}$. Über den Entmagnetisierungsfaktor P s. S. 495, und ebenda über das Verfahren der Scheerung einer Kurve. Zu genauen Bestimmungen wird das Material in Gestalt eines gestreckten Rotationsellipsoids angewandt.

Die der Stromstärke proportionale Wirkung der Spule selbst auf die Nadel wird für eine passende Stromstärke gemessen und danach in Rechnung gesetzt; oder man kompensiert sie durch eine jenseit des Magnetometers angebrachte zweite Spule, die ebenfalls den magnetisierenden Strom erhält.

Der Strom in den Spulen sowie der Magnetismus des Stabes ändert, wenn nicht genau orientiert ist, auch die Direktionskraft der Nadel. Um für die Spulen die Abwesenheit dieses Fehlers festzustellen, beobachte man, einmal ohne Strom und demnächst mit starkem Strom in den Spulen, die Schwingungsdauer oder einen durch dasselbe ablenkende Moment bewirkten Ausschlag der Nadel. Erhard, Ann. d. Ph. 9, 724. 1902. — Beim Kommutieren fallen die Fehler heraus; vgl. S. 349.

II. Bestimmung durch induzierte Ströme.

„Induktion". Die Magnetisierung des Stabes sei $= \mathfrak{J}$, das sie bewirkende Feld im Sinne von S. 494 $= \mathfrak{H}$. Dann ist $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ die Dichte der magn. Kraftlinien und heißt die magnetische Induktion im Stabe. Über die Bedeutung s. Anh. 21a und 22b. Wenn der Körper an der betrachteten Stelle von einer kurzen engen Spule von der Windungszahl N umgeben ist, so wird in dieser durch das Entstehen oder Verschwinden des Feldes und des Magnetismus ein el. Kraft-Integral (109) induziert

$$\int E\,dt = q(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})N = q\mathfrak{B}N, \qquad 5.$$

wo q der Querschnitt, $q\mathfrak{J}$ also das magn. Moment der Längeneinheit des Stabes ist. Statt $(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})$ kann man auch schreiben $\mathfrak{H}(1 + 4\pi\varkappa)$.

$q\mathfrak{B} = q(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})$ heißt Induktionsfluß oder Kraftlinienfluß. CGS-Einheit = 1 „Maxwell"; vgl. 26a.

Man mißt nach 109 mit einem in den Stromkreis eingeschalteten ballistischen Galvanometer die Elektrizitätsmenge Q des Induktionsstoßes, setzt (w = Gesamtwiderstand)

$$Qw = \int E\,dt = q(4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H})N,$$

also $$\mathfrak{J} = \frac{1}{q}\,\frac{1}{4\pi}\left(\frac{Qw}{N} - \mathfrak{H}q\right). \qquad 6.$$

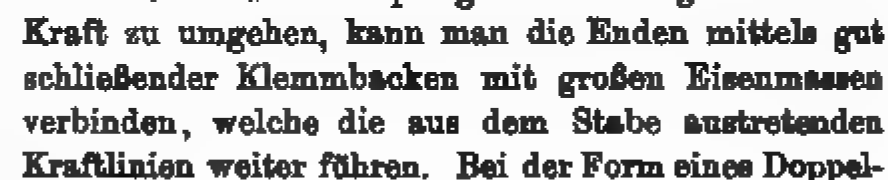
Alle Größen sind in CGS auszudrücken.

Das magnetisierende Feld wird in der Regel durch eine enge lange Spule hervorgebracht (**114**). Die kleine sekundäre befindet sich gewöhnlich, dicht schließend über den Eisenstab geschoben, innerhalb der ersteren. Ist sie außen über die magnetisierende Spule geschoben, so wie in der folgenden Figur, so ist in Formel 6 statt $-\mathfrak{H}q$ zu setzen $-\mathfrak{H}(q+q')$, wenn q' den nicht mit Eisen ausgefüllten Querschnitt der Spule bedeutet.

Die Dauer des Induktionsstromes muß kurz gegen die Schwingungsdauer des Galvanometers sein, was bei Elektromagneten mit großen Eisenmassen sowie bei Magnetisierungen in schwachen Feldern nicht immer der Fall ist.

Anstatt das magn. Feld verschwinden zu lassen, kann man die kleine Spule plötzlich abziehen.

Schlußjoch (Hopkinson). Um den freien Magnetismus eines Stabes und die daraus entspringende entmagnetisierende Kraft zu umgehen, kann man die Enden mittels gut schließender Klemmbacken mit großen Eisenmassen verbinden, welche die aus dem Stabe austretenden Kraftlinien weiter führen. Bei der Form eines Doppeljochs der Eisenvorlage (Fig.) genügen hierzu vermöge des magnetischen Schlusses kleine Eisenmassen.



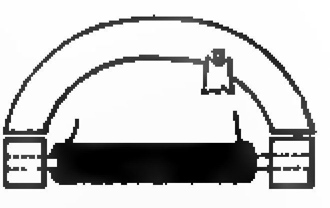
Die lange magnetisierende und die kurze Induktions-Spule sind über den Stab geschoben, in der Regel die letztere nicht über die primäre wie in der Figurenskizze, sondern innerhalb, oder auch zwischen zwei Hälften.

Der Apparat wird mit Stäben von bekannten Magn.-Koeffizienten, die nach I bestimmt sind, geeicht.

Permanenter Magnet. Die Magnetisierung läßt sich für jeden Querschnitt dadurch messen, daß man, so wie oben, von dem Querschnitt eine kurze, enge Spule abzieht. Das magn. Moment der Längeneinheit ist $= Qw/(4\pi N)$; vgl. Formel 6.

III. Bestimmung durch Polwirkungen.

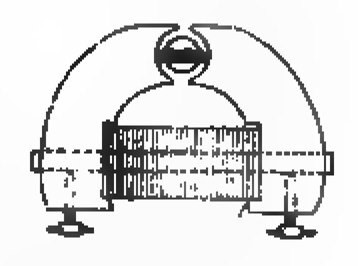
Magnetische Wage (H. du Bois). Der von der Magnetisierungsspule umgebene Stab ist mit seinen Enden in eiserne Backen gespannt, über denen sich sehr dicht ein starker eiserner



Bügel als Wagebalken mit zwei ungleichen Hebelarmen befindet (Fig. Aufriß), zugleich den magnetischen Schluß vermittelnd. Die Differenz der durch Anziehung entstehenden Drehmomente, durch Laufgewichte gemessen, ist dem Quadrate der Induktion (vgl. II) genähert proportional. Zur Eichung auf absolutes Maß dient ein anderweitig untersuchter Stab.

H. du Bois, Magnetische Kreise S. 367; eine vervollkommnete Form und eingehende Theorie ZS f. Instr. 1900, 1. — Eine Wage für gröbere Zwecke s. bei Ewing, Electrician 41, 110 u. 148. 1898; ZS f. Instr 1899, 222.

Drehbare Spule (Köpsel, Kath; Fig. Grundriß). Der in der Magnetisierungsspule liegende zu untersuchende Stab ist wieder durch ein Joch geschlossen, aber mit einer Unterbrechungsstelle, die durch einen Eisencylinder unter Freilassung eines Luftringes ausgefüllt ist, in welchem eine drehbare Spule, wie in den Weston-Strommessern (85, 2), aufgehängt ist. Man leite durch diese Spule einen anderweitig gemessenen Strom von der Stärke C/q, wo q der Querschnitt des zu untersuchenden Stabes und C eine empirische Konstante des Instruments ist.



Die im Stabe erzeugte Magnetisierung pflanzt sich zu den Polflächen fort und lenkt den Spulenzeiger über einer Teilung ab, die nach Induktion des Stabquerschnitts beziffert ist, d. h. die Größe $\mathfrak{B} = 4\pi\mathfrak{J} + \mathfrak{H}$ angibt; vgl. S. 497. Hergestellt bez. geprüft wird diese Teilung mit einem Normalstabe.

Einige, hier nicht gezeichnete Windungen auf den Schenkeln kompensieren den Einfluß, welchen die Spule schon ohne Eisen hat. — Der Apparat ist so aufzustellen, daß der Erdmagnetismus die drehbare Stromspule nicht beeinflußt.

Abh v. Köpsel u. Kath, ZS f. Instr. 1894, 391; 1898, 33; Elt. ZS 1894, 214; 1898, 411. Orlich, ZS f. Instr. 1898, 39.

116. Absolute Widerstands-Messung (W. Weber 1852).

Vgl. 108—111 und Anhang 24—29.

Hier soll nur eine Übersicht der Methoden gegeben werden. Eine ausführliche Darstellung aller ausgeführten Messungen s. Dorn, ZS f. Instr., Beiheft, Febr. 1893; Wiss. Abh. d. P. T. Reichsanst. II, 257. 1895.

I. Aus der Dämpfung eines schwingenden Magnets.

Es bedeute

k das Dämpfungsverhältnis einer Magnetnadel im geschlossenen Multiplikator (27),

$\Lambda = \lg nat k$ das natürliche log. Dekrement,

Λ' dasselbe bei unterbrochener Leitung (Luftdämpfung),

τ die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel (28),

G die statische Galvanometerkonstante, d. h. das Verhältnis des (kleinen) Ausschlags zur Stromstärke in CGS, wenn das magn. Feld = 1 wäre, ohne Fadentorsion,

M den Magnetismus, Θ den Torsionskoeffizient der Nadel,

H die erdmagnetische Horizontalintensität.

1. Dann ist der absolute Widerstand Multiplikator + Schlußleitung im elektromagnetischen Weberschen Maße

$$w = \frac{\pi^2}{2\tau} \frac{G^2}{\Lambda - \Lambda'} \frac{M}{H(1+\Theta)} \sqrt{1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}}.$$

Über die Bestimmung von M/H s. 73 II.

Galvanometerkonstante. Für einen kreisförmigen Multiplikator von n Windungen vom Halbmesser R mit kurzer Nadel im Mittelpunkte würde $G = 2\pi n/R$ sein. Vgl. 81; daselbst auch die Korrektionen wegen Breite und Dicke der Windungslage und der Nadellänge.

Für einen engen Multiplikator bestimmt man G empirisch mittels eines Stromes, den man ganz durch eine Tangentenbussole und abgezweigt durch den Multiplikator gehen läßt (Dorn). Sind die Ablenkungswinkel bez. φ und φ', die Torsionskoeffizienten bez. Θ und Θ', während G' die Konstante der Tangentenbussole, v der Abzweigungsfaktor (86) ist, so hat man

$$G = v G' \cdot \operatorname{tg} \varphi / \operatorname{tg} \varphi' \, (1+\Theta)/(1+\Theta').$$

Über die Ausführung s. F. K., Wied. Ann. 35, 710 u. 745. 1888.

II. Durch Induktionsstöße mit dem Erdinduktor.

Ein Erdinduktor mit vertikaler Drehaxe (111) sei durch das Galvanometer geschlossen. Außer den obigen Bezeichnungen sei

f die Windungsfläche des Induktors (106),

α der Nadelausschlag durch einen einzelnen Induktionsstoß ohne Dämpfung, in dem Sinne von S. 474 u. 479, bei Drehung um die vertikale Axe, wie in 111.

K das Trägheitsmoment der Nadel.

2. Ist die Empfindlichkeitskonstante des Multiplikators bekannt oder wie oben bestimmt, so braucht man das Dämpfungs-

verhältnis nur so weit, wie es zur Berechnung von α gefordert wird. Es gilt

$$w = \frac{2\pi}{1+\Theta} \frac{fG}{\alpha\tau}. \tag{2.}$$

3. Statt der Empfindlichkeitskonstante genügt eine genaue Kenntnis der Dämpfung und des Trägheitsmomentes. Es ist

$$w = \frac{8}{\pi} \frac{f^2 H^2 \tau}{\alpha^2 K} \frac{\Lambda - \Lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}. \tag{3.}$$

4. Mit Hilfe der bekannten Beziehung (Anhang Nr. 12) $K = MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$ kann man K eliminieren und erhält

$$w = \frac{8\pi}{1+\Theta} \frac{f^2 H}{\alpha^2 \tau M} \frac{\Lambda - \Lambda'}{\sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}}. \tag{4.}$$

Die Größe α kann bei 2. durch Multiplikation oder Zurückwerfung, bei 3. und 4. muß sie durch Zurückwerfung bestimmt werden, um zugleich die Dämpfung zu erhalten. Sind hierbei die beiden stationären Schwingungsbögen in absolutem Maße $= a$ und b, so hat man also zu setzen (**110 II**)

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{ab}} \left(\frac{b}{a}\right)^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \Lambda/\pi} \quad \text{und} \quad \Lambda = 2{,}3026(\lg a - \lg b).$$

Bei 2. und 3. kann man mit astatischer Nadel arbeiten.

Über Vereinfachung der Rechnungen s. Tab. 29 und S. 475, 485.

Die vorigen Methoden leiten sich aus 108 ab. Denn es ist $G = q/M$, also nach Gl. 7a, 8 und 3 daselbst

$$\frac{M^2 G^2}{w} = 2K \frac{\Lambda - \Lambda'}{T} \quad \text{oder} \quad = 2K \frac{\Lambda - \Lambda'}{\tau\sqrt{1 + \Lambda^2/\pi^2}},$$

woraus

$$w = \frac{1}{2} \frac{M^2 \tau}{K} \frac{G^2}{\Lambda - \Lambda'} \sqrt{\left(1 + \frac{\Lambda^2}{\pi^2}\right)}.$$

Indem man K durch $MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$ ersetzt, folgt unsere Gl. 1.

Ein Induktionsstoß durch die Horizontalkomponente H liefert ferner die Strommenge $2fH/w$ und teilt hierdurch der Nadel eine Winkelgeschwindigkeit mit (Gl. 8):

$$u_0 = \frac{2fH}{w} \frac{q}{K} = \frac{2fH}{wK} \sqrt{\left(2wK \frac{\Lambda - \Lambda'}{T}\right)} = \frac{fH}{\sqrt{w}} \sqrt{\frac{8(\Lambda - \Lambda')}{KT}}.$$

Hieraus folgt $w = f^2 H^2/u_0^2 \cdot 8(\Lambda - \Lambda')/(KT)$. Indem man noch (108 Gl. 6 u. 3) $u_0 = \pi/\tau \cdot \alpha$ und $T = \tau\sqrt{1 + \Lambda^2/\pi^2}$ setzt, kommt unsere Gleichung 3.

Gl. 2 endlich folgt aus 3, wenn man hier nach 108 Gl. 8, 7a u. 3

$$\Lambda - \Lambda' = q^2 T/(2wK) = G^2 M^2 \tau \sqrt{\pi^2 + \Lambda^2}/(2wK\pi)$$

einsetzt und dann noch statt K schreibt $MH(1+\Theta)\tau^2/\pi^2$.

Alle Größen sind in CGS auszudrücken. w liefert dann, durch 10^9 geteilt, den Widerstand in Ohm.

Über inkonstantes Dämpfungsverhältnis vgl. K. Schering, Wied. Ann. 9, 471 1880. Auch die Selbstinduktion der Spulen bewirkt eine Korrektion; s. Dorn, ib. 17, 783. 1882. Endlich können auch lokale Variationen des Erdmagnetismus Korrektionen verlangen.

III. Mit dem rotierenden Erdinduktor (Weber).

Die Methode wurde von der British Association ausgebildet.

Ein Kreisring vom mittleren Halbmesser r mit n Windungen rotiere um eine vertikale Axe Nmal in 1 sek, d. h. mit der Winkelgeschwindigkeit $2\pi N$.

In einem Augenblick, wo die Axe des Ringes mit dem magn. Meridian den Winkel φ bildet, wird in ihm induziert die el. Kraft $E = 2\pi N \cdot nr^2\pi \cdot H \sin\varphi$, also der Strom E/w. Der Strom erzeugt in seinem Mittelpunkt ein magn. Feld $E/w \cdot 2\pi n/r$, dessen zum Erdmagnetismus senkrechte Komponente $E/w \cdot 2\pi n/r \cdot \sin\varphi = 1/w \cdot 4\pi^2 N n^2 r H \sin^2\varphi$ beträgt. Ihr Mittelwert während einer halben Umdrehung ist

$$1/w \cdot 4\pi^2 N n^2 r H \cdot 1/\pi \cdot \int_0^\pi \sin^2\varphi \, d\varphi = 1/w \cdot 2\pi^2 N n^2 r H.$$

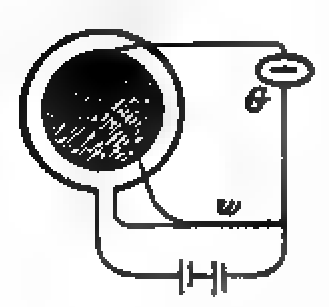
Eine Magnetnadel im Mittelpunkt werde durch die Rotation um den Winkel α dauernd abgelenkt. Dann ist

$$1/w \cdot 2\pi^2 N n^2 r H \cos\alpha = H \sin\alpha, \text{ woraus } w = 2\pi^2 N n^2 r \operatorname{ctg}\alpha.$$

Korrektionen stammen aus dem Querschnitt der Windungslage, der Fadentorsion, der Selbstinduktion und der Induktion der Magnetnadel auf die Spule.

IV. Mit einer im magnetischen Felde rotierenden Scheibe (Lorenz).

Ein Strom i durchfließt eine lange Drahtspule von n Windungen auf 1 cm. Das magnetische Feld in der Spule ist (114 I) $= 4\pi n i$. Eine Metallscheibe vom Halbmesser r rotiert in diesem Felde mit N/sek Umdrehungen, die Kraftlinien senkrecht schneidend. Ein Kontakt drückt gegen das Zentrum, ein zweiter schleift an der Peripherie der Scheibe. Zwischen diesen Punkten wird dann, da ein Radius der Scheibe in der Zeiteinheit offenbar eine Fläche $N \cdot r^2\pi$ beschreibt, also $4\pi n i \cdot N r^2 \pi$ Kraftlinien schneidet, eine el. Kraft induziert $4\pi^2 n r^2 N \cdot i$.



Derselbe Strom i durchfließt den zu messenden Widerstand w, erzeugt also an dessen Enden die Spannung wi. Die Umdrehungszahl N wird so reguliert, daß diese Spannung der

obigen gleich ist, was an dem Strom Null in einem Galvanometer erkannt wird. Dann ist also $w = 4\pi^2 n N r^2$.

In Wirklichkeit verlangt die endliche Länge der Spule eine erhebliche Korrektion; vgl. **114 I.**

Anstatt der rotierenden Scheibe kann eine geeignet rotierende Spule angewandt werden (Lippmann).

V. Aus der Wechselinduktion zweier Stromleiter (Kirchhoff).

Der wechselseitige Induktionskoeffizient (**118**) zweier Spulen sei $= P$.

Seine Berechnung aus Gestalt und gegenseitiger Lage der Spulen ist im allgemeinen eine verwickelte Aufgabe. Einfach wird der Fall einer langen Spule vom Halbmesser r, gleichmäßig mit n Windungen auf die Längeneinheit bewickelt, über welchen eine enge, kurze Spule von m Windungen geschoben ist (Roiti, Himstedt). Von einer Korrektion, welche von der beschränkten Länge der ersteren Spule herrührt, abgesehen, ist dann $P = 4\pi^2 r^2 n m$ (Anh. 28).

In der primären Spule entstehe oder verschwinde der Strom i. Das hierbei induzierte Integral el. Kraft ist $\int E dt = Pi$.

Das in dem sekundären Stromkreis induzierte Stromintegral beträgt also $Q = Pi/w$. Dieses wird nach **109** gemessen und liefert dann w in absolutem Maße.

Mit Hilfe eines Stromunterbrechers im primären Stromkreis, welcher den Strom i in 1 sek Nmal unterbricht (57), wobei aber mittels eines Disjunktors nur die Schließungs- oder die Öffnungsströme in der induzierten Spirale zustande kommen, kann man die Bestimmung von Q auf dauernde Ablenkungen zurückführen (Roiti, Himstedt).

Die Ablenkung eines Galvanometers im sekundären Stromkreis sei hierbei $= \alpha_1$, der induzierende Strom i gebe an demselben Galvanometer die Ablenkung α_2, dann ist

$$w = NP \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 / \operatorname{tg}\alpha_1 .$$

Denn es ist $NPi/w = C \operatorname{tg}\alpha_1$ und $i = C \operatorname{tg}\alpha_2$. Anordnung und Korrektionen s. bei Himstedt, Wied. Ann. 26, 547. 1885.

VI. Aus der Stromwärme (vgl. **49 II**).

Nach dem Satze (Anh. Nr. 30): Die Einheit des Widerstandes im CGS-System hat ein Leiter, in dem der Strom 1 CGS die Leistung Eins verrichtet, d. h. in 1 sek die der Arbeit 1 cm×Dyne äquivalente Wärmemenge entwickelt. Der Arbeit 1 meter×gr-Gew., welche $= 100 \times 981$

$=98100$ cm-Dynen ist, entspricht die Wärmemenge $\frac{1}{427}$ gr-Kal, einer cm-Dyne entsprechen also $\frac{1}{427 \cdot 98100} = \frac{1}{41900000}$ gr-Kal.

Der zu bestimmende Widerstand befinde sich so, wie in der Figur S. 201 angedeutet, in einem mit m gr reinen, also sehr wenig leitenden Wassers gefüllten Kalorimeter. Der Wasserwert Gefäß + Thermometer + Widerstand sei $=\gamma$ (48 I). Ein den Widerstand durchfließender konstanter Strom, von der Stärke (81) i CGS oder $10i$ A bewirke in s sek die Temperaturerhöhung ϑ. Ist die Mitteltemperatur von 15° verschieden, so wird die Änderung der sp. Wärme des Wassers berücksichtigt (48).

Der Widerstand des Leiters berechnet sich

$$w = 41900000 \frac{(m+\gamma)\vartheta}{i^2 s} \text{ [CGS] oder } [10^{-9}\,\Theta].$$

Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents.

Wenn der Widerstand des Leiters w in CGS bekannt ist, so liefert das vorige Verfahren umgekehrt das mechanische Äquivalent A der Wasserkalorie

$$A = \frac{i^2 w s}{(m+\gamma)\vartheta} \frac{\text{cm}^2\text{gr sek}^{-2}}{\text{Wasser-gr-Kal.}} \text{ oder } \frac{\text{cm-Dyne}}{\text{Wasser-gr-Kal.}},$$

wobei die Wasserkalorie sich auf die mittlere Versuchstemperatur bezieht.

117. Selbstinduktions-Koeffizient oder Selbstpotential (Maxwell).

Koeffizient der Selbstinduktion (elektromagnetische Kapazität; elektrodynamisches Potential eines Leiters auf sich selbst oder kurz Selbstpotential) S heißt der Faktor, mit welchem die negative Änderungsgeschwindigkeit $-di/dt$ des Stromes in dem Leiter zu multiplizieren ist, um die el. Kraft der Induktion (des Extrastromes) zu erhalten. Vgl. Anh. 28.

Drückt man die zur Messung dienenden Größen im CGS-System aus, so wird der Ind.-Koeffizient in [cm] erhalten; aus Ohm, Farad usw. in „Quadrant" oder „Henry".

Über die Berechnung des Selbstpotentiales von Rollen s. Stefan, Wied. Ann. 22, 107. 1884. Über die Messung oder Berechnung kleiner Selbstpotentiale M. Wien, ib. 53, 928; Prerauer, ib. 53, 772. 1894.

Sätze von Selbst-Ind.-Koeffizienten. Solche können aus einer Reihe von Rollen bestehen, die durch Stöpsel beliebig eingeschaltet werden. Den wesentlichen Vorteil konstanten Widerstandes bietet ein Paar konzentrischer Rollen, die meßbar gegeneinander gedreht werden können.

Dadurch daß die Wicklungen noch aus mehreren Abteilungen bestehen, die man gleich- oder entgegengeschaltet, entsteht ein System mit Selbst-Ind.-Koeff. von weitem Bereich, z. B. zwischen $S = 0{,}4 \cdot 10^6$ und $120 \cdot 10^6$ cm. M. Wien, Wied. Ann. 57, 249. 1896. Dickere Leiter stellt man dabei als Litzen aus dünneren Drähten her; andernfalls können Fehler entstehen, die mit wachsender Frequenz von Wechselströmen rasch steigen. Vgl. z. B. Dolezalek, Ann. der Ph. 12, 1142. 1903.

Über Methoden und praktische Anordnungen bei der Messung s. z. B. Orlich, Elt. ZS 1903, 502; auch Dolezalek, ZS f. Instr. 1903, 240.

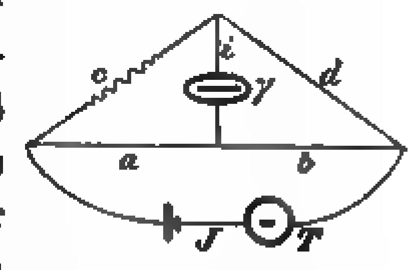
Bei Messungen ist auf ausreichende gegenseitige Entfernung der Leiter zu achten.

Sind Eisenkerne usw. vorhanden, so besteht kein konstanter Ind.-Koeffizient, da seine Größe von der Stromstärke abhängt.

Bestimmung in der Brücke.

Zu der Bedingung für das Verschwinden eines Stromes in der Brücke, daß die Widerstände der beiden Paare benachbarter Zweige in Proportion stehen, tritt bei veränderlichen Stromstärken die zweite hinzu, daß die Zweigleitungen induktionsfrei sind, oder daß auch die Selbstinduktionskoeffizienten benachbarter Zweige in derselben Proportion stehen wie die Widerstände. — Über Kapazität s. 182.

1. Nach Dorn. Der zu bestimmende Leiter sei in c enthalten. γ ist ein ballistisches Galvanometer vom Widerstande γ. Die übrigen Zweige seien induktions- und kapazitätsfrei. In den ungeteilten Strom kommt ein Gleichstrommesser T. Die Widerstände werden so abgeglichen, daß in γ kein Strom, also daß $a:b = c:d$ ist. Die Nadel des Instrumentes im Hauptstrom zeige die Ablenkung φ. Der Hauptstrom wird unterbrochen; durch den



dabei in c entstehenden Extrastrom mache die Nadel von γ den Ausschlag s. Ihre Schwingungsdauer und ihr Dämpfungsverhältnis seien τ und k (27); $\Lambda = \text{lgnat}\, k$. Wir setzen

$$n = [(a+c)(b+d) + \gamma(a+b+c+d)]/b.$$

Dann ist das Selbstpotential S des Leiters in c

$$S = n \cdot \frac{\tau}{\pi} \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{C}} \frac{s}{\varphi} k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}.$$

$\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{r}$ bedeuten den Reduktionsfaktor (81, 83, 89) des Hauptgalvanometers bez. Brückengalvanometers. Es genügt, das Verhältnis $\mathfrak{r}/\mathfrak{C}$ zu kennen; vgl. hierzu besonders 89c und d.

Ist T eine Tangentenbussole, so hat man für φ zu setzen $\operatorname{tg}\varphi$; ist T ein Instrument mit direkter Ablesung der Stromstärke J, so gilt J anstatt $\mathfrak{C}\varphi$.

Beweis: Ist $J = \mathfrak{C}\varphi$ der Stammstrom, i_c der Strom in c, so hat man zunächst $i_c = J(a+b)/(a+b+c+d)$. Während des Verschwindens von i_c hat die el. Kraft in c zur Zeit t die Größe $S \cdot \mathrm{d}i_c/\mathrm{d}t$, der Strom i in γ ist also (S. 375, Gl. 4) $i = S \frac{\mathrm{d}i_c}{\mathrm{d}t} \frac{b+d}{(a+c)(b+d)+\gamma(a+b+c+d)}$. Drückt man hier i_c durch J aus und berücksichtigt ferner, daß $a:b = c:d$ oder $ad = bc$ gemacht war, also $(a+b)(b+d) = (a+b+c+d)b$, so findet man $i = S \cdot \mathrm{d}J/\mathrm{d}t \cdot 1/n$. Also ist (S. 480, Gl. 4)

$$\int i\,\mathrm{d}t = SJ/n \text{ oder } S = n\int i\,\mathrm{d}t \cdot 1/J = n \cdot \mathfrak{r}\,\tau/\pi \cdot s \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg}\pi/\Lambda} \cdot 1/(\mathfrak{C}\varphi),$$

wenn $\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{C}$ die Reduktionsfaktoren der beiden Galvanometer sind.

Zur Rechnung vgl. S. 475 u. Tab. 29.

2. **Nach Rayleigh.** Anstatt den Stammstrom J zu messen, kann man einfacher an γ selbst den Ausschlag s' bei Dauerstrom beobachten, nachdem man einen kleinen Widerstand w in den Zweig c zugeschaltet hat.

Dann ist $\quad S = w \cdot \tau/\pi \cdot s/s' \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg}\pi/\Lambda}$.

Denn nach dem Zufügen von w entsteht ein Strom in der Brücke

$$\mathfrak{r} \cdot s' = J \cdot \frac{wb}{(a+c)(b+d)+\gamma(a+b+c+d)} = J\,\frac{w}{n}.$$

3. **Vergleichung zweier Selbstpotentiale (Maxwell).** In den Zweigen c und d mögen sich, hinreichend weit von einander aufgestellt, die Leiter mit den Selbstpotentialen S und S' nebst Rheostaten- oder Draht-Widerständen befinden; a und b seien induktionsfrei. Die Widerstände werden derartig abgeglichen, daß die Nadel von γ sowohl bei Dauerstrom wie bei der Schließung oder Öffnung ruhig bleibt.

Dann ist $\quad S/S' = a/b = c/d$.

Diese Beziehung folgt aus Nr. 1, vor. S., denn man kann den Ausschlag Null ansehen als aus den beiden entgegengesetzt gleichen von S und S' herrührenden Ausschlägen $\alpha = A \cdot S/n$ und $\alpha = A \cdot S'/n'$ zusammengesetzt, wo $1/A$ den gemeinsamen Ausdruck $\mathfrak{r}/\mathfrak{C} \cdot \tau/\pi \cdot 1/\varphi \cdot k^{1/\pi \cdot \operatorname{arc}\operatorname{tg}\pi/\Lambda}$ bezeichnet und wo n und n' sich nur durch die Nenner b und a unterscheiden. Also ist $S/S' = n/n' = a/b$.

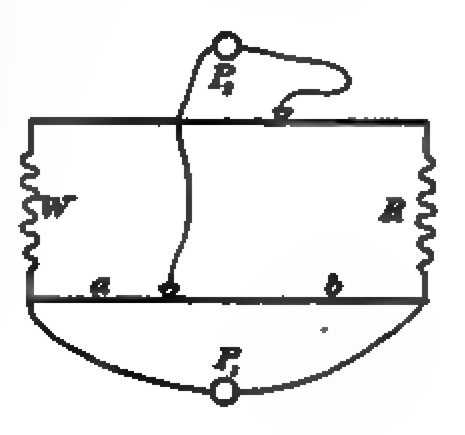
4. **Vergleichung eines Selbstpotentials mit der Kapazität eines Kondensators (Maxwell).** Der Zweig c (Fig. zu Nr. 1) enthalte das Selbstpotential S; dem Zweige b wird

ein Kondensator von der in elektromagnetischen Einheiten ausgedrückten Kapazität C (132) parallel geschaltet, d. h. die Enden von b werden durch kurze Drähte mit den beiden Belegungen verbunden. Bleibt die Nadel von γ sowohl bei Dauerstrom wie bei Schließung oder Öffnung ruhig, so ist $S/C = a \cdot d = b \cdot c$. Die Widerstände a, d oder b, c in [cm/sek] gemessen und C elektromagnetisch in [$\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{sek}^2$], erhält man S in [cm]. Ohm und Farad geben S in Quadrant oder Henry; s. Anh. 27, 28, 29.

5. Vergleichung durch das akustische oder optische Telephon oder das Vibrationsgalvanometer (85a). Die Methoden 3 und 4 sind auch so auszuführen, daß man statt des Galvanometers ein Telephon in die Brücke schaltet und als Stromquelle ein kleines Induktorium oder zum optischen Telephon bez. Vibrationsgalvanometer einen synchronen Unterbrecher nimmt; s. Fig. S. 400 u. 401. Wenn die Reaktion des Telephons usw. verschwindet (vgl. unten), so gelten die unter 3 bez. 4 aufgestellten Gleichungen.

Einstellungsverfahren für Nr. 3, 4 u. 5. Die Aufgabe umfaßt jedesmal zwei zu erfüllende Bedingungen: erstens müssen die 4 Widerstände in Proportion stehen, zweitens muß diese Proportion gerade diejenige sein, welche den zu vergleichenden Selbstinduktionen usw. entspricht. Verlangt wird also auf jeder Seite ein verstellbarer Verzweigungspunkt. Man kann z. B. für a und b (Fig. S. 505) einen Brückendraht mit Schleifkontakt nehmen oder für a einen konstanten Widerstand, für b einen Rheostaten. Auch in cd ist ein Schleifkontakt bequem; doch wird daselbst oft auch ein Rheostat notwendig sein. Insofern die Leiter mit Induktion den Zweigen zugeschaltet werden, ist ihr Widerstand in dem betr. Zweige natürlich zuzurechnen.

Die Methode Nr. 5 mit dem Telephon wird man folgendermaßen anwenden. Bezüglich Selbstinduktion zu vergleichen seien die Leiter W und R; man schaltet sie so, wie die Figur zeigt, neben den Meßdraht ab, bringt aber gleichzeitig einen Hilfsdraht mit Schleifkontakt so an, daß man seinen Widerstand beliebig zwischen den Zweigen, die W bez. R enthalten, verteilen



kann. Nun sucht man durch Probieren eine Stellung dieses Kontakts, bei der überhaupt ein merkliches Minimum der Tonstärke im Telephon auftritt, wenn man den Kontakt auf *ab* verschiebt. Man verstellt jetzt den oberen Kontakt ein wenig nach einer Seite und überzeugt sich, ob hierdurch das Minimum besser oder schlechter wird. Im letzteren Falle verstellt man in der anderen Richtung.

Es ist Sache des Ausprobierens, die Stellung des Hilfskontaktes zu finden, bei der das Minimum scharf wird. Hat man sie gefunden, so ist nun $S_W : S_R = a : b$. Existiert die richtige Stellung überhaupt nicht, so ist der Widerstand des Hilfsdrahtes zu klein (oder es haben die Leiter außer der Selbstinduktion noch Kapazität, die aber nur bei großen Widerständen stören kann).

6. Die sehr schnellen, in der Funkenentladung einer Leidener Flasche enthaltenen Schwingungen lassen sich mittels Verzweigung (Differentialerreger) zur Vergleichung auch sehr kleiner Selbstinduktionen benutzen, wobei aber die im Eingange genannten Fehler dickerer Leiter zu berücksichtigen sind. Vgl. **138**, 6.

Bestimmung durch Abzweigen.

7. Der Leiter w mit Selbstinduktion S wird mit einem induktionslosen Widerstande w' in den Kreis eines sinusartigen Wechselstroms von der Wechselzahl (d. h. der doppelten Periodenzahl) ν/sek eingeschaltet.

w' w

Man legt ein Elektrometer in Doppelschaltung (**127** II), oder ein Dynamometer von geringer Selbstinduktion, bez. mit vorgeschaltetem großem Widerstande, oder endlich ein Hitzdrahtgalvanometer zuerst an die Enden von w, dann von w', und mißt die mittleren Quadrate F bez. F' der Klemmspannungen oder der Zweigströme; am besten wird F' durch geeignete Wahl von w' etwa gleich F gemacht. Dann ist $F : F' = (w^2 + \pi^2 \nu^2 S^2) : w'^2$, also

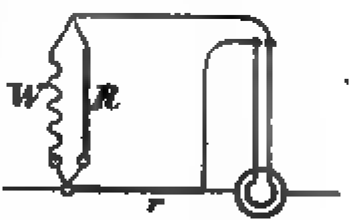
$$\pi^2 \nu^2 S^2 = w'^2 F/F' - w^2.$$

Mit einem in den Hauptstrom eingeschalteten Dynamometer usw. oder einem an zwei Punkte konstant angelegten Elektrometer prüft man die Konstanz der Leistung des Wechselstromes bez. stellt ihre Änderung fest. Beträgt die mittlere Leistung zu beiden Versuchen L bez. L', so ist F/F' in obiger Formel mit L'/L zu multiplizieren.

$\sqrt{w^2 + \pi^2 \nu^2 S^2}$ entspricht bei dem Leiter mit Selbstinduktion dem

Widerstande eines induktionslosen Leiters und wird wohl der „scheinbare Widerstand“ oder die „Impedanz“ des ersteren für eine Wechselzahl ν genannt. Vgl. auch 120 II und Anh. 28.

8. Man schaltet die eine Dynamometerrolle konstant in den Sinushauptstrom und zweigt von einem induktionsfreien Widerstande r nur durch die andere Rolle ab. In der Abzweigung wird der zu bestimmende Leiter (W, S) mit einem induktionslosen Widerstand R vertauscht, den man so aussucht, daß der Ausschlag der gleiche bleibt. Dann ist, wenn γ der Widerstand der Rolle in der Abzweigung,



$$\pi^2 \nu^2 S^2 = (R - W)(W + r + \gamma).$$

Zu 1) Dorn, Wied. Ann. 17, 783. 1882; 2) Lord Rayleigh, Phil. Trans. (A) 173, 661. 1882; 3) Maxwell, Elektr. II, Art. 757; 4) ib. 778; 5) Lorenz, Wied. Ann 7, 167. 1879 (wohl der erste erfolgreiche Versuch mit dem Telephon bei einer Messung). M. Wien, ib. 44, 689. 1891; 57, 249. 1896, wo auch Hindernisse und Schwierigkeiten besprochen werden; 6) Nernst, ib. 60, 620. 1897; 8) Rowland und Penniman, Sill. Journ. (4) 8, 35. 1899; ZS f. Instr. 1900, 369. Daselbst noch einige Anordnungen mit dem Dynamometer. Über die Theorie auch Oberbeck, ib. 17, 826. 1882. — Andere Methoden: mit dem Magnetinduktor F. K., ib. 31, 594. 1887; mit dem optischen Telephon von bekannter Periode M. Wien, l. c.; auch Roiti, Foster, Joubert. — Über einen Sinusinduktor s. F. K., Pogg. Ann. Jubelbd., S. 292. 1874. — Über Wechselstrommaschinen sehr hoher Frequenz vgl. Dolezalek, ZS f. Instr. 1903, 240. — Eine Zusammenstellung vieler Methoden, Berechnungsformeln und der Literatur in Heydweiller, Elektr. Messungen S. 179 ff. Leipz. 1892.

118. Gegenseitiger Induktionskoeffizient.

In einem Leiter I ändere sich eine Stromstärke mit der Geschwindigkeit di/dt. In einem benachbarten Leiter II werde hierdurch eine el. Kraft $S_{12} \cdot di/dt$ induziert, dann heißt S_{12} der Induktionskoeffizient von I auf II. Es ist immer $S_{12} = S_{21}$. Vgl. auch Anh. 28 und den Eingang zu 117.

1. Absolute Bestimmung.

Durch den einen Leiter werde der gemessene Strom i geschickt, der andere sei durch ein ballistisches Galvanometer (85, 109) zu einem Kreise vom Widerstande w geschlossen. Unterbrechung oder Schließung des primären Kreises bewirke im sekundären den Stromstoß Q, dann ist

$$S_{12} = w \cdot Q/i.$$

Denn es ist $\int E dt = S_{12} \cdot i$ und $Q = 1/w \cdot \int E dt$

Q/i läßt sich ersetzen durch den Ausdruck $\frac{\tau}{\pi}\,\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{E}}\,\frac{s}{\varphi}\,k^{1/\pi\cdot\operatorname{arctg}\pi/\Lambda}$; vgl. über die Bedeutung dieser Größen 117, 1.

2. Zurückführung auf die Messung eines Selbstinduktionskoeffizienten.

Man schalte die beiden gegenseitig induzierenden Leiter I und II hintereinander, erstens so wie Fig. a, dann wie Fig. b andeutet, wobei im ersteren Falle die gegenseitige Induktion der Selbstinduktion entgegenwirkt, und bestimme in beiden Fällen nach 117 den Selbstinduktionskoeffizienten des Systems. Ist dieser gleich S_a bez. S_b, so gilt offenbar

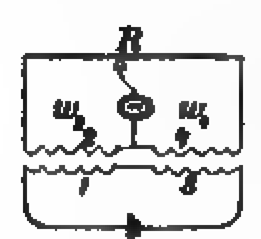


$$S_a = S_1 + S_2 - 2S_{12} \quad \text{und} \quad S_b = S_1 + S_2 + 2S_{12},$$

woraus $S_{12} = \frac{1}{4}(S_b - S_a)$; zugleich auch $S_1 + S_2 = \frac{1}{2}(S_a + S_b)$.

3. Vergleichung zweier gegenseitiger Ind.-Koeffizienten.

Man schaltet die induzierenden Rollen 1 und 3 mit einer Batterie und einem Stromschlüssel zu einem Stromkreise, die induzierten 2 und 4 mit induktionsfreien Rheostatenwiderständen, deren Verhältnis man ändern kann, zu einem zweiten Kreis, den man durch ein Galvanoskop überbrückt. Bleibt das letztere bei Stromwechsel ruhig, so ist



$$S_{12} : S_{34} = w_2 : w_4,$$

wenn w_2 und w_4 die Gesamtwiderstände links und rechts von der Brücke bezeichnen. Vgl. Maxwell, Elektr. § 755.

Beweis: Die el. Kräfte in den Zweigen durch die Entstehung usw. des primären Stromes stehen jederzeit im Verhältnis $S_{12} : S_{34}$.

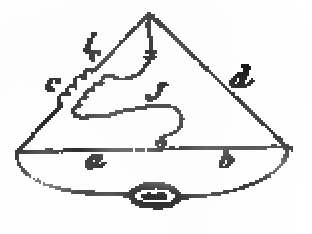
Anstatt Batterie und Galvanoskop werden Induktionsapparat und Telephon oft bequemer sein. — Stromerreger und Stromprüfer kann man auswechseln.

Sind die Widerstände der Rollenpaare ungleich, so schaltet man vorteilhaft die weniger ungleichen in denselben Stromkreis.

4. Abgleichung eines gegenseitigen und eines Selbstinduktionskoeffizienten (Maxwell, Elektr. § 756).

Gegeben seien zwei gegeneinander verstellbare Rollen, z. B. die Anordnung von M. Wien, Wied. Ann. 57, 249. 1896. Die eine Rolle kommt in die unverzweigte Leitung, die andere in den

Zweig c der Brücke, und zwar so gerichtet, daß ihre Selbstinduktion S der von der anderen Rolle erlittenen Induktion S_{12} entgegengesetzt wirkt. Die Widerstände werden mit Dauerstrom bis zur Stromlosigkeit der Brücke, d. h. $a:b=c:d$ abgeglichen, demnächst werden die Rollen so gegen einander verstellt, daß die Stromlosigkeit auch bei Stromwechsel erhalten bleibt. Dann ist



$$S=S_{12}(1+a/b) \text{ oder } =S_{12}(1+c/d).$$

Folgt daraus, daß das bei gleichzeitigem Entstehen des Stammstromes J und des Zweigstromes i_c in c induzierte el. Kraftintegral $S_{12} \cdot J - S \cdot i_c$ auf Null gebracht und daß außerdem (S. 375, Gl. 5) $J:i_c=(a+b+c+d):(b+d)$ ist.

S. auch M. Wien, Wied. Ann. 44, 697. 1891; Heydweiller, ib. 53, 499. 1894.

119. Messungen an Gleichstrom-Dynamomaschinen.

Über vollständigere Darstellungen vgl. die Literaturangabe S. 385. Ferner: Benischke, Elektrotechnik in Einzeldarstellungen; Braunschw. 1903 ff.

Die Maschine kann als Stromerzeuger (Generator) oder als Krafterzeuger (Motor) laufen. Das Folgende betrifft hauptsächlich die Generatoren.

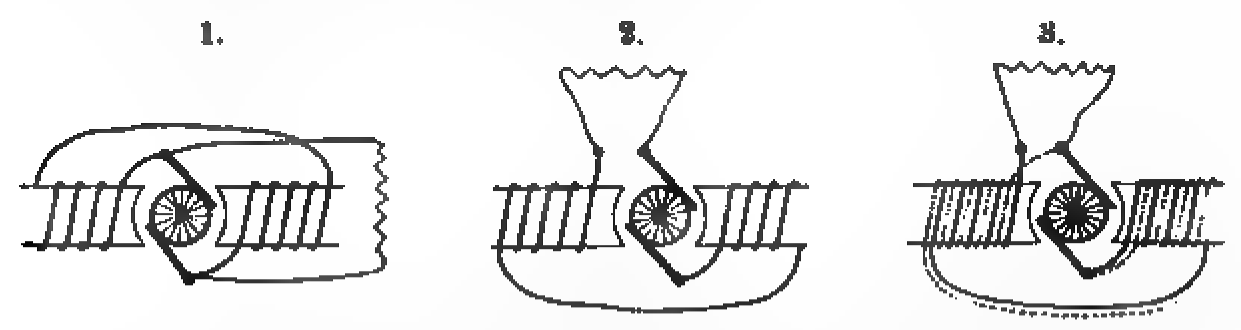
Wartung. Der Kollektor ist von Metallstaub frei zu halten, zuweilen mit Schmirgelpapier überlaufen zu lassen und darauf zu reinigen. Ist er stärker angefressen oder unrund, so wird er mit einem am Maschinengestell zu befestigenden Support abgedreht. Das Anfressen wird durch leichtes Auflegen der Bürsten und Einstellung auf Funkenfreiheit eingeschränkt. Die Funken rühren von der Selbstinduktion in dem Teile des Ankers her, welcher einen Augenblick zuvor durch die Bürsten kurz geschlossen war, und entstehen vornehmlich dadurch, daß die Bürsten auf Kollektorstreifen liegen, deren Ankerwindungen nicht induktionsfrei sind, d. h. nicht mit der „neutralen Zone" zusammenfallen.

Die letztere steht nun, wenn die Maschine Strom hat, nicht genau in der Mittellinie benachbarter Elektromagnetpole, sondern ist dadurch verschoben, daß der Ankerstrom die Magnetisierungsrichtung des Ankerkernes gegen die Feldrichtung verdreht, und zwar um so stärker, je stärker der Strom ist. Die zur Funkenfreiheit nötige Verdrehung der Bürstenbrücke aus der Symmetrielage (bei dem Generator in, beim Motor entgegen dem Lauf) wächst also durch die „magnetische Rückwirkung des Ankerstromes" mit der Stromstärke (mit „der Belastung"), und zwar um so stärker, je größer bei einer Maschine die magnetisierende Kraft des Ankerstromes im Verhältnis zur Feldstärke der Schenkelpole ist. Man probiert die funkenfreie Stellung für die zeitweilige Stromstärke durch Verdrehen des Bürstenhalters aus. Bei Doppelbürsten kann weiter eine kleine gegenseitige Verschiebung der Bürsten eines Paares helfen.

Wenn keine ständige Wartung vorhanden ist, stellt man nahe für die größte Stromstärke ein.

Kohlebürsten lassen die Funken leichter vermeiden als Kupferbürsten; letztere müssen, wenn sie ausgefasert oder ungleich verschlissen sind, im Schraubstock sorgfältig beschnitten werden.

Die Maschinen sollen auf Schienen stehen, damit der Riemen zur Verminderung des Gleitens bequem angezogen werden kann.



Gemäß der Schaltung der Magnetwickelung teilt man ein in:

1. Nebenschlußmaschine (am verbreitetsten; Lichtzentralen; Parallelschaltung mit Akkumulatorenbatterien; Motoren von konstanter Umlaufszahl). Der Anker ist durch die, relativ dünndrähtigen und zahlreichen, Magnetwindungen und die äußere Leitung nebeneinander geschlossen; Schema in Fig. 1. Die Klemmspannung ist bei kleinem äußeren Widerstande gleich Null und steigt mit dessen Anwachsen zuerst schnell, später langsam zu einem Grenzwert; sie wächst also mit zunehmender Belastung.

2. Hauptstrom- oder Serienmaschine (als Generator selten mehr gebraucht, häufig aber als Straßenbahnmotor; die Zugkraft im Anlauf groß, mit wachsender Umlaufzahl abnehmend. Bei Leerlauf Durchgehen mit Gefahr der Zerstörung des Motors). Die, dickdrähtige, Magnetwickelung von wenigen Windungen liegt mit Anker und Außenleitung im einfachen Stromkreise (Fig. 2). Mit wachsendem äußeren Widerstand nimmt die el. Kraft des Generators bis auf Null ab. Die Klemmspannung hat für einen bestimmten äußeren Widerstand, also für eine bestimmte Leistung ein Maximum.

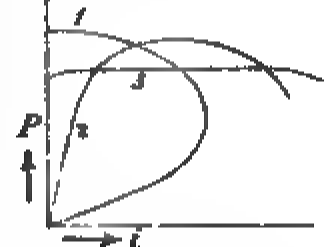
3. Gleichspannungs- oder Verbund- (Compound-) Maschine. Der Elektromagnet hat zwei Wickelungen. Die eine, dünndrähtige, liegt wie bei der Nebenschlußmaschine an den Bürsten (in Fig. 3 punktiert gezeichnet), oder auch an den Klemmen der Maschine. Die andere, dickdrähtige, liegt mit dem Anker und der äußeren Leitung in Serienschaltung. Bei geeigneten Verhältnissen wird bei normaler Umlaufzahl die Klemmspannung vom äußeren Widerstande, d. h. von der Leistung, wenig beeinflußt.

Eine ausführliche Zusammenstellung von Maschinen-Anordnungen s. Grawinkel-Strecker, Hilfsbuch f. d. Elektrotechnik 6. Aufl. S. 307. 1900.

Bezeichnungen: i = Außenstrom, i_A = Ankerstrom;
i_N = Nebenschluß-, i_S = Serienwicklungsstrom:
w, w_A, w_N, w_S die entsprechenden Widerstände;
E = elektrom. Kraft, P = Klemmspannung.

Bei der Serienmaschine ist $w_A + w_S$ der Maschinenwiderstand und die i sind alle gleich, bei der Nebenschlußmaschine ist $i_A = i + i_N$.

Den Zusammenhang zwischen i und P für die drei Schaltungsarten zeigen die Kurven. Die größten Stromstärken können übrigens wegen unzulässiger Erhitzung der Maschine nicht dauernd benutzt werden



Technische Betriebe arbeiten meist auf konstante Spannung (an Glühlampen usw.), selten auf konstanten Strom. Um die Spannung konstant zu erhalten, dienen Regulierwiderstände, welche in Nebenschlußwickelungen oder neben Serienwickelungen geschaltet werden können, sowie nebengeschaltete „Pufferbatterien“ aus Akkumulatoren.

I. Stromstärke.

Über die hier in Betracht kommenden direkten Strommesser vgl. **81**, **84**, **85**, **102**, **120** I, über die Zuhilfenahme der Abzweigung **86** und über die für sehr große Stromstärken besonders in Betracht kommende Methode der Spannungsmessung an den Enden eines Starkstrom-Präzisionswiderstandes **101**.

Direkt meßbar sind der Außenstrom und der Nebenschlußstrom.

Den Maschinenströmen kommen im allgemeinen Schwankungen zu, deren Einfluß durch gute Dämpfung der Instrumente vermindert wird.

Um von mehreren Größen (Strom, Spannung, Lichtstärke) zusammengehörige Werte zu erhalten, geschehen die Ablesungen gleichzeitig an Instrumenten, die sich rasch einstellen, mit Benutzung des Taktes des Motors und unter ev. Auslassen bei dem Aussetzen von Gasmotoren. — Vgl. auch **121** V.

II. Widerstand.

Technisch sind hauptsächlich die betriebswarmen Widerstände von Bedeutung. Deren Messung (vgl. **90** bis **93** u. **101**) kann, mit Ausnahme des Ankerwiderstandes, während des Betriebes durch Messung von Stromstärke und Spannung nach **91** II 1 oder sicherer nach **91** II 3 mit Einschaltung eines Starkstrom-Präzisionswiderstandes geschehen.

Den Ankerwiderstand mißt man in derselben Weise sofort nach Aufhören des Betriebsstromes mit einem Strom von nahe gleicher Stärke aus Akkumulatoren. Während der Messung werden Magnet- und Ankerwicklung von einander getrennt oder der Anker festgekeilt. Unregelmäßige Übergangswider-

stände an den Bürsten eliminiert man durch Beobachtungen bei verschiedener Kollektorstellung. Die Bürsten sollen gut eingelaufen, der Kollektor frisch geschmirgelt sein.

Aus den Widerständen w_0 kalt und w warm berechnet sich die Temperaturerhöhung in Graden etwa $=250(w-w_0)/w_0$. Die Erhöhung soll bei Dauerbetrieb höchstens 40° erreichen.

III. Elektromotorische Kraft.

Direkt meßbar nach **101, 102** ist die Spannung P zwischen den Klemmen, oder P_B zwischen den Bürsten der Maschine. Es gilt für die Nebenschluß-Maschine $P_B=P$,
Serien- und Verbund-M. mit kurzem Nebenschluß $P_B=P+iw_s$.

Die gesamte el. Kraft E ist gleich der Bürstenspannung, vermehrt um den (kleinen) Spannungsverlust im Anker

$$E=P_B+i_A w_A.$$

Außerdem kann in den Bürsten und deren Laufflächen ein Spannungsverlust auftreten, der bei Kohlebürsten unter Umständen bis zu etwa 50 Prozent des Ankerverlustes steigt.

Ferner gilt für die Serienmaschine $i_A=i$,
für Nebenschluß- und Verbund-Maschine $i_A=i+i_N$.

IV. Leistung oder Effekt.

Einheit ist das Watt = Volt × Ampere $=10^7$ CGS; vgl. Anh. 30.

Die äußere, nutzbare Leistung ist $L=Pi$, die gesamte elektrische Leistung $=Ei_A$ oder $=Pi+V$, wo V die Summe der Verluste durch Stromwärme in der Anker- und Magnetwicklung bedeutet. Es gilt bei Nebenschlußmaschinen $V=i_N P+i_A^2 w_A$, bei Serien-M. ohne Berücksichtigung des Bürstenverlustes $=i^2(w_A+w_s)$; bei Verbund-M. entsteht ein aus diesen zusammengesetzter Ausdruck.

Über die Messung der Leistung vgl. auch **120** IV; über die Prüfung von Elektrizitätszählern für Gleichstrom z. B. Feußner, Elt. ZS 1900, 1025.

Elektrisches Güteverhältnis γ. So heißt das Verhältnis der äußeren zur gesamten elektr. Leistung. Es ist also

$$\gamma=\frac{L}{Ei_A}=\frac{Pi}{Pi+V}.$$

Bei modernen Maschinen von	über 10,	von 5,	von 1 KW
beträgt γ	über 90,	knapp 90,	etwa 80%.

V. Wirkungsgrad η.

So nennt man das Verhältnis der von der Maschine geleisteten äußeren elektrischen Arbeit zu der durch die Maschine verbrauchten mechanischen Arbeit L_0, beide in gleichem Maße ausgedrückt; also

$$\eta = L/L_0 = Pi/L_0.$$

1 Pferdestärke = 75 kg-Gew·meter/sek = 0,736 Kilowatt (rund ³/₄).

Moderne Maschinen von	100	10	2	1	0,1 KW Leistung
haben etwa η =	über 90	85—90	80	70—75	60—70 %.

Elektrische Bestimmung des Arbeitsverbrauchs L_0. Außer dem Verlust V durch Stromwärme (s. v. S.) wird eine Verlustsumme V' durch Reibung, Koerzitivkraft des Eisens beim Polwechsel (Hysterese) und „Wirbelströme" im Eisen bewirkt und es ist

$$L_0 = Pi + V + V'.$$

Zuerst belastet man die Maschine bei normaler Geschwindigkeit (Umlaufzähler s. f. S.) mit vollem, oder halbem, viertel usw. Strom, mißt i_N und bestimmt Pi und V nach Nr. IV. Dann trennt man die Magnetwicklungen vom Anker und führt ihnen denselben Strom i_N von außen zu, wobei die Maschine nahe denselben Magnetismus erhält wie vorher. Nach Wegnahme des Treibriemens wird an die Bürsten von außen allmählich eine so hohe Spannung P' angelegt, daß der Anker, nun als Motor leerlaufend, die vorige Geschwindigkeit bekommt. Dabei nehme er den Strom i' auf, so ist (von Riemendruck und Änderung der Anker-Rückwirkung abgesehen) $V' = i'P' - i'^2 w_A$, worin das zweite Glied meist zu vernachlässigen ist.

Damit ist L_0 gefunden und η berechenbar.

Beispiel. Eine Nebenschlußmaschine gab bei 500 Dreh./min $P = 250$ V, $i = 212$ A, also $L = 53,0$ Kilowatt. Dabei war $i_N = 3,9$ A, also $i_A = 216$; ferner $w_A = 0,0662\ \Omega$. Hieraus findet sich der Verlust durch Stromwärme

$$V = 216^2 \cdot 0,0662 + 3,9 \cdot 250 = 3090 + 970 = 4060 \text{ Watt (also } 7,7\,\% \text{ von } L),$$

also das elektr. Güteverhältnis $\gamma = \dfrac{53,0}{53,0 + 4,06} = 0,929$.

Als Motor leerlaufend mit 3,9 A im Nebenschluß brauchte die Maschine, um auf 500 Dreh./min zu kommen, eine Bürstenspannung $P' = 252$ V, einen Ankerstrom $i' = 6,40$ A. Also ist

$$V' = 6,40 \cdot 252 - 6,4^2 \cdot 0,066 = 1610 \text{ Watt (d. h. } 3,0\,\% \text{ von } L)$$

und der Wirkungsgrad $\eta = 53,0/58,7 = 0,903$.

Mechanische Messung des Arbeitsverbrauchs L. Man multipliziert die Umfangsgeschwindigkeit der Riemenscheibe der Dynamomaschine mit der Differenz der Spannungen des ablaufenden und des auflaufenden Riementeils. Multiplikation mit 9,81 verwandelt die Kg-Gew. m/sek in Watt. Zur Messung dient z. B. das Hefner'sche oder das Fischinger'sche Transmissions-Dynamometer.

Messung der von einem Motor erzeugten mechanischen Leistung. Prony'scher Zaum. Der Umfang einer mit dem Motor umlaufenden Scheibe vom Halbmesser r werde mit einer gemessenen Kraft k auf die konstante Umlaufzahl N/sek gebremst. Dann ist $L = N \cdot 2\pi r k$ die abgegebene mechanische Leistung. Die Bremskraft bewirkt man z. B. durch ein umgelegtes Metallband, welches etwa durch beiderseitig angehängte gleiche Gewichte bis zu der erforderlichen Reibung angespannt ist. Die tangential angreifende Kraft k wird dann durch ein mit dem einen Ende verbundenes Federdynamometer gemessen

Der Prony'sche Zaum besteht aus zwei Klemmbacken, deren Druck so reguliert wird, daß die gewünschte Umlaufzahl entsteht. Das beim Umlauf auf den Zaum übertragene Drehmoment werde am Hebelarme r durch eine zu diesem senkrechte Kraft k äquilibriert, die als schwebend getragenes Gewicht oder bequemer als die Zugkraft eines Federdynamometers gegeben ist. Dann gilt die obige Formel. Das aus der Schwere des Hebelarmes entspringende Drehmoment ist balanciert oder wird, als Kraft am Arme r ausgedrückt, zu k addiert.

Umlaufzähler.

Für viele Zwecke genügt ein Zählwerk, dessen Axe während einer bestimmten Zeit mit einem Dreikantdorn an die rotierende Welle faßt. Tachometer lassen aus dem Ausschlag von Zentrifugalpendeln, die gegen Federn wirken, die Umdrehungszahl an einer Skale ablesen. Fehlerquellen bilden die Reibung und die elastische Nachwirkung der Federn.

Im Braun'schen Gyrometer wirkt die Zentrifugalkraft auf eine in einem Glascylinder eingeschlossene Flüssigkeit (Glycerin). Die Kuppe der ein Rotationsparaboloid bildenden Oberfläche wird an einer auf dem Glase angebrachten Teilung abgelesen. Man eicht durch selbstregistrierende Zählwerke oder schreibende Stimmgabeln (29a 2; s. auch Göpel, ZS f. Instr. 1896, 33).

Ferner läßt sich die Resonanz kleiner abgestimmter Streifen aus Uhrfederstahl verwenden (Frahm), die, in einen Kamm angeordnet, auf die Welle gesetzt werden. Meistens genügen die Erschütterungen des rotierenden Systems, um diejenige Feder in starke Schwingung zu versetzen, deren Schwingungszahl der Umdrehungszahl der Welle am nächsten kommt. Sonst erregt man den Kamm durch ein auf die Welle gesetztes Exzenter mechanisch oder durch Unterbrechung eines Stromes, der einen den Kamm anziehenden Elektromagnet betätigt. Vgl. auch S. 524.

Über die Messung des Ungleichförmigkeitsgrades einer Rotation vgl. Göpel, ZS deutsch. Ing. 1900, 1359 u. 1431.

120. Messungen an Wechselströmen.

Der Wechselstrom bedarf für die Begriffe Stromstärke und Spannung besonderer Definitionen. Auch die Messungen sind, erstens wegen der Veränderlichkeit des Zustandes überhaupt, zweitens aber auch wegen der zu den stromerregenden Kräften hinzutretenden el. Kraft der Induktion oder der Aufnahme von Ladung durch die Kapazität der Leiter besonders zu behandeln.

Die der Theorie am einfachsten zugängliche Form ist der Sinus-Vorgang, dargestellt durch $C \sin \frac{2\pi}{\tau} t$, wenn t die Zeit, τ die Dauer der Periode und C den Maximal- oder Scheitelwert einer Spannung (einer Stromstärke) bedeutet. Nennt man n die Periodenzahl oder ν die Wechselzahl in der Zeiteinheit, d. h. $n = 1/\tau$, oder $\nu = 2/\tau$, so kommt $C \sin 2\pi n t$ oder $C \sin \pi \nu t$. Wir wollen $2\pi/\tau = 2\pi n = \pi\nu = a$ bezeichnen und erhalten dann die Form $C \cdot \sin a t$.

Sinus-Spannungen liefert z. B. ein Stahlmagnet, der in einem engen, hinreichend langen Multiplikator rotiert; τ bedeutet dann seine Umlaufszeit. C hat in diesem Falle einen mit τ umgekehrt proportionalen Betrag, ist für ein bestimmtes τ also eine Konstante. Vgl. über einen Sinusinduktor F. K., Pogg. Ann. Jubelbd., 290. 1875. (Daselbst auch eine geometrische Darstellung der in II. gegebenen Ableitung, zugleich mit Rücksicht auf eine Kapazität in der Leitung.)

Sehr schnelle sinusähnliche Schwingungen gibt ein Kranz aus Eisenstückchen auf der Peripherie eines Kreises, der rasch zwischen Magnet- oder Elektromagnetpolen rotiert, die mit Induktionsspulen bewickelt sind. Verstärkt und zugleich von Oberschwingungen gereinigt werden diese Schwingungen, wenn man zu den Induktionsspulen vom Selbst-Ind.-K. S eine solche Kondensatorkapazität c zuschaltet, daß die dem Systeme eigene (Anh. 28) Schwingungszahl $(2\pi\sqrt{cS})^{-1}$ mit der des induzierten Stromes in Resonanz tritt. — Vgl. hierüber und über einen solchen, bis 17000 Schw/sek reichenden Sinusinduktor M. Wien, Ann. der Ph. 4, 425. 1901. Über eine Konstruktion von Siemens & Halske s. Dolezalek, ZS f. Instr. 1903, 240.

I. Stromstärke und Spannung.

Effektive (wirksame) Stromstärke i_e oder Spannung P_e, oder auch Stromstärke (Spannung) schlechthin. So heißt die Wurzel aus dem zeitlichen Mittelwerte der Quadrate der Augenblicks-Stromstärken (Spannungen), welche durch ihre Beziehung zur Stromleistung eine besondere Bedeutung hat; vgl. III. Also:

$$i_e = \left[\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} i^2 \, dt\right]^{1/2} \qquad P_e = \left[\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} P^2 \, dt\right]^{1/2}. \qquad 1.$$

τ ist als Periodendauer (oder ein Vielfaches derselben) zu nehmen, könnte aber, einen symmetrischen Verlauf des positiven gegen den negativen Teil der Kurve vorausgesetzt, natürlich auch die Dauer der halben Periode oder endlich irgend einen großen Zeitraum bedeuten.

Für einen Sinusvorgang, wenn also i bez. P gleich $C \sin \frac{2\pi}{\tau} t$ ist, wird aus Gl. 1 i_e bez. P_e gleich $C/\sqrt{2} = 0{,}707\,C$ gefunden.

Messung. Die Instrumente mit quadratischer Empfindlichkeit, Elektrodynamometer (84), Hitzdraht-Strommesser (85, 4), Elektrometer in Doppelschaltung (127, 128) geben, unabhängig von der Wechselzahl und der Gestalt der Spannungskurve, direkt die „effektiven" Größen. Strommesser mit weichem Eisen (85, 3) müssen für die verschiedenen Periodenzahlen geeicht werden; geeignete Formen des Eisens können jedoch die Differenz der Angaben für Gleich- und Wechselstrom bis hinauf zu Periodenzahlen von 50/sek auf 1 bis 2% vermindern.

Bezeichnungen von geringerer Bedeutung sind: die elektrolytische Stromstärke, d. h. der mit Rücksicht auf die Richtung gebildete algebraische Mittelwert der Augenblicksstromstärken, also $= \frac{1}{\tau}\int_0^\tau i\,dt$. Diese wird von einem gewöhnlichen Galvanometer angegeben; sie ist bei den gebräuchlichen Maschinen mit symmetrischem positiven und negativen Stromverlauf gleich Null.

Mittlere Stromstärke nennt man dasselbe Integral, wenn i immer als positive Größe eingesetzt wird, also ohne Rücksicht auf die Stromrichtung. Die m. Str. kann nicht direkt gemessen, aber aus der Stromkurve abgeleitet werden. Sie ist von Bedeutung für die magnetisierende Wirkung.

Scheitelstromstärke heißt der größte Wert der Augenblicksstromstärke.

II. Scheinbarer Widerstand und Phasenverschiebung.

Für einen unverzweigten Leiter vom Ohm'schen Widerstande w und dem konstanten Selbstinduktionskoeffizienten S (117; Anh. 28) mit sinusförmiger Endspannung von der Periodenzahl $n = 1/\tau$ ist, wenn wieder

$$2\pi/\tau \text{ oder } 2\pi n = a$$

gesetzt wird, die eff. Stromstärke i_e durch die eff. Spannung P_e gegeben als

$$i_e = \frac{P_e}{\sqrt{w^2 + a^2 S^2}}. \qquad 2.$$

$\sqrt{w^2 + a^2 S^2}$ oder $w\sqrt{1 + a^2 S^2/w^2}$ heißt scheinbarer Widerstand („Impedanz"; aS wird wohl „Induktanz" genannt).

Die Stromstärke ist ebenfalls sinusförmig, ihr Verlauf bleibt aber zeitlich hinter der Spannung zurück. Der Betrag dieser Zeit im Verhältnis zur Periodendauer heißt Phasenverschiebung. Indem man den periodischen Vorgang als einen Umlauf auf einem Kreise auffaßt, kann man diese Verschiebung als einen Winkel ansehen, der sich zu 2π oder, wenn φ wie gewöhnlich in Bogengraden ausgedrückt wird, zu 360^0 verhält, wie die zeitliche Verschiebung zur Periodendauer. In diesem Sinne soll der „Phasenverschiebungswinkel" durch φ bezeichnet werden. Dann gilt

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{aS}{w} \quad \text{oder} \quad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{aS}{w}. \qquad 3.$$

Hiernach darf, wenn die Konstante E die Scheitelspannung darstellt, geschrieben werden:

$$i = \frac{E\cos\varphi}{w}\sin(at-\varphi). \qquad 3\text{a}.$$

Man wolle festhalten, daß Konstanz des Ind.-K. S vorausgesetzt wird, daß die Betrachtungen sich also auf technische Maschinen und Stromkreise nur in den besonderen Fällen erstrecken, in denen trotz Magnetisierung von Eisen ein merklich konstanter Ind.-K. erhalten bleibt, wie es z. B. bei Transformatoren der Fall ist, weil diese nämlich nur mäßige Magnetisierungen benutzen.

Ableitung. Die Spannung ist dargestellt durch $P = E\sin at$. Die el. Kraft der Selbstinduktion $-S\,di/dt$ summiert sich mit P, so daß die Stromstärke i der Differentialgleichung unterliegt

$$wi = E\sin at - S\frac{di}{dt}. \qquad 4.$$

Der dieser Gleichung entsprechende periodische Vorgang ist

$$i = \frac{E}{w^2 + a^2S^2}(w\sin at - aS\cos at), \qquad 5.$$

wie man durch Einsetzen von i und di/dt in Gl. 4 leicht beweist. Dies kann man umformen in

$$i = \frac{E}{\sqrt{w^2+a^2S^2}}\sin(at-\varphi), \quad \text{wo } \varphi = \operatorname{arctg}\frac{aS}{w}. \qquad 5\text{a}.$$

Daß Gleich. 5 und 5a identisch sind, sieht man, wenn man die aus $\operatorname{tg}\varphi = aS/w$ folgenden Ausdrücke

$$\cos\varphi = w/\sqrt{w^2+a^2S^2} \quad \text{sowie} \quad \sin\varphi = aS/\sqrt{w^2+a^2S^2}$$

einsetzt in $\sin(at-\varphi) = \sin at\,\cos\varphi - \cos at\,\sin\varphi$.

Aus Gl. 5a folgt: 1. Der Strom bleibt sinusförmig (er hat ferner in der ganzen Leitung zur gleichen Zeit den gleichen Wert).

2. Als Widerstand ist nicht w einzusetzen, sondern der größere Wert

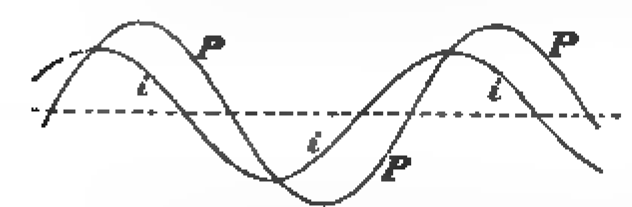
$$\sqrt{w^2 + a^2 S^2} \text{ oder auch } w/\cos\varphi.$$

Also verhält sich der scheinbare zum Ohm'schen Widerstand $= 1 : \cos\varphi$. 6.

3. Der Strom bleibt hinter der Spannung um die Zeit $\tau' = \varphi/a$ oder, da $a = 2\pi/\tau$ gesetzt wurde, um $\tau' = \tau \cdot \varphi/(2\pi)$ zurück. Also verhält sich $\varphi : 2\pi = \tau' : \tau$ oder, wenn φ in Bogengraden gemessen werden soll,

$$\varphi : 360 = \tau' : \tau.$$

Graphische Darstellung. Der zeitliche Verlauf von i und P werde durch die Höhe von Ordinaten dargestellt, wobei die Höhe für i so gewählt werden soll, daß, wenn keine Selbstinduktion vorhanden wäre, die Kurven für i und P zusammenfallen. Durch Mitwirkung der Selbstinduktion entsteht dann nach Gl. 3a für i eine gegen P niedrigere und verschobene Kurve. Der zeitliche Vorgang wird mittels der Figur erhalten, wenn man ein Papier mit ausgeschnittenem schmalen, vertikalen Spalt über die einen Vorgang mit 45° Phasenverschiebung darstellende Zeichnung hält und diese von links nach rechts unter dem Spalt durchzieht. (Die Herstellung der Kurve für i wird dadurch erleichtert, daß [vgl Gl 3] ihre Scheitelpunkte bei dieser Wahl der Ordinatenhöhe für i stets in der Kurve für P liegen.)



Über graph. Darstellungen, besonders mit Kreiskoordinaten vgl. Anh. 26; ausführliches in Bedell u. Crehore, Theorie d. Wechselströme, deutsch von Bucherer.

In ähnlicher Weise treten auch bei dem Vorhandensein von Kapazität in der Leitung Verschiebung und Größenänderung ein, aber mit umgekehrtem Vorzeichen, also mit Voreilen und Verstärken des Stromes. — Näheres, auch über den ähnlichen Einfluß eingeschalteter chemischer Zersetzungszellen z. B. in K. u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte S. 61 ff.

III. Stromleistung L und Stromarbeit; Leistungsfaktor.

a) In einem Leiter von der Endspannung P und der gleichzeitigen, nach der Richtung des Spannungsgefälles positiv gerechneten, Stromstärke i beträgt stets die in dem Zeitelement dt verrichtete Stromarbeit $iP\,dt$ (Anh. 30). Die Arbeit während der Zeit τ beträgt also $\int_0^\tau iP\,dt$, die mittlere Leistung L wird demnach, wenn τ die Dauer der Periode ist, allgemein dargestellt durch

$$L = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau iP\,dt. \qquad 7.$$

b) Induktionsfreier Leiter. Hier gilt einfach das Produkt aus der effektiven Stromstärke und Spannung, also

$$L = i_e P_e. \qquad 7a.$$

Für Sinusvorgänge (vgl. oben) ist also $L = \frac{1}{2} JE$, wenn J und E die Scheitel-Stromstärke und Spannung bedeuten.

Denn induktionsfrei gilt $P = w\,i$, also nach Gl. 1 $P_e = \left[\frac{w^2}{\tau}\int_0^{\tau} i^2\,dt\right]^{1/2}$. Dies mit $i_e = \left[\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} i^2\,dt\right]^{1/2}$ multipliziert gibt $i_e P_e = \frac{w}{\tau}\int_0^{\tau} i^2\,dt$. Denselben Wert aber erhält man durch Einsetzen von $P = w\,i$ in Gl. 7.

c) **Leiter mit Selbstinduktion, also mit Phasenverschiebung.** Ist φ der Phasenverschiebungswinkel, so gilt für **Sinusvorgänge**

$$L = i_e P_e \cdot \cos\varphi.$$

Beweis. Aus $P = E\sin(2\pi/\tau)t$ und $i = J\sin[(2\pi/\tau)t - \varphi]$ erhält man $L = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} iP\,dt = \frac{EJ}{\tau}\int_0^{\tau}\sin\left(\frac{2\pi}{\tau}t - \varphi\right)\sin\frac{2\pi}{\tau}t\,dt$

$$= \frac{EJ}{\tau}\cos\varphi\int_0^{\tau}\sin^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt - \frac{EJ}{\tau}\sin\varphi\int_0^{\tau}\cos\frac{2\pi}{\tau}t\sin\frac{2\pi}{\tau}t\,dt.$$

Das zweite Integral ist gleich $(\sin^2 2\pi - \sin^2 0)/4\pi$, also stets gleich Null. Nach Gl. 1 ist nun

$$J\left[\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\sin^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt\right]^{1/2} = i_e, \qquad E\left[\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}\sin^2\frac{2\pi}{\tau}t\,dt\right]^{1/2} = P_e;$$

das erste Glied in der Gleichung für L ist also $= i_e P_e \cdot \cos\varphi$, q. e. d. (Die Technik nennt $i_e \sin\varphi$ den „wattlosen Strom“ und $i_e \cos\varphi$ den „Wattstrom“.)

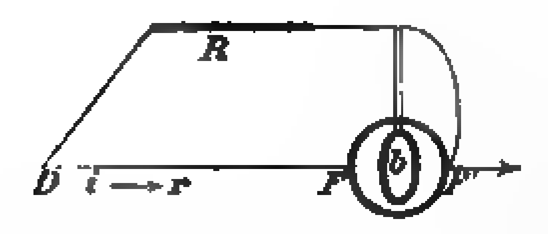
Leistungsfaktor. So heißt der Faktor, mit welchem multipliziert die Leistung, die ohne Phasenverschiebung bestehen würde, die der Verschiebung φ entsprechende Leistung gibt. Für Sinusvorgänge ist er also $= \cos\varphi$.

Auch für **nicht sinusförmige** Ströme und endlich auch, wenn Strom und Spannung wegen Anwesenheit von Eisen einen unähnlichen Verlauf haben, wo also die Phasendifferenz sich nicht mehr als konstante zeitliche Verschiebung definieren läßt, wird L in derselben Form geschrieben $L = i_e P_e \cdot \cos\varphi$. Der Faktor $\cos\varphi$ ist der aus der einzelnen Messung von L, i_e und P_e sich ergebende Leistungsfaktor k (stets $\leqq 1$). — **Auch in diesen Fällen nennt man** $\operatorname{arc}\cos k$ **die Phasenverschiebung.**

IV. Messung der Leistung.

1. Mit dem Leistungs- oder Effektmesser.

Das Verfahren liefert die Leistung unabhängig von Phasenverschiebung. Die Aufgabe besteht darin, ein Instrument anzuwenden, welches eine Kraft usw. erfährt, die sowohl der Spannung wie der Stromstärke proportional ist. Dies leistet das Dynamo-



meter (84): durch eine feste, dickdrähtige Rolle (Widerstand $= r_f$) wird der Strom geleitet; die bewegliche, dünndrähtige Rolle (Widerstand $= r_b$), meist mit großem vorgeschalteten, induktionsfreien Widerstande R, wird als „Spannungszweig" an den Nutzwiderstand r angelegt (Fig.). Der vorgeschaltete Widerstand R soll, damit die beiden Rollen keine zu großen Spannungsunterschiede bekommen, auf der Seite von D liegen.

Die Leistung L in dem Leitungsteile r einschl. r_f ist dem Skalenausschlage α proportional, $L = A \cdot \alpha$. Die Instrumentkonstante A würde aus dem Reduktionsfaktor C des Dynamometers für Strommessung (84, 89) als $A = C^2(R + r_b)$ entstehen. Sie läßt sich auch direkt durch Anlegung des Effektmessers an einen bekannten Gleichstrom i vom Widerstande w einschl. r_f (also von der Leistung $i^2 w$) als $A = i^2 w / \alpha'$ ermitteln, wenn α' den hier erhaltenen Ausschlag bedeutet.

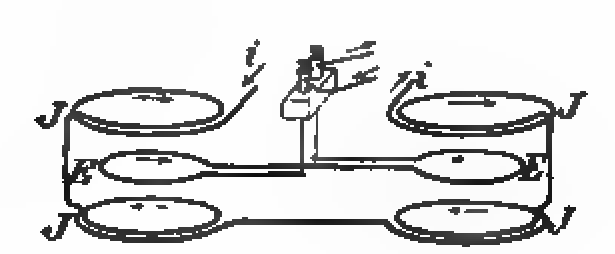
Korrektionen. a) Die als $r_f i_s^2$ zu berechnende kleine Leistung in der Stromspule ist von der ganzen gemessenen Leistung abzurechnen.

b) Wegen der Selbstinduktion in der Spannungsspule bleibt eine kleine Phasendifferenz ϑ zwischen Spannung DF' und Strom i_b, gegeben durch $\mathrm{tg}\,\vartheta = \omega S_b/(R + r_b)$, bei den üblichen Instrumenten zwischen 0,001 und 0,01. Deswegen sind die Angaben des Leistungsmessers, wenn zwischen Hauptstrom i und der Spannung die Ph.-Diff. φ' besteht, mit $(1 + \vartheta^2)/(1 + \vartheta\,\mathrm{tg}\,\varphi')$ zu multiplizieren. Streng gilt dies nur für Sinusvorgänge, es bleibt aber bis auf kleine Beträge (z. B. von einigen Zehntausendteln) praktisch richtig.

H. F. Weber, Bericht über d. el. Ausstellung Frankfurt, II S. 43 ff.

Technische Leistungsmesser (Wattmeter).

Wattwage (Lord Kelvin). Die Figur stellt die Anordnung, eine Kombination zweier Rayleigh'scher Stromwagen (84 III) an einer Laufgewicht-Wage, schematisch dar. Alle Spulen liegen horizontal, die Spannungsspulen E — in Wirklichkeit mit zahlreichen Windungen — auf einem Wagebalken, der, vermöge seiner Aufhängung an seinen Zuleitungen, weichen Kupferdrahtbändern, vertikal drehbar ist. Diese Spulen werden, um eine Einwirkung des Erdmagnetismus usw. auszuschließen, von dem Spannungsstrom entgegengerichtet durchflossen.



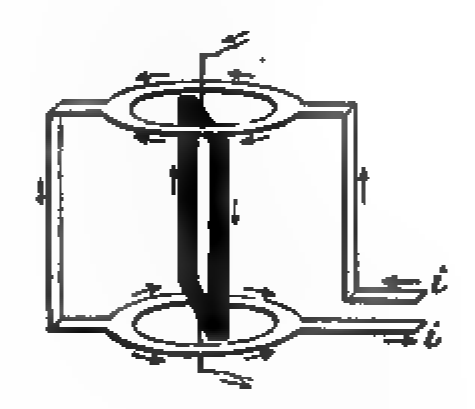
Die Stromrichtung in den vier Stromspulen J ist derart, daß die eine Spannungsspule nach oben, die andere nach unten gezogen und gestoßen wird. Das hieraus resultierende Drehmoment ist der Stromleistung proportional; es wird durch eine — nicht gezeichnete — Reiterverschiebung auf einer Skale gemessen, deren Einteilung gleich die Leistung angibt.

Die Stromspulen haben an Instrumenten für große Leistung wenige Windungen und umgekehrt.

Würden die Spannungsspulen anstatt nebengeschaltet, hintergeschaltet sein, so daß der ganze Strom auch sie durchflösse, so würde das Instrument als gewöhnliche elektrodynamische Stromwage wirken (84 III). Die „zusammengesetzte Wage" (composite balance) ist mit einem Kommutator für beide Gebrauchsarten eingerichtet.

Über verschiedene Ausführungen desselben Grundgedankens vgl. den Katalog von J. White, Glasgow.

Leistungsmesser von Raps (Siemens & Halske). Der Hauptstromleiter verzweigt sich (Fig.) durch zwei über einander liegende Paare von halbkreisförmigen Bahnen. Zwischen diesen hängt die Spannungsspule, deren Stromwindungen sich in die Richtung des Hauptstroms zu drehen suchen. Das daraus entstehende Drehmoment ist vermöge der Halbkreisform auf einer großen Strecke nahe konstant, so daß für die Leistung eine fast gleichmäßige Skalenteilung resultiert. Die Stromzufuhr zur Spannungsspule und ihre Aufhängung geschehen wie bei den Weston-Galvanometern (85, 2). Ein in einem kreisförmig gebogenen Luftcylinder sich bewegender Kolben gibt die Dämpfung.



Der Hauptstromleiter besteht aus isolierten Blechen, die je nach dem beabsichtigten Meßbereich des Instrumentes verschieden hinter oder nebeneinander geschaltet sind, auch an demselben Instrument durch Stöpsel in zwei Schaltungen gebraucht werden können

Raps, Elt ZS 1899, 665.

Als weitere Leistungs- oder Wattmesser mögen genannt werden die für technische Zwecke geeignete Ausführung des Siemens'schen Torsionsdynamometers (84 II) von Ganz & Co; der L.-M. von Hartmann & Braun (Bruger, Phys. ZS 4, 876. 1903); der Ferraris-Leistungsmesser von Siemens & Halske; die Instrumente von Weston oder der Allg. El.-Gesellschaft.

Als Fehlerquelle ist bei sehr dicken Leitungen der Stromspulen und raschem Stromwechsel hauptsächlich das durch die Selbstinduktion bewirkte Herausdrängen der Ströme aus den inneren Leitungsteilen zu beachten. Man schlitzt deswegen die Leiter oder setzt sie aus besponnenen Drähten oder aus Lamellen zusammen, die gegeneinander isoliert sind, etwa durch mit Lack getränktes Japanpapier. Vollkommener Schutz entsteht dadurch nicht immer.

2. Durch Messung von Strom und Spannung; s. I u. III.

a) In einer induktionsfreien Leitung (Glühlampen) ist $L = i_e P_e$. Vgl. auch c.

b) Mit Selbstinduktion kommt der Faktor $\cos\varphi$ hinzu (vgl. III c), also ist, wenn die Leistung aus Strom und Spannung ermittelt werden soll, außerdem die Verschiebung φ zu bestimmen; vgl. auch **121** V.

c) Ist in der Leitung kein Eisen (keine Hysterese) und auch keine fremde el. Kraft (z. B. Polarisation in Zersetzungszellen) oder Wirbelstrom vorhanden, so findet nur Energieumsatz in Joule'sche Wärme des Nutzwiderstandes r statt, dann ist L also, auch wenn Selbstinduktion und Phasenverschiebung besteht, durch Stromstärke und Widerstand gegeben: $L = i_e^2 r$.

Messung der Phasenverschiebung φ. Messung von L mit dem Leistungsmesser (IV 1) und gleichzeitig von i_e und P_e ergibt den Leistungsfaktor $k = L/(i_e P_e)$, also $\varphi = \arccos k$.

Über die Prüfung von Elektrizitätszählern für Wechselstrom s. z. B. Orlich, ElT. ZS 1901, 94.

Die Anwendung elektrometrischer Methoden auf die Messung von Stromleistungen s. in **130** IV.

V. Bestimmung der Periodenzahl.

Hierzu dienen u. a. folgende Mittel.

1. Resonanz. Der Wechselstrom durchfließe einen Elektromagnet mit vorgesetzter eiserner Feder, die zum Mitschwingen angeregt wird. Die Feder wird durch Verkürzen usw. auf maximales Mitschwingen abgestimmt und nun z. B. stroboskopisch beobachtet (57, 3 u. 6). — Oder es ist eine größere Anzahl von Federn bekannter, abgestufter Schwingungsdauern vorhanden, von denen man diejenige aussucht, die von dem Elektromagnet am stärksten erregt wird. Vgl. auch S. 516.

2. Ein phonisches Rad (57, 7) wird durch den Wechselstrom in Bewegung erhalten.

3. Chemisch präpariertes Papier, welches durch den Strom gefärbt wird, schiebt sich unter einem Stromkontakt und unter einer schreibenden Stimmgabel fort (Janet; vgl. 57, 1).

4. Die Wechselspannung wird mittels einer fortschreitenden Spitze auf einen Harzkuchen übertragen und nachher durch Lichtenberg'sche Bestäubung sichtbar gemacht.

5. Sinusströme kann man, ganz oder teilweise, durch eine Rolle mit bekannter Selbstinduktion leiten und durch den Vergleich des scheinbaren Widerstandes (II) mit dem Ohm'schen die Frequenz bestimmen.

6. Schnell wechselnde Zustände können auf ein Telephon übertragen und nach der gehörten Tonhöhe beurteilt werden oder nach Luftwellen, die man mittels Telephons nach 56 I oder II in einer Röhre erregt und mißt.

7. Die Frequenz einer Wechselstrommaschine ergibt sich als Umlaufzahl (S. 516), multipliziert mit der aus der Konstruktion ersichtlichen Periodenzahl eines Umlaufs.

Literatur u. a.: Resonanz: Stöckhardt, Elt. ZS 1899, 873; besonders Kempf-Hartmann, ib. 1901, 9, daselbst auch eine Literaturzusammenstellung. — Bestäubung: W. König, Wied. Ann. 67, 583. 1899; vgl. auch v. Bezold, Pogg. Ann. 140, 145. 1870. — Telephon: K. E. F. Schmidt, Ann. der Ph. 7, 225, 1902.

Die Aufnahme von Stromkurven s. in **121** V.

121. Wechselstrom-Dynamomaschinen.

Die Wechselstrom-Maschine gestattet, bei ruhenden Ankerspulen und umlaufendem System der durch Gleichstrom erregten Feldmagnete, direkt hohe Spannungen bis 20000 und mehr V zu erzeugen, was für Fernübertragung elektrischer Leistung wichtig ist. Denn hierzu werden geringe Stromstärken gefordert, da sonst entweder die Kupferquerschnitte der Leitungen oder die Spannungsverluste zu groß werden. Ferner kann die Spannung von Wechselströmen durch Apparate ohne bewegliche Teile (Transformatoren, 122), die also keiner Schmierung und Wartung bedürfen, in fast beliebigem Verhältnis, mit wenigen Prozenten Verlust, den Gebrauchszwecken entsprechend umgesetzt werden.

Gleichstrom von wesentlich mehr als 1000 V Spannung läßt sich wegen des Kollektors nicht herstellen, und außerdem erfordert seine Transformierung auf andere Spannungen laufende Maschinen und daher Wartung.

Zur Fernübertragung von Starkstromleistungen eignet sich daher nur der Wechselstrom.

Man unterscheidet Ein- und Mehrphasenmaschinen, die letzteren entweder 2phasig, d. h. mit zwei um $\frac{1}{4}$ Periode (90°), oder meist 3phasig, d. h. mit drei um je $\frac{1}{3}$ Periode (120°) gegeneinander verschobenen Strömen; vgl weiter unten Drehstrommaschinen. Mehrphasenströme sind mittels Drehfeldes unmittelbar zum Motorenbetrieb anwendbar. — Die in Deutschland gebräuchlichen Periodenzahlen/sek liegen zwischen 45 und 55.

I. Stromstärke und Widerstand. Über Definitionen, Gesetze und Messungen vgl. **120** I u. II.

II. Effektive elektromotorische Kraft E_e. Über Messung der Klemmspannung P_e s. **120** I. — Es werde so, wie dort, wenn n die Periodenzahl/sek bedeutet, $a = 2\pi n$ bezeichnet.

Der Spannungsverlust im Anker vom Widerstande w_A be-

trägt $v_s = i_s \sqrt{w_A^2 + a^2 S_A^2}$; die innere Verzögerung φ_A der Stromstärke gegen den Spannungsverlust ist gegeben durch $\operatorname{tg} \varphi_A = a S_A / w_A$. Ferner bedeute φ die äußere Verzögerung von i gegen P (vgl. **120** II). Für die ganze el. Kraft gilt dann

$$E_s^2 = P_s^2 + v_s^2 + 2 P_s v_s \cos(\varphi_A - \varphi).$$

Die Formel setzt Sinusströme voraus.

III. Leistung. Über die Messung s. **120** IV. Die ganze äußere Leistung wird gemessen, indem man die Maschine mit ihren Polen bei D und F' an den Leistungsmesser (Fig. S. 522) anschließt. Die kleine Leistung $P_s^2/(R + r_0)$ in der Spannungsspule addiert man zu der gemessenen Stromleistung.

IV. Der Wirkungsgrad einer Wechselstrommaschine ergibt sich auf analogem, elektrischem Wege wie bei der Gleichstrommaschine unter **119** V. Die gesamten Verluste im Erregerstromkreise sind eventuell einzurechnen.

V. Bestimmung einer Spannungs- oder Stromkurve.

a) Augenblickskontakt. Mit der Welle der Maschine läuft eine Scheibe (Joubert'sche Scheibe) um, deren Peripherie einen leitenden Kontakt mit sich führt. Dieser sei z. B. mit dem einen Maschinenpol dauernd verbunden, so daß er stets die augenblickliche Spannung dieses Pols hat. Der Kontakt berührt bei jedem Umlauf eine feststehende, aber mit einem konzentrischen Teilkreise längs der Peripherie der Scheibe einstellbare Feder in einer durch ihre Einstellung bestimmten Phase des Umlaufs.

Mit dieser Feder und andrerseits dem zweiten Maschinenpole seien die Pole eines Elektrometers oder Galvanometers verbunden. Dem Meßinstrument sei ein Kondensator geeigneter Größe parallel geschaltet.

Der Ausschlag zeigt die Spannung an dem gewählten Punkte der Kurve an. Die ganze Spannungskurve konstruiert man aus einer hinreichenden Anzahl solcher Bestimmungen.

Die Stromkurve wird erhalten, wenn die beschriebene Kontaktleitung samt dem Meßinstrument statt an die Maschinenpole an einen induktionsfreien Teil der Stromleitung von bekanntem Widerstande angelegt ist. — Der Vergleich der bei einem bestimmten Vorgange gleichzeitig aufgenommenen Spannungs- und Stromkurve gibt, wenn die Kurven ähnlich sind, die Phasenverschiebung (**120** II).

Über einen hierauf beruhenden Kurvenindikator, welcher die Ausschläge des Galvanometers usw. auf einen Cylinder zu projizieren und nachzuzeichnen gestattet, der mit der Kontaktfeder gleichzeitig um denselben Winkel verstellt wird, s. R. Franke, Elt. ZS 1899, 802; ZS f. Instr. 1901, 11.

b) Oszillograph, Rheograph. Mittels eines Galvanometerspiegels von momentaner Folgsamkeit (Blondel, Duddell, Hotchkiss u. Millis; für Demonstrationszwecke einfacher Wehnelt: gedämpfte Schwingungen bis 50000/sek; Abraham: Kompensation der Trägheit durch Induktion) wird der augenblickliche Stromzustand ohne merklichen Zeitverlust wiedergegeben. Der zeichnende Lichtstrahl erhält durch einen oszillierenden Spiegel oder mittels eines vor einem vertikalen Glühlampenfaden bewegten Horizontalspaltes zugleich eine Vertikalschwingung; die Kurve wird hierdurch zusammenhängend sichtbar gemacht. Blondel 1893. 1899; Abraham 1897. Darstellung und Literatur bei Blondel, Rapports du Congrès internat. III, 264. 1900; Orlich, ZS f. Instr. 1901, 289. — Vgl. auch Feußner, Elt. ZS 1901, 207.

c) Zerlegung nach der Fourier'schen Reihe. Analytisch drückt man den periodischen Stromvorgang i von der Hauptperiode τ aus, wenn wieder $a = 2\pi/\tau$ ist,

$$i = J_1 \sin(at + \varphi_1) + J_2 \sin(2at + \varphi_2) + J_3 \sin(3at + \varphi_3) + \cdots.$$

Die Konstanten J und φ der Reihe lassen sich mit dem Dynamometer bestimmen, wenn die eine Rolle von dem zu analysierenden Strom, die andere von Sinusströmen der Periode τ bez. $\tau/2$, $\tau/3$ usw. durchflossen wird. Vgl. hierüber Des Coudres, Elt. ZS 1900, 753 u. 771.

d) Die chemische Bestimmung der Periodendauer (120 V) läßt mittels nebeneinanderliegender Aufnahmen der Spannung und des Stroms die Phasenverschiebung bestimmen. Janet, Blondel, C. R. 1894.

e) Abgelenkte Kathodenstrahlen (Braun'sche Röhre). Vgl. 124 I. Die Strahlen treffen, durch ein Diaphragma eingegrenzt, einen der Kathode im Rohre gegenüberliegenden fluoreszierenden Schirm. Der zu untersuchende Strom durchfließt eine neben dem Diaphragma angebrachte kleine elektromagnetische „Indikatorspule" und lenkt dadurch den Lichtfleck ab. Im rotierenden Spiegel (29a) kann man die durch Wechselströme entstehenden Schwingungen beobachten. Wied. Ann. 60, 552. 1897

Indem man mittels eines neben dem Diaphragma rotierenden Magnetes dem Fleck gleichzeitig in einer zur obigen senkrechten Richtung eine Sinusbewegung von gleichem oder ganzzahlig vermehrtem oder vermindertem Takt erteilt, erscheinen Lissajous'sche Figuren.

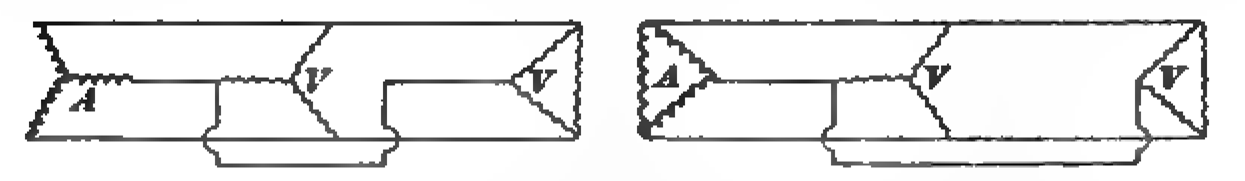
Zwei senkrecht zu einander gestellte Ind.-Spulen endlich erzeugen (ähnlich wie zwei gekreuzte Stimmgabeln nach Lissajous) Kurven, die bei gleicher Stromphase geradlinig, bei Phasenverschiebung elliptisch verlaufen.

f) Glimmlichtindikator für hochgespannte Wechselströme. Das negative Glimmlicht an gestreckten Drahtelektroden einer Geißler'schen Röhre wird im rotierenden Spiegel beobachtet. Unter der Voraussetzung, daß die Länge des Glimmlichtes der Stromstärke proportional ist (Wilson), stellt die Umgrenzungskurve des Bildes die Stromkurve dar. Gehrcke, Verh. D Ph. Ges. 1904, 176.

Drehstrom-Maschine. Die Drehstrom-Maschine unterscheidet sich von der Einphasen-Wechselstrom-Maschine wesentlich dadurch, daß sie im Anker drei gleiche von einander unabhängige Systeme von Wechselstromspulen besitzt, welche gegenüber den Feldmagneten räumlich so verteilt sind, daß die erzeugten Kurven der elektromotorischen Kräfte eine Phasendifferenz von 120° gegen einander haben. Aufzeichnung der Sinuskurven oder einfache mathematische Ableitung ergibt, daß die Summe der drei Momentanwerte der elektromotorischen Kräfte jederzeit Null ist. Sind in den drei Phasen die Ohmschen Widerstände, bez. die Selbstinduktionskoeffizienten, bez. die Kapazitäten je untereinander gleich (symmetrische Belastung), so sind auch die drei Ströme gleich und die Stromkurven sind gegen ihre zugehörigen Spannungskurven um die gleichen Phasenwinkel verschoben, haben daher untereinander auch eine Phasendifferenz von 120°, und die Summe der Momentanwerte der Ströme ist dann ebenfalls jederzeit Null.

Daher kann man bei symmetrischer Belastung die drei Wechselströme in drei Leitungen verschicken, denn jederzeit führt eine der Leitungen an Strom zur Maschine zurück, was die beiden anderen zum Verbrauchsort hinaus senden. Die Zusammenschaltung der drei Systeme von Ankerspulen bei A kann

a) in Sternschaltung oder *b*) in Dreiecksschaltung



geschehen. Zugleich kann der Verbrauch an den Stellen V beliebig in Sternschaltung oder in Dreiecksschaltung erfolgen.

Sind P_p (Phasenspannung) und i_p (Phasenstrom) die effektive Spannung und Stromstärke in jedem Spulensystem (Phase) des Ankers und P_l (Leitungsspannung) und i_l (Leitungsstrom) die betreffenden Werte zwischen bez. in den Leitungen, so gilt für Sternschaltung $i_l = i_p$ und $P_l = \sqrt{3} \cdot P_p = 1{,}73\ P_p$ und entsprechend für Dreiecksschaltung $P_l = P_p$ und $i_l = \sqrt{3} \cdot i_p$. Bei nicht sinusförmigen Kurven ist für $\sqrt{3}$ einzusetzen $f\sqrt{3}$, wo der Faktor $f < 1$ ist, da die höheren harmonischen Schwingungen 3ter, 9ter, 15ter ... Ordnung bei Drehstrom fehlen.

Bei symmetrischer Phasenverschiebung des Stroms gegen die Spannung um den Winkel φ ist die Leistung in jeder Phase $L_p = P_p i_p \cos\varphi$, daher die Leistung aller drei Phasen der Drehstrom-Maschine für beide Schaltungen

$$L_u = 3 P_p i_p \cos\varphi = \frac{3}{\sqrt{3}} P_l i_l \cos\varphi = \sqrt{3} P_l i_l \cos\varphi.$$

Für symmetrische Belastung ergibt bei Einschaltung eines Leistungsmessers dessen Ablesung ($P_l i_l \cos\varphi$) multipliziert mit $\sqrt{3}$ die Leistung am Orte der Messung. Wird gleichzeitig noch P_l und i_l gemessen, so kann wie beim Wechselstrom die Phasenverschiebung φ ermittelt werden.

Leistungen, die auf die drei Phasen unsymmetrisch verteilt sind, können stets mit drei, zwischen je zwei Leitungen verteilten Leistungsmessern bestimmt werden. Über die Messung mit zwei bez. einem Leistungsmesser vgl. C. Heinke, Wechselstrommessungen und magnetische Messungen. Leipzig 1897, S. 116 ff.

122. Transformatoren.

Der Transformator setzt eine Wechselstrom-Leistung von hoher in Leistung von niederer Spannung um oder umgekehrt. Das Mittel hierzu ist die Wechsel-Induktion zwischen Spulen verschiedener Windungszahl, für technische Zwecke meist verstärkt durch gleichzeitige Magnetisierung lamellaren Eisens. Alte Formen von Transformatoren sind das Neeff'sche oder das Rühmkorff'sche Induktorium. Die modernen, eisengeschlossenen Transf. besitzen einen vielmal höheren Wirkungsgrad; vgl. III.

Gebräuchliche Formen z. B. in Grawinkel-Strecker, S. 336, 345 1900.

I. Induzierte elektromotorische Kraft.

Es seien w_1, w_2 die Ohm'schen Widerstände, P_1, P_2 und i_1, i_2 die effektiven Klemmspannungen und Stromstärken (d. h. die in **120** I mit P_e und i_e bezeichneten Größen) in beiden Wicklungen, L_1 die den Primärklemmen zu-, L_2 die von den Sekundärklemmen abgeführte Leistung (**120** III u. IV), E_1, E_2 die zusammen durch die Oszillationen des Magnetismus und der Ströme durch gegenseitige und Selbstinduktion primär und sekundär induzierten (effektiven) el. Kräfte.

Bei modernen Transformatoren mit geringen Verlusten sind die E und P bezüglich nahe gleich und es gilt für ihre kleinen Unterschiede von der Stromform unabhängig nahe die Beziehung

$$P_1 - E_1 = \frac{w_1 L_1}{P_1}; \quad E_2 - P_2 = \frac{w_2 L_2}{P_2}.$$

Danach lassen sich E_1 und E_2 bestimmen, da die übrigen Größen, z. B. P und L, nach **120** I u. IV zu messen sind.

II. Übersetzungsverhältnis P_2/P_1.

P_2/P_1 ist nahe gleich E_2/E_1 und dies sehr nahe gleich dem Verhältnis der Windungszahlen. Zur Messung dienen zwei Wechselstromspannungsmesser (**120** I), der für die Hochspannung mit größerem, induktionsfreiem Vorschaltwiderstande.

Bei konstantem P_1 nimmt P_2 vom Leerlauf bis zur Vollbelastung (vgl. die obige Formel) nur sehr wenig ab, z. B. bei Transformatoren für mehr als 2 Kilowatt Leistung um 2 bis 3%.

III. Wirkungsgrad L_2/L_1.

Wegen des Energieverlustes durch Hysterese bei der Magnetisierung, durch die in den zusammenhängenden Metallmassen induzierten Wirbelströme und endlich durch die Stromwärme ist L_2 stets kleiner als L_1. Das Verhältnis L_2/L_1 wird, ähnlich wie unter **119** V angegeben, folgendermaßen durch eine Verlustbestimmung ermittelt.

Man vergleicht mit der durch die Konstruktion des Transformators bedingten normalen Leistung L_2 die mit dem Effektmesser bestimmte Leistung L', welche in die Primärwicklung bei normalem P_1 und offenem Sekundärkreise hineinfließt. Indem man bei diesem Leerlaufversuch die Spannung P_1 (oder strenger das hiervon wenig verschiedene E_1; vgl. die Formeln unter I) ebenso hoch hält wie bei dem Normalbetrieb, so ist die Magnetisierung, also auch der Hysteresis- und Wirbelstromverlust V', in beiden Fällen gleich. L' liefert, ev. um das sehr kleine $w_1 i_1'^2$ vermindert, dieses V'. Zu V' kommt der für Normalbetrieb zu ermittelnde Verlust durch Stromwärme $V = i_1^2 w_1 + i_2^2 w_2$ (vgl. **119** V).

Der gesamte aus diesen vier Größen bestehende Transformatorenverlust beträgt bei modernen Apparaten

für eine Leistung > 20	von 5	von 1 Kilowatt
weniger als 3%,	etwa 5%,	etwa 8%.

Der durch die Phasenverschiebung φ zwischen Spannung

und Stromstärke bestimmte Leistungsfaktor der in die Primärwicklung eingeführten Energie (vgl. **120** III c) ist bei Vollbelastung kaum von 1 verschieden, da alsdann diese Phasenverschiebung sehr klein ist. Er sinkt mit Abnahme der Belastung zunächst langsam, dann schneller bis auf etwa 0,6 bei Leerlauf (für die jetzt gebrauchten eisengeschlossenen Typen).

IV. Phasenverschiebung φ. Gemessen seien die (effektive) Klemmspannung P, Stromstärke i und Leistung L. Die Phasenverschiebung ist gegeben durch $\cos\varphi = L/(Pi)$; vgl. **120** III c.

Die Phasen von Primär- und Sekundärstrom sind bei Vollbelastung für einen modernen Transformator, auf gleiche Richtung im Raum bezogen, fast genau entgegengesetzt.

Auf Drehstrom-Transformatoren findet das unter **121** V gesagte sinngemäße Anwendung.

Vgl. z. B. Feldmann oder Kapp, Wechselstrom-Transformatoren.

123. Elektrische Lampen.

Photometrie elektrischer Lampen. Räumliche Lichtverteilung. Vgl. 72.

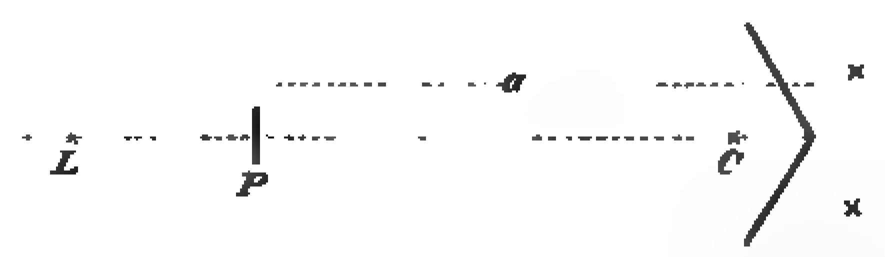
Die mittlere räumliche Lichtstärke in einem abgegrenzten Kegel ist gleich dem Lichtstrom in diesem, geteilt durch seinen Öffnungswinkel, also durch 4π, wenn die ganze Lichtmenge gegeben ist. Zur Ermittelung gehört das Photometrieren nach einer ausreichenden Anzahl von Richtungen. Man zerlegt z. B. eine um die Lampe gedachte Kugelfläche in Zonen gleichen Flächenraums und diese durch Meridiane in gleiche Teile Man mißt in der Richtung nach den Mitten dieser Teile hin und nimmt das Mittel. Glühlampen werden hierbei auf einem Gestell mit horizontaler und vertikaler Drehaxe mit Teilkreisen montiert.

Eine eingehende Darstellung und die Anwendung eines rotierenden Spiegels sowie die an mehreren Typen von Glühlampen gefundene Lichtverteilung siehe bei Liebenthal, ZS f. Instr 1899, 193 u. 225.

Glühlampen. In der Praxis ist es gebräuchlich, die horizontalen Lichtstärken nach drei um je 120° auseinander liegenden Richtungen zu messen, von denen die eine senkrecht zur Verbindungslinie der Enden des Kohlefadens liegt, und zwar mit Hilfe von Spiegelung gleich das Mittel aus den drei Lichtstärken herzustellen.

Hierzu dienen (Fig f S.) zwei um 120° gegen einander geneigte Spiegel. In einem festen Punkte C ihrer Mittellinie (90 mm vor der Kante wechselt man die zu messende Lampe mit einer Normallampe aus und photometriert beide einschließlich ihrer Spiegelbilder aus einem großen Abstande gegen ein konstantes Hilfslicht L. Der Abstand a vom Photo-

meter P wird dabei von der Kante des Winkelspiegels gezählt, in welcher der Schwerpunkt der drei Lichter liegt; Fig. — Vgl. Liebenthal l. c



Dieses Verfahren, bei dem streng noch der Schwächungskoeffizient der Spiegel (etwa 0,93 an guter Versilberung) in Rechnung gezogen werden müßte, genügt praktischen Zwecken. Es ist dabei gebräuchlich, die Öffnung des Kohlefadens senkrecht zur Mittellinie zu stellen. Die Größe der aus der Spiegelschwächung entspringenden Fehler kann dadurch ermittelt werden, daß man die Lampe um ihre Axe dreht.

Bogenlampen lassen sich nicht wohl unmittelbar mit der Hefnerlampe vergleichen. Als Zwischenglied dient z. B. eine hochkerzige Glühlampe. Vgl. S. 329 Bei Messungen nach verschiedenen Richtungen benutzt man wohl einen um 45° gegen die Photometerbank geneigten, um eine der Bank parallele Axe drehbaren Spiegel; die Abschwächung bei der Reflexion wird für den Spiegel ein für allemal besonders bestimmt. Direkter ist die Anwendung eines in beliebiger Richtung einstellbaren Photometers, z. B. des Weber'schen mit dem Lummer-Brodhun'schen Würfel (72, 6).

Die vollständige Untersuchung elektrischer Lampen besteht in gleichzeitiger Messung der Lichtstärke und des Energieverbrauchs, der bei Gleichstrom als Spannung×Stromstärke, bei Wechselstrom durch die in 120 IV behandelte Leistung bestimmt wird. Außerdem kann die Untersuchung die Haltbarkeit betreffen.

Je höher die Temperatur einer Lampenfaser, um so geringer ist der Energieverbrauch pro Lichteinheit, um so geringer aber auch die Lebensdauer der Lampe. Die normale Spannung muß daher sehr nahe innegehalten werden. 1% Änderung der Spannung bewirkt 6 bis 7% Änderung der Lichtstärke.

Vgl z. B. Krüfs, die el. Photometrie; Grawinkel-Strecker, Hilfsbuch 6. Aufl. S. 220. — Ausführliche Darstellung u. Literatur bei Fleming, J. Inst. of El. Eng. 32, 119 u. 183. 1903; auch Electrician 50, 438 ff. 1903.

124. Messung an Vakuumröhren (Plücker-Geifsler 1858); Kathodenstrahlen (Hittorf 1869).

I. Experimentelles.

Bei konstant bleibender Oberfläche der Kathode wächst die Länge der Kathodenstrahlen mit zunehmender Spannung und abnehmender Gasdichte, und zwar besonders rasch, wenn der Gasdruck unter etwa 0,1 mm gesunken ist. Die Strahlen stehen senkrecht auf den Oberflächenteilen

der Kathode, gleichgiltig wo sich die Anode befindet, und bleiben bei der Ausbreitung im Vakuum merklich geradlinig (Hittorf). Werden die K.-Str., wegen ihrer mit zunehmender Verdünnung zunehmenden Lichtschwäche, selbst schwer sichtbar, so wird ihr Querschnitt da, wo sie die Glaswand treffen, an der mit der Verdünnung wachsenden Fluoreszenz (und Erregung von Röntgenstrahlen) bemerklich und wird an dem grünen Leuchten der Wand deutlich erkannt. — Abgegrenzte Bündel erhält man durch Diaphragmen, die in den Weg eingeschoben sind.

Vgl. über das vorige Hittorf, Pogg. Ann. 136, 1 u. 197. 1869. H. gebraucht die Bezeichnung „die Strahlen des negativen Lichts oder Glimmlichts". Die Bezeichnung „Kathodenstrahlen" stammt von Goldstein.

Zu Messungen ist der intermittierende Strom des Induktoriums wenig geeignet. Konstante, durch ein eingeschaltetes Telephon auf Gleichmäßigkeit zu prüfende Ströme liefert eine Hochspannungs-Akkumulatorenbatterie oder, bei kleiner Stromstärke, eine Influenzmaschine (80 II). Die Stärke des Stromes reguliert man mittels verschiebbarer Elektroden in einer vorgeschalteten Röhre mit einem Elektrolyt, häufig 10 prozentiger Jodcadmiumlösung in Amylalkohol (Hittorf).

1. Gefälle der Spannung (Potentialgradient) dV/dx.

Der Spannungsverbrauch verteilt sich zwischen den Elektroden auf den einzelnen, durch ihr Aussehen charakterisierten Strecken sehr ungleichmäßig und ferner je nach dem Gasdruck ganz verschieden. Der Gradient ist klein innerhalb des „Faraday'schen" dunkelen Raumes, der positives von negativem Licht trennt, und in der dritten Schicht des die Kathode umgebenden (Goldstein) negativen Glimmlichts; von mittlerer, und zwar im Zusammenhang mit der Lichtstärke ungleich verteilter Größe innerhalb des positiven Lichts; ziemlich beträchtlich an der Anode selbst. Unmittelbar an der Kathode ist der Gradient am größten.

Die Spannung zwischen der Kathode und der äußeren Grenze des negativen Glimmlichts heißt Kathodengefälle, und zwar normales K.-G., solange die Kathode noch nicht ganz mit Glimmlicht bedeckt ist. Das normale K.-G. wird, von Gasdruck und Stromstärke ziemlich unabhängig, wesentlich durch das Metall der K. und das Gas bestimmt (z. B. PtN 232; PtH 300; PtHe 160; MgN 207; MgH 168 V). Verunreinigung mit O erhöht das Gefälle erheblich. — Vgl Warburg, Wied. Ann. 31, 545. 1887; 40, 1. 1890; Mey Ann. der Ph. 11, 127; Defregger ib. 12, 662. 1903.

Man mißt das Gefälle elektrometrisch (127 bis 130) zwischen Platindrähten, die in das Rohr eingeschmolzen sind, auch wohl mit einer verschiebbaren Doppelsonde, d. h. den Ausläufern zweier mit Seide und Paraffin gut von einander isolierter Drähte, die durch eine absperrende Quecksilbersäule von Barometerhöhe hindurch in die Geißler'sche Röhre eingeführt sind.

Näheres z. B. bei W. P. Graham, Wied. Ann. 64, 49. 1898; Wehnelt, Ann. der Ph. 10, 542. 1903, wo auch auf Vorsichtsmaßregeln bei Doppelsonden hingewiesen wird.

2. Die Stromstärke kann in gewöhnlicher Weise galvanometrisch gemessen werden. Von intermittierenden Strömen läßt sich naturgemäß nur ein zeitlicher Mittelwert bestimmen.

3. Ablenkung im Magnetfeld (Hittorf l. c.).

K.-Str. krümmen sich im transversalen Magnetfelde in einer zur Feldrichtung senkrechten Ebene im Sinne des Biot-Savart'schen Gesetzes. Die Krümmung wird durch Projizieren der Gestalt auf eine hintergestellte Zeichenebene oder durch Photographie von der Seite ermittelt, z. B. in der J. J. Thomsonschen Anordnung. Das Magnetfeld wird etwa durch zwei vorn und hinten aufgestellte Stromspulen erzeugt.

Die Ablenkung ist in verschiedenen Gasen von gleicher Größe gefunden worden, wenn die Spannung zwischen den Elektroden gleich groß war (Kaufmann).

Vgl. J. J. Thomson, Entladung der Elektrizität durch Gase; deutsch von Ewers, S. 104. 1900.

4. Einfluß eines elektrischen Feldes.

Die Feldrichtung sei wieder senkrecht auf der ursprünglichen Richtung der K.-Str. Die letzteren krümmen sich jetzt der positiven Richtung der Kraftlinien entgegen (J. J. Thomson). Da das Gas dadurch, daß eine Entladung hindurchgeht, selbst ein beträchtliches Leitvermögen erhält, so darf die Feldstärke nicht ohne weiteres aus der geometrischen Anordnung berechnet werden. Nur in sehr großer Verdünnung oder bei Wechselfeldern kann die Rechnung zutreffen.

In einem den K.-Str. gleichgerichteten Felde wird ihre Geschwindigkeit, je nach dem Vorzeichen des Feldes, vergrößert oder verkleinert (Des Coudres, Kaufmann, Lenard).

Über die Anwendung dieser Methoden auf die β-Strahlen radioaktiver Körper vgl. besonders Kaufmann, Gött. Nachr. 1901, 143.

5. Energie der K.-Str.

Diese ist einerseits mittels einer Thermosäule oder auch mittels eines Flächenbolometers (**43** u. **72a**) untersucht worden, deren Ausschlag als Funktion der zugestrahlten Wärme em-

pirisch bestimmt wurde. Andrerseits kann man die Energie pro Zeiteinheit auch aus der Stärke i des Stromes, der durch die auffangende Fläche geht, und der Spannung V der Kathode gegen die letztere als iV zu berechnen versuchen.

Vgl. z. B. J. J. Thomson, Ph. Mag. (5) 44, 293. 1897; Cady, Ann. der Ph. 1, 678. 1900. An letzterem Orte besonders auch einige Vorsichtsmaßregeln und Einwände.

II. Zur Theorie der Kathodenstrahlen.

In der Annahme, daß die K.-Str. aus Massenelementen bestehen, die mit neg. El. geladen die Kathode verlassen („Emissionstheorie" — Crookes, Schuster, Wiechert, J. J. Thomson), sind aus der Ablenkung im Magnetfelde einerseits und einer der übrigen Messungen andrerseits die folgenden Schlüsse auf die Geschwindigkeit u, die Masse m und die elektrische Ladung ε der Teilchen gezogen worden.

1. Aus der Krümmung im Magnetfelde $\mathfrak{H}$.

Die durch ein transversales magn. Feld $\mathfrak{H}$ senkrecht zur Feld- und Bewegungsrichtung ausgeübte el.-magn. Kraft ist $\mathfrak{H}\cdot u\varepsilon$. Hieraus entsteht eine Bahn von einem solchen Krümmungshalbmesser r, daß die Zentrifugalkraft $mu^2/r = \mathfrak{H}u\varepsilon$ ist. Daraus folgt

$$\frac{mu}{\varepsilon} = r\mathfrak{H}. \qquad 1.$$

Die Bahn würde kreisförmig sein.

2. Aus der Krümmung im elektrischen Felde $\mathfrak{F}$.

Ein senkrecht zur ursprünglichen Bewegungsrichtung stehendes elektrisches Feld (Anh. 14b) lenkt in der Zeit t aus dieser Richtung senkrecht ab um $y = \frac{1}{2}t^2\,\mathfrak{F}\varepsilon/m$. Ohne die Ablenkung wäre das Teilchen geradlinig vorgeschritten um $x = ut$. Also stellt $y = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\frac{\varepsilon}{mu^2}x^2$ die Gleichung der parabolischen Bahnkurve in den rechtw. Koordinaten x und y dar. Sind x und y gemessen, so ist also (vgl. indessen die Bemerkung zu I 4)

$$\frac{mu^2}{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mathfrak{F}\frac{x^2}{y}. \qquad 2.$$

3. Aus dem Potentialgefälle.

Ist V_0 bez. V_1 das Potential an der Kathode bez. am Beobachtungsorte, so wird $\frac{1}{2}mu^2 = (V_1 - V_0)\varepsilon$, also

$$\frac{mu^2}{\varepsilon} = 2(V_1 - V_0). \qquad 3.$$

Der Potentialabfall $(V_1 - V_0)$ liegt größtenteils in der Nähe der Kathode.

4. Aus der Wärme-Entwickelung der K.-Str.

Durch Umsetzung der Bewegungsenergie $\frac{1}{2}mu^2$ in Wärme entsteht die Wärmemenge $\frac{1}{2}mu^2 A$, wenn A das mech. Wärmeäquivalent ist.

n sei die Anzahl der in der Zeiteinheit vom Kalorimeter (z. B. von der Fläche der Thermosäule) aufgenommenen Teilchen; der aufgenommene Teil des Stromes ist $i = n\varepsilon/t$, so daß $n = it/\varepsilon$ gefunden wird. Demnach beträgt die in der Zeit t entwickelte Wärmemenge $Q = \frac{1}{2} n m u^2/\Delta = \frac{1}{2} i t m u^2/(\Delta \varepsilon)$ und es ist also

$$\frac{mu^2}{\varepsilon} = 2\Delta \frac{Q}{it}. \qquad 4.$$

Vorausgesetzt ist hierbei, daß von dem Teil der Kathodenstrahlen, welcher erfahrungsmäßig reflektiert wird [Goldstein; vgl. besonders Starke, Wied. Ann. 66, 49. 1898 u. Ann. der Ph. 3, 75. 1900], keine Energie an das reflektierende Kalorimeter abgegeben werden würde. Vgl. indessen z. B. Cady, l. c. und Gehrcke, Berl. Sitz.-Ber. 1901, 461.

Alle Größen sind z. B. in einem zusammenhängenden CGS-System zu messen.

5. Berechnung von m/ε und u.

Bei einem Versuch sei aus der Gl. 1 $mu/\varepsilon = a$ gefunden, aus einer der Bestimmungen bez. Gl. 2 bis 4 $mu^2/\varepsilon = b$, dann kann man die Geschwindigkeit u und m/ε einzeln ausrechnen, nämlich

$$u = \frac{b}{a} \quad \text{und} \quad \frac{m}{\varepsilon} = \frac{a^2}{b}. \qquad 5.$$

Aus der umfangreichen neueren Literatur, besonders seit der Mitte der 90er Jahre, s. u. a. die Arbeiten von Aschkinafs, Cady, Capstick, Des Coudres, Ebert, Gehrcke, Goldstein, Graham, Hertz, Heuse, Jaumann, Kaufmann, Leithäuser, Lenard, Mey, Perrin, Riecke, A. Schuster, Seitz, Simon, Stark, Starke, Strutt, J. J. Thomson, Warburg, Wehnelt, Wiechert, E. Wiedemann, W. Wien, Wood. — Weitere Zitate, auch über die Goldstein'schen Kanalstrahlen, bei J. J. Thomson, Conduction of Electricity through Gases, 1903.

124a. Messungen an ionisierten Gasen.

Ausführliches mit zahlreichen Literaturangaben s. besonders bei J. J. Thomson l. c. (oben) und J. Stark, die Elektrizität in Gasen, 1902.

I. Leitvermögen der Gase. Ionisation.

Mittel, um ein Gas leitend zu machen, sind Röntgen-, Becquerel-, Kathodenstrahlen, ultraviolettes Licht sehr kleiner Wellenlänge, hohe Potentialdifferenzen, hohe Temperatur; heiße Flammen, besonders wenn sie Metallsalzdämpfe enthalten, besitzen ein beträchtliches Leitvermögen, welches sich schwächer auch auf die Umgebung ausdehnt.

Das L.-V. wird, auch in einatomigen Gasen, zurückgeführt auf Ionen, d. h. auf elektrisch geladene Bestandteile, von denen man annimmt, daß jedes Ion dieselbe positive oder negative Elektrizitätsmenge mit sich führt. **Ionisation** nennt man die Anzahl der in der Volumeinheit (ccm) vorhandenen Ionen. Sie ist im natürlichen Zustande der Gase verhältnismäßig äußerst gering.

Durch die genannten Ionisierungsmittel entstehen im Gase positive und negative Ionen in gleicher Menge.

Ionisation **eines** Vorzeichens, „unipolare Leitung“, zeigt sich in der Nähe glühender Metalle oder glühender Kohle, und in der Nähe vieler Metalle und Flüssigkeiten, wenn sie ultraviolett bestrahlt werden; selbstverständlich auch bei dem Ausströmen von Elektrizität aus Spitzen.

Nach Beseitigung des Ionisierungsmittels verschwindet die Leitfähigkeit, teils durch Wiedervereinigung der Ionen, teils durch ihre Diffusion nach den Wänden, an welche die Ionen ihre Ladungen abgeben. — Staub beschleunigt das Verschwinden der Ionisation beträchtlich

Zum raschen Austreiben der Ionen kann ein starkes elektrisches Feld oder auch Durchleiten des Gases durch Glaswollepfropfen dienen.

Die Zahl der bei einem Vorgange in der Volum- und Zeiteinheit erzeugten Ionen wird außer durch die Art und Stärke des Ionisierungsmittels durch die Natur des Gases bedingt; sie ist in demselben Gase der Dichte proportional Der bewirkte Ionisationszustand hängt außerdem von der Schnelligkeit ab, mit der die Ionen wieder verschwinden, die sich z. B. mit der Temperatur ändert.

Im elektrischen Felde erhalten die Ionen Geschwindigkeiten, die dem Potentialgefälle proportional angenommen werden. Die **Ionenbeweglichkeit**, d. i. die Geschwindigkeit für das Potentialgefälle Eins, hängt von der Natur und dem Drucke des Gases ab, bei höherem Werte des letzteren diesem umgekehrt proportional.

Dabei wurde die Beweglichkeit der negativen Ionen in der Regel etwas größer gefunden als die der positiven. In stark verdünnten Gasen (Kathoden- und Kanalstrahlen) wächst dieser Unterschied bedeutend.

II. Die den Meßmethoden zu Grunde liegenden Beziehungen.

Vorausgesetzt wird hier, daß positive und negative Ionen in gleicher Anzahl bestehen.

Sei q die in 1 sek im ccm erzeugte, n die zur Zeit t im ccm vorhandene Anzahl von Ionen eines Vorzeichens, so gilt, wenn die Zahl der in 1 sek verschwindenden Ionen proportional n^2 gesetzt wird, die Gleichung

$$\frac{dn}{dt} = q - \alpha n^2,$$

wo q und α Konstanten sind. Im stationären Zustande ($dn/dt = 0$) herrscht demnach die konstante Ionisation

$$n_0 = \sqrt{\frac{q}{\alpha}}. \qquad 1.$$

Nach Beseitigung des Ionisators hat man $dn/dt = -\alpha n^2$, woraus die zur Zeit t nach der Beseitigung noch bestehende Ionisation folgt:

$$n = \frac{n_0}{1 + n_0 \alpha t}. \qquad 2.$$

Als bequeme Charakteristik für den Vorgang des Verschwindens pflegt die Zeit T zu dienen, in der die Ionisation auf den halben Betrag sinkt, d. i. nach Gl. 2

$$T = \frac{1}{n_0 \alpha} = \frac{1}{\sqrt{q\alpha}} = \frac{n_0}{q}. \qquad 3.$$

Eine cylindrisch gestaltete Gasmenge von der Länge l und dem Querschnitt f befinde sich, einer dauernden gleichmäßigen ionisierenden Wirkung ausgesetzt, in einem gleichmäßigen, der Richtung l parallelen Potentialgefälle $\mathfrak{F}$; $+e$ und $-e$ bedeuten die Ladungen, u_+ und u_- die Beweglichkeiten der beiden Ionenarten.

Übersichtlich sind dann einesteils ganz schwache Stromstärken (Gl. 4), für welche das Ohm'sche Gesetz gilt, andernteils der vom Potentialgefälle unabhängige Sättigungsstrom (Gl. 5). Erstens nämlich ist die Stromstärke i für kleine Potentialgefälle gegeben durch

$$i = e\,n_0(u_+ + u_-)\mathfrak{F}f \qquad 4.$$

Bei größerer Stromstärke bewirkt das Wegführen der Ionen eine Konzentrationsverminderung, infolge deren die Stromstärke langsamer wächst als die Feldstärke. In dem Maße, wie dann das Feld so stark wird, daß die q in der Zeiteinheit erzeugten Ionen, bevor sie sich merklich vereinigen können, an die Elektroden geführt werden, entsteht schließlich, vom Potentialgefälle unabhängig, der Sättigungsstrom J

$$J = eqlf = \frac{e\,n_0}{T}lf. \qquad 5.$$

Über Abweichungen von diesen einfachen Beziehungen sowie über Zwischenzustände zwischen Gl. 4 u 5 vgl. z. B. J. J. Thomson l. c. S 64 ff.

III. Meßmethoden.

Vorausgesetzt wird ein konstantes Ionisierungsmittel. Ferner dürfen bei den folgenden Versuchsanordnungen die Metallplatten nicht von der ionisierenden Strahlung getroffen werden, da sonst durch sekundäre Strahlung die Ionisation in der Nähe der Platten vergrößert werden kann.

1. Der zeitliche Abfall der Ionisation (Rutherford).

Die Ionisierung des zwischen zwei parallelen, geerdeten Metallplatten befindlichen Gases werde nach Eintritt des stationären Zustandes in einem bestimmten Zeitpunkt ($t = 0$) unterbrochen und dann nach Verlauf einer kurzen gemessenen Zeit t_1 (vgl. **29a** u. **109**) die eine Platte mit einem gut isolierten Elektrometer, die andere mit einem Hochspannungsbatteriepol verbunden. Dadurch werden fast momentan alle zur Zeit t_1 vorhandenen Ionen eines Zeichens auf das Elektrometer entladen, dessen Ausschlag α_1 ihrer Anzahl n_1 proportional ist (**127** II). Ein zweiter Versuch mit einer anderen Zeit t_2 ergebe α_2. Dann berechnet sich aus Gl. 2 und 3

$$n_0 a \quad \text{oder} \quad \frac{1}{T} = \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_2 t_2 - \alpha_1 t_1}.$$

Über eine andere Methode vgl. Rutherford, Phil. Mag. (5) 44, 422. 1897 u. 47, 109. 1899; Townsend, Phil. Trans. (A) 193, 144. 1900.

2. Bestimmung der Ionisation.

Für diese läßt sich direkt nur der Wert en_0 messen.

a) Von den Platten der vorigen Anordnung wird die eine mit einem Batteriepol, die andere mit einem Elektrometer verbunden oder über ein empfindliches Galvanometer zur Erde abgeleitet. Bei dauernder Ionisierung des Gases zwischen den Platten erhält man, falls die Potentialdifferenz klein ist, einen dieser proportionalen Strom (Gl. 4) durch das Gas, welcher durch die Änderungsgeschwindigkeit des Elektrometerausschlages bez. den konstanten Galvanometerausschlag gemessen wird und cet. par. nach Gl. 4 dem Ausdruck $en_0(u_+ + u_-)$ proportional ist. Bei gleicher Beschaffenheit des Gases ist $u_+ + u_-$ konstant, also die Stromstärke proportional der Ionisation. Über die Bestimmung von $u_+ + u_-$ vgl. 3.

b) Die Potentialdifferenz werde bis zum Sättigungsstrom gesteigert, so gibt die Messung des letzteren nach Gl. 5 die Größe $\frac{en_0}{T}$, verlangt also zur Bestimmung der relativen Ionisation en_0 noch die Kenntnis der Zeit T (vgl. oben 1).

Über Versuche von J. J. Thomson, Townsend und H. A. Wilson, die Faktoren e und n_0 zu trennen, s. Thomson l. c. S. 56, 121 ff u. 550; H. A. Wilson, Ph. Mag. (6) 5, 429. 1903.

3. Die Ionenbeweglichkeiten.

a) (Rutherford). Die Summe $u_+ + u_-$ der Ionenbeweglichkeiten erhält man durch Verbindung der Methoden 1 und 2. Aus Gl. 4 und 5 folgt

$$\frac{i}{J} = (u_+ + u_-)\frac{\mathfrak{F}T}{l}.$$

Vorausgesetzt wird ein meßbares Potentialgefälle $\mathfrak{F}$. T erhält man nach Methode 1, i und J nach 2a u. b. (Über die Umwandlung in eine Nullmethode vgl. ferner J. J. Thomson, l. c. S. 34.)

b) (Rutherford). Von dem Zwischenraum zwischen den Platten wird die der einen benachbarte Hälfte durch einen undurchlässigen Schirm vor der Wirkung der ionisierenden Strahlung geschützt, so daß an der einen Platte eine Schicht nicht ioni-

sierten Gases von bekannter Dicke anliegt. Diese Platte wird mit dem Elektrometer, die andere mit einem Batteriepol verbunden.

Die Aufgabe besteht darin, die kurze Zeit t zu ermitteln, nach welcher das Elektrometer stark auszuschlagen beginnt. Zu diesem Zweck leitet ein Pendelunterbrecher (**109**) die Ionisierung ein und unterbricht nach gemessener Zeit die Verbindung der ersten Platte mit dem Elektrometer. Die eben geschilderte Zeit t wird durch Ausprobieren gefunden. Man nimmt dann, wenn D die Schichtdicke des nicht ionisierten Gases bedeutet, D/t als die Geschwindigkeit der zum Elektrometer gewanderten Ionen.

c) (Zeleny). Das Verhältnis $u_+ : u_-$ wird folgendermaßen bestimmt. Die Metallplatten der vorigen Anordnung werden durch Drahtnetze ersetzt, die einen konstanten Luftstrom senkrecht zu ihrer Ebene hindurchlassen. Das Drahtnetz, durch welches die Luft den Zwischenraum verläßt, wird auf ein positives bez. negatives Potential geladen, das andere Drahtnetz zunächst mit der Erde und bei Beginn des Versuchs mit dem Elektrometer verbunden. Man ionisiert das Gas zwischen den Drahtnetzen und sucht diejenigen Potentiale $+V_1$ und $-V_2$, für welche die dem Elektrometer in gleichen Zeiträumen zugeführte positive bez. negative El.-Menge gleich ist, was man an gleicher Änderungsgeschwindigkeit des Ausschlages erkennt. Dann ist

$$u_+ : u_- = V_2 : V_1 .$$

Die Drahtnetze stören die Gleichmäßigkeit des Luftstroms. Über eine Abänderung der Methode mit einem Luftstrom senkrecht zum elektrischen Felde vgl. Zeleny, Phil. Trans. (A) 195, 193. 1901; J. J. Thomson, l. c. S. 41; J. Stark, l. c. S. 255.

d) (Townsend). Das Verhältnis der Ionenbeweglichkeiten ist gleich dem ihrer Diffusionskoeffizienten. Über eine Methode, diese zu messen vgl. Townsend, Phil. Trans. (A) 193, 129. 1900; J. J. Thomson, l. c. S. 22ff.

4. Messung des Spannungsgefälles in einem ionisierten Gase.

Die Potentialdifferenz zwischen zwei Stellen des ionisierten Gases wird mittels feiner Drahtsonden elektrometrisch gemessen (vgl. **130** I; auch **124** I 1). Je schwächer die Ionisation, um so langsamer nimmt der Draht das Potential an, um so wichtiger ist es also, dem Draht und dem Elektrometer eine **kleine Kapazität** zu geben. Vgl. hierzu die Goldblattelektroskope **127** IV Nr. 1 und Nr. 2, Fig. 1.

Das Spannungsgefälle zwischen zwei in ein ionisiertes Gas tauchenden Metallplatten wird bei etwas größeren Stromstärken durch freie

Ladungen beeinflußt, die sich in der Nähe der Platten bilden und hier das Potentialgefälle vergrößern.

Enthält das Gas am Ort der Sonde nur Ionen eines Vorzeichens, so kann sich das Potential der Sonde nur in einem Sinne ändern, was zu beachten ist.

IV. Elektrizitäts-Zerstreuung in schwach ionisierter Luft.

Das mit den meteorologischen Verhältnissen wechselnde L.-V. der atmosphärischen Luft ist so gering, daß die unter III beschriebenen Methoden versagen. Relative Werte des L.-V. erhält man aus der Geschwindigkeit, mit welcher ein der freien Luft ausgesetzter elektrisch geladener Körper seine Ladung verliert.

Als Zerstreuungskörper dient ein cylindrischer Hohlkörper, der mit seinem Stiel auf den Knopf eines Exner'schen Elektroskops (127 IV) gesteckt wird. Die durch Bernstein bewirkte Stützen-Isolierung liegt im Innenraum des Elektroskops, den man nötigenfalls mittels Natriums trocken hält. Die Divergenz der Goldblättchen kann mittels einer Skale, die als Spiegelbild an den Ort der Blättchen selbst gebracht ist, besonders genau abgelesen werden. Vgl. über diese Konstruktionen Elster u. Geitel, ZS f. Instr. 1904, 193; über Eichung **129**.

Über das Ganze ist eine Hülle aus weitmaschigem Drahtnetz (etwa 1 cm^2) übergestülpt, welche mit dem Elektroskop auf einer zur Erde abgeleiteten Metallplatte ruht. Eine Ladung des Netzes darf kein Zucken der Blättchen zur Folge haben.

Man erteile nun dem Zerstreuungskörper samt Elektroskop eine Ladung, etwa mittels einer Trockensäule (200 Volt) und einer isoliert durch das Netz geführten Sonde. Wenn man dann zu Anfang und zu Ende eines Zeitraums t die Potentiale V und V_0 beobachtet, so ist

$$\frac{1}{t} \lg \frac{V_0}{V}$$

ein relatives Maß für den Elektrizitätsverlust des ganzen Elektroskops.

Um ferner den Elektrizitätsverlust des Zerstreuungskörpers an die Luft gesondert zu erhalten, ist wegen der übrigen Verluste eine Korrektion abzuziehen. Diese erhält man, wenn man nach Entfernung des Zerstreuungskörpers die Messung wiederholt. Die elektrostatische Kapazität (**132** II 1) sei nunmehr

n mal kleiner als vorhin. Beobachtet man jetzt V_0', V', t', so ist das Korrektionsglied $-\frac{1}{n t'} \lg \frac{V_0'}{V'}$.

Derselbe Apparat kann zur Vergleichung der Radioaktivität schwach wirksamer Substanzen dienen, wenn man das Drahtnetz durch eine geschlossene Metallhülle mit zwei Glasfenstern ersetzt. Man vergleicht alsdann die L.-V., welche der Luft durch Einführung der Körper mitgeteilt werden.

Näheres über Methode und Apparat (von Günther & Tegetmeyer Braunschweig) s. besonders Elster u. Geitel, Phys. ZS 1, 11. 1899; Ann. der Ph. 2, 425. 1900; ZS f. Instr. 1904, 193. — Über einen Aspirationsapparat zur Bestimmung des Ionengehaltes der Atmosphäre in absolutem Maße vgl. Ebert, Phys. ZS 2, 662. 1901.

125. Elektrische Wellen (Hertz 1888).

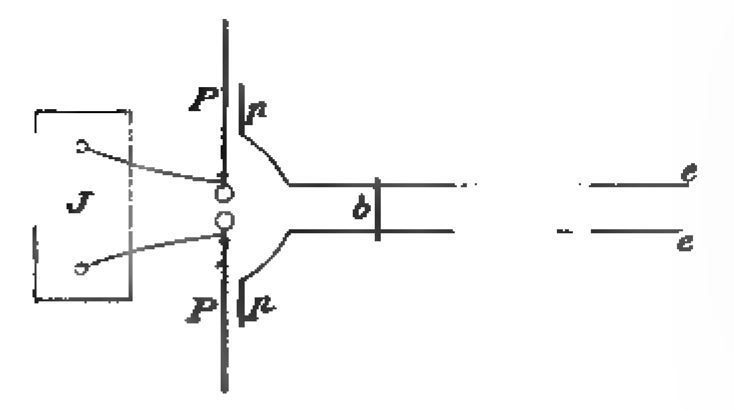
Eine Funkenentladung enthält im allgemeinen Anstöße zu einer großen Mannigfaltigkeit elektrischer Wellen, ähnlich wie ein sich brechender Luftstrom den Schallwellen gegenüber. Um einzelne Wellenlängen (Schwingungszahlen) zu erhalten oder zu beobachten, dient entweder ein Leitersystem („Erreger") von einer Gestalt, welche der Funkenentladung eine ausgeprägte Schwingungsdauer gibt, oder umgekehrt ein „Resonator", der, wie ein akustischer Resonator, nur auf eine einzelne Schwingungsdauer anspricht, oder endlich man begünstigt durch Interferenz die Ausbildung einer einzelnen von den vielen erregten Wellen, ähnlich wie in der Akustik durch die Interferenz in Luftsäulen. Man kann auch in verschiedener Weise diese Mittel zusammen wirken lassen.

I. Wellen längs Drähten; vgl. auch 133.

1. Wellenerzeuger.

Zum Betrieb dient ein Induktorium mittlerer Größe

Hertz'scher Plattenoszillator. Fig. Zwei parallele vertikale quadratische Metallplatten P — z. B. 30 cm Seite — tragen in halber Höhe kurze starke Drähte mit Kugeln ($2r = 3$ cm); die „primäre" Funkenstrecke zwischen den Kugeln $= 0,4$ bis 0,8 cm. Die Zuleitdrähte vom Induktorium werden zweckmäßig in unmittelbarer Nähe hinter den Kugeln angelegt.



Der Aufbau mit Einschluß des Induktoriums J soll symmetrisch sein. Zweckmäßig ist, daß die Kugeln an Drähten sitzen, die man längs der Platten in Hülsen mit Reibung ausziehen kann

Der „primäre" Funke muß weiß sein und mit scharfem Knall einsetzen. Seine Wirkung wird matt, wenn die Kugeloberflächen einige Zeit gebraucht sind; diese müssen dann auf das sorgsamste geputzt werden. Die Wirksamkeit wird erhöht und das Putzen erspart, wenn man die primären Funken unter nichtleitenden Flüssigkeiten erzeugt (de la Rive und Sarasin). Zu dem Zweck werden die kugeltragenden Drähte mittels Korke in die durchbohrten Seitenwände eines Glastrogs geführt, der am besten mit Vaselinöl, verdickt durch etwas Vaselin, gefüllt wird.

Kräftigere, weniger stark gedämpfte und zugleich homogenere Schwingungen erzielt man, wenn der Induktor zunächst mit der Funkenstrecke eines aus Kondensator und Leiter mit Selbstinduktion bestehenden Schwingungskreises in Verbindung steht, dessen Entladungen eine gut ausgeprägte, durch die Kapazität und den Selbstinduktionskoeffizienten bestimmte (Anh 28) Schwingungsdauer haben. Dieser Kreis gibt seine Schwingungen dann durch Leitung, oder besser induktiv, weiter, z. B. an den auf ihn abgestimmten Hertz'schen Plattenoszillator *PP* in obiger Figur; bei induktiver Übernahme besitzt letzterer an Stelle der Funkenstrecke eine kleine Induktionsspule, auf welche die Spule des Schwingungskreises wirkt. Braun, Elt. ZS 1901, 258.

2 Sekundärer Leiter.

Die parallelen Drähte (Durchmesser 1—2 mm, Abstand 3—15 cm, Länge 5 m), längs deren der Wellenzug verfolgt wird, sind blank und in horizontaler Ebene ausgespannt Die Energieaufnahme erfolgt durch kleine angelötete quadratische Endplatten *p* (5—10 cm Seite), in wenigen Centimetern Entfernung von den Platten *P*; s. Fig. vor. S.

Auf den Drähten läßt sich mittels eines Holzgriffes eine Brücke *b* verschieben, ein Metalldraht mit umgebogenen Enden, durch die ein fester Kontakt gesichert ist.

Beobachtungsmittel für stehende Wellen

Stehende Wellen bilden sich längs der Drahtleitung bei gewissen Lagen der Brücke *b*. Zu ihrem Nachweise dienen:

a) Geißler'sche Röhren (Lecher), sowohl mit wie ohne Elektroden; im letzteren Falle werden sie quer über die Drähte gelegt, andernfalls werden die Elektroden durch kurze Drahtösen mit zwei gegenüberliegenden Punkten der Drähte verbunden Die Punkte stärkster Potentialänderung (Maxima werden am stärksten Aufleuchten erkannt. Mit besonders empfindlichen Röhren sucht man besser die, um $\frac{1}{4}\lambda$ von den Maxima abliegenden Minima auf, wo das Leuchten ausbleibt[1]).

Bringt man einen beträchtlichen Teil der Doppeldrahtleitung (2—3 m) in ein Glasrohr, das evakuiert werden kann, so sieht man unmittelbar das Gas alternierend leuchten und dunkel bleiben (Arons). Über Aufleuchten in freier Luft vgl Coolidge, Wied. Ann. 67, 578. 1899.

1) Die Bezeichnungen Knoten und Bauch werden in der Literatur nicht einheitlich gebraucht und sind deswegen hier vermieden.

b) **Das Bolometer:** Auf den Drähten verschieben sich zwei durch ein Holzbrettchen verbundene Glasröhrchen, welche die Drähte eng umschließen; um die Röhrchen sind die langen dünnen Drähte, die zum Bolometer führen, ein oder mehrmals herumgewickelt. Durch Ablesung der Galvanometerausschläge kann der ganze Wellenverlauf verfolgt werden. Die Lage der Brücke und der Glasröhrchen wird an einem Bandmaß abgelesen oder auf einem auf den Fußboden gezeichneten Maßstab abgelotet.

Das Bolometer befindet sich in der Paalzow-Rubens'schen Verzweigung (85, 4).

Rubens, Wied. Ann. **42**, 154. 1891.

4. Lage der Maxima und Minima.

Ist die Leitung auch an den Enden überbrückt, so liegt dort ein Minimum; die ganze Drahtlänge zerfällt in eine ungerade Anzahl von Viertelwellen. Wegen der Brücken und der Platten p muß zu der gemessenen Drahtlänge l eine nahe konstante Korrektion l_0 addiert werden. Sämtliche mögliche Wellenlängen λ_n ergeben sich aus der Formel $\frac{1}{4}\lambda_n(2n-1) = l + l_0$. In erster Annäherung kann l_0 aus einem bestimmten n und dem zugehörigen (gemessenen) λ_n berechnet werden. Vgl. z. B. Rubens l. c. und Cohn und Heerwagen, Wied. Ann. **43**, 343. 1891.

Ist die Leitung (Fig. S. 542) bei e offen, so liegt dort ein Maximum, die Formel lautet dann $\frac{1}{2}\lambda_n \cdot n = l + l_0$.

Man kann bequem bis $n = 10$ kommen, indem man b entsprechend gegen p hin verschiebt, doch treten, wohl wegen Schwankungen von l_0, bei kurzen Wellen Unregelmäßigkeiten auf.

5. Messung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit (v).

Nach Sarasin und de la Rive ist längs Drähten der Wert von v nahe gleich dem im umgebenden Dielektrikum, in Luft also $= 300 \cdot 10^8$ cm/sek.

Durch λ und die Schwingungsdauer ist $v = \lambda/\tau$ gegeben. Vgl. über die Messungen auch 138, 10.

a) **λ wird gemessen, τ berechnet;** Sarasin und de la Rive, Blondlot usw.

Ein zwischen den Drähten verschiebbarer „Resonator" (Fig.) $ABCD$ (z. B. $AB = 10$ cm, $BD = 20$ cm) besteht aus Kupferdraht ($2r = 1$ bis 2 mm), der zwischen A und C aufgeschnitten und hier an zwei einander parallele, unter den Drähten liegende metallische Kondensatorplatten (6 cm Radius) von wenigen mm Abstand angelötet ist. An den Platten ist ein fein regulierbares Funkenmikrometer (Spitze und kleine Kugel, Abstand Bruchteile eines mm) befestigt.

Die Schwingungsdauer τ dieses Resonators berechnet sich nach der Formel $\tau = 2\pi\sqrt{cS}$; Anh. 26. Seine Kapazität c wird galvanometrisch

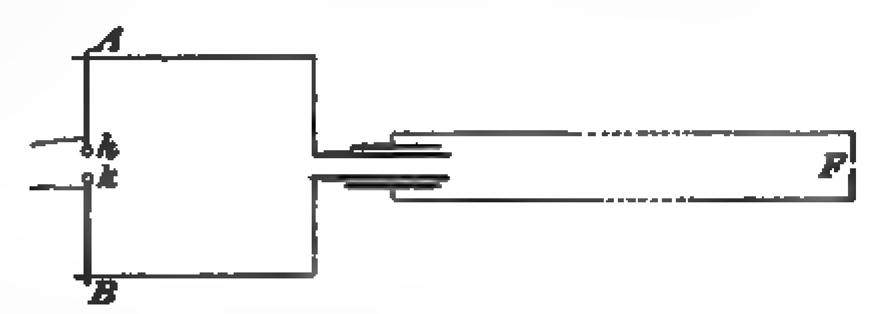
gemessen oder aus den Dimensionen berechnet (182). Der Selbstinduktions-Koeffizient S berechnet sich (Mascart)

$$S=4\left\{-2(a+b-m)+a\lg\mathrm{nat}\frac{2ab}{\varrho(a+m)}+b\lg\mathrm{nat}\frac{2ab}{\varrho(b+m)}\right\},$$

worin a und b die Seiten des Rechtecks, $m=\sqrt{a^2+b^2}$ und ϱ der gegen a und b kleine Radius des Drahtes. — Länge der Drahtleitung $=25$ m, Abstand $=11$ cm, AB ist etwa 10 m vom Erreger entfernt; jenseit CD wird die Brücke b verschoben. Die Entfernung zweier aufeinanderfolgender Brückenlagen, bei denen das Funkenspiel ausbleibt (Regulierung der Funkenstrecke!), ist gleich der halben Wellenlänge des Resonators.

b) λ und τ wird gemessen (Trowbridge und Duane).

Der Primärkreis (Fig.) wird durch Verschieben der die primäre Funkenstrecke kk enthaltenden Leitung AB so lange geändert, bis sich auf der Sekundärleitung (Drahtlänge ca. 60 m) mit dem Bolometer eine wohlausgebildete halbe Welle nachweisen läßt. (Minimum bei



F und in der Nähe der Kondensatorplatten, auf welche die Energie übertragen wird.) Der Abstand der Minima ist $=\frac{1}{2}\lambda$. Bei F ist eine sehr kleine Funkenstrecke; das Bild der Fünkchen wird nach Reflexion an einem rotierenden Spiegel photographiert und hieraus τ (etwa $2\cdot10^{-7}$ sek bei $\lambda=60$ m) berechnet (20a 5).

Siehe hierzu auch Wellenmesser, am Schluß des Paragraphen.

II. Wellen in freier Luft.

Zur Erzeugung der Wellen dient ein Erreger, der aus zwei gleichgestalteten Leitern besteht, zwischen deren einander zugekehrten Enden der primäre Funke überschlägt, z. B. in Fig. S. 542 das System PP oder in Fig. S. 547 das Kugelpaar. Als Stromquelle dient entweder das Induktorium oder eine große Holtz'sche oder Toepler'sche Influenzmaschine. Der Empfänger besteht aus einem der Funkenstrecke parallelen unterbrochenen Leiter.

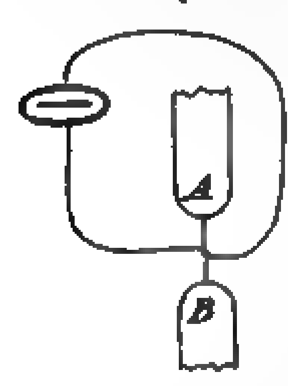
Mittel zum Nachweis der Schwingungen im Empfänger sind:

1. die Fünkchen, die zwischen den sehr nahe aneinander gerückten Enden des Empfängers auftreten;

2. die Geißler'sche Röhre mit Nebenelektroden. Die Hauptelektroden sind mit einer Akkumulatorenbatterie verbunden; durch Einschalten von Widerstand wird die Entladung gerade zum Verschwinden gebracht. Springt nun zwischen den Nebenelektroden, die mit dem Empfänger verbunden sind, ein Fünkchen über, so setzt die Entladung der Akkumulatorenbatterie wieder ein (Zehnder);

3. das Elektroskop. Dessen Kugel ist mit der einen Hälfte des

Empfängers verbunden; der Kugel gegenüber steht in geringer Entfernung eine Spitze, die mit der anderen Empfängerhälfte und mit einer am anderen Pol zur Erde abgeleiteten Trockensäule verbunden wird. Setzen die Fünkchen ein, so ladet die Trockensäule das Elektroskop. Oder man ordnet umgekehrt so an, daß die Fünkchen ein geladenes Elektroskop entladen (Boltzmann);



4. das Thermoelement; feine Drähte aus verschiedenen Metallen (z. B. Platin und Patentnickel) werden an die einander zugekehrten Enden A und B der Empfängerhälften gelötet (Fig.), umeinander geschlungen und nach außen durch ein Galvanometer verbunden; der Ladungsausgleich zwischen A und B erwärmt die Berührungsstelle und veranlaßt einen Thermostrom im Galvanometerkreis (Klemenčič, Wied. Ann. 42, 416. 1891; 50, 456. 1893). — Vgl. hierüber z. B. Drude, Ann. der Ph. 15, 714. 1904.

5. das Bolometer nach Paalzow-Rubens; vgl. S. 399

6. der Kohärer (Branly); ein mit Metallspänen oder -körnern gefülltes Glasrohr ist beiderseits durch Metallelektroden mit einem Element und einem Galvanometer zum Stromkreise verbunden. Bestrahlung durch el. Wellen vermehrt das Leitvermögen des Kohärers und hierdurch die Stromstärke. Schütteln der Röhre stellt den höheren Widerstand wieder her. Für Messungen sind die unempfindlicheren Kohärer (z. B. gefüllt mit 5 bis 10 mm langen Eisenschrauben) am besten; Störungen sind durch Metallhüllen um Kohärerkreis und Galvanometer fern zu halten. Stehende Wellen lassen sich nur mit unempfindlichen Anordnungen (u. a. Füllungen von feinem Kohlepulver) beobachten.

Als Antikohärer bezeichnet man Vorrichtungen, deren Widerstand in Folge der Bestrahlung vergrößert wird, z. B. die Schäfer'sche Platte, eine Glasscheibe mit dünner Silberschicht, die normal zum Stromdurchgang feine Risse besitzt.

Die ausgedehnte Literatur über Kohärer s. bei Schlabach, Phys. ZS 2, 383. 1901.

7. der magnetische Wellendetektor, dessen Wirkung darauf beruht, daß die Remanenz kurzer Magnete durch die el. Wellen gestört wird (Rutherford) — Über einen für Messungen bestimmten Detektor s. Walter, Phys. ZS 5, 269. 1904.

8. der elektrolytische Wellendetektor, eine Polarisationszelle, z. B Platinelektroden in Schwefelsäure, durch die beständig ein geringer Strom fließt; dieser wird infolge der Bestrahlung verstärkt. Die Wirkung ist am größten, wenn die Anode eine sehr kleine Oberfläche besitzt (Drähte bis 0,001 mm Durchmesser und 0,01 mm Länge herunter).

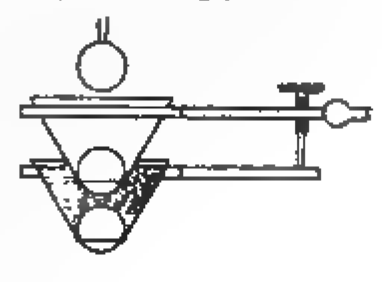
Schlömilch, Elt. ZS 1903, 959; Rothmund u Lessing, Ann. der Ph. 15, 193 1904.

Um die „elektrischen" Strahlen zusammenzuhalten (paralleles Strahlenbündel) werden Erreger und Empfänger in der Brennaxe von parabolischen

Cylinderspiegeln aus Metall (Zink) befestigt. Die Verbindungsdrähte zur Stromquelle und zu den Nachweisapparaten werden isoliert durch Löcher in den Spiegeln geführt.

Die Dimensionen der Apparate sind entsprechend der gewünschten Wellenlänge sehr verschieden (Wellenlänge bei Hertz mehrere Meter, Righi 2—20 cm, Lebedew bis 6 mm abwärts; in der Funkentelegraphie bis zu mehreren 100 m). Als Beispiel werde im folgenden eine vertikale Anordnung von Righi angeführt (Beschreibung verschiedener Apparate in „L'Ottica delle Oscillazioni elettriche", Bologna 1897, deutsch von B. Dessau).

Der Erreger (l = etwa 10 cm) besteht aus zwei Messingkugeln ($2r = 3{,}75$ cm) im Abstand von 0,08 cm; sie sind (siehe Fig.) in zwei Glastrichter ohne Ausflußrohre eingekittet. Die Trichter ruhen in Holzfassungen, deren Abstand vermöge des Gelenks mit Stellschraube fein reguliert werden kann. Die mit der Elektrizitätsquelle (bei Righi 4-plattige Holtz'sche Elektrisiermaschine) verbundenen Kugeln entladen sich durch 2 cm lange Funkenstrecken auf die Erregerkugeln; der untere Trichter ist mit Vaselinöl gefüllt, in dem die Erregerfunken überspringen.





Der Empfänger besteht aus einem dünnen Streifen auf Glas niedergeschlagenen Silbers ($3{,}6 \times 0{,}2$ cm), der in halber Länge durch einen feinen Diamantstrich geteilt ist; an diesem Strich wird das Funkenspiel beobachtet, ev. unter Zuhilfenahme einer Lupe. Die parabolischen Spiegel haben z. B. 20 cm Höhe, 25 cm Öffnung und 5 cm Brennweite. Bei Beobachtung des Empfängers mittels Lupe ist diese selbstverständlich hinter dem Spiegel vor einer kleinen Öffnung anzubringen.

Mit diesen Apparaten lassen sich alle Versuche anstellen, die zuerst Hertz an elektrischen Wellen in Analogie mit optischen Erscheinungen ausführte.

Die Flächen der Prismen für Brechungsmessungen, sowie die Flächen reflektierender Spiegel, polarisierender Gitter usw. sind den Spiegelöffnungen entsprechend zu wählen; Abblendschirme zweckmäßig größer. Für feinere Untersuchungen (Beugung, Doppelbrechung usw.) empfehlen sich kleine Apparate, die sich auf einem der üblichen Spektrometergestelle aufbauen lassen (Lebedew, Wied. Ann. 56, 1. 1895).

Über die Anordnung von Demonstrationen vgl. noch Zehnder, Ann. der Ph. 9, 899. 1902; Seibt, Elt. ZS 1903, 105; Phys. ZS 4, 90 u. 317. 1902—3.

Elektrische Wellenmesser.

So nennt man Leitersysteme, deren el. Eigenschwingungsdauer sich meßbar abstimmen läßt und die daher dazu dienen können, durch Resonanz auf andere Schwingungen deren Dauer zu ermitteln. Man bringt zu dem Zweck den Wellenmesser in die geeignete Stellung zu den zu messenden Schwingungen und sucht die Abstimmung, bei welcher er am kräftigsten

mitschwingt. Als Reagens dient meist das Aufleuchten einer Vakuumröhre, z. B. von Kramer, Freiburg, mit elektrolytisch eingeführtem Natrium; vgl. I 3a und 188, 10

Im Auge zu behalten ist dabei, daß die einander benachbarten Apparate ihre Eigenschwingungsdauer gegenseitig modifizieren können.

a) Kürzere Wellen bis zu etwa 12 m aufwärts. Als Wellenmesser dient am einfachsten ein Paar von nahe benachbarten parallelen Drähten (1 mm dick, 25 mm Abstand), am einen Ende dauernd und weiterhin durch eine verstellbare Brücke aus der gleichen Drahtsorte leitend mit einander verbunden. Diese Brücke verstellt man, bis die nahe auf der Mitte der Drähte aufgelegte Vakuumröhre maximal aufleuchtet.

Der Umfang des so von den Paralleldrähten und Brücken gebildeten Rechtecks, vermehrt um etwa 3 cm wegen der Kapazität der Vakuumröhre, gibt die Wellenlänge λ in Luft, also, wenn λ in cm gemessen ist, die Dauer der Schwingung $=\lambda/(300\cdot 10^8)$.

Auf längere Wellen wird das Drähtepaar dadurch anwendbar, daß das eine Ende nicht leitend, sondern durch einen Plattenkondensator geschlossen wird.

Näheres über die Anordnungen und im letzteren Falle auch über die Berechnung bei Drude, Ann. der Ph. 9, 293 u. 612. 1902.

b) Für lange Wellen, wie sie in der drahtlosen Telegraphie zur Anwendung kommen (etwa $5\cdot 10^5$ bis $3\cdot 10^6$ Schwingungen/sek, d. h. λ in Luft zwischen 600 und 100 m) dient als Wellenmesser ein Leiterkreis von bekannter Selbstinduktion S und Kapazität c. Eine der beiden Größen ist meßbar veränderlich; die Eigenschwingungsdauer berechnet sich aus $\tau = 2\pi\sqrt{cS}$ (Anh. 28). Vorausgesetzt, daß die Abmessung der als Selbstinduktion dienenden Drahtschleife klein ist gegen die Wellenlänge, können zur Berechnung von S die Formeln in Anh. 28 dienen.

Die Drahtschleife des Wellenmessers wird einer entsprechenden Schleife des zu untersuchenden Leiterkreises genähert und der Kondensator eingestellt, bis stärkstes Mitschwingen eintritt. Dies wird an einem Hitzdraht-Luftthermometer erkannt, welches induktiv mit dem Wellenmesser verbunden ist. Vgl. Dönitz, Elt. ZS 1903, 920.

c) Resonatorspule, Multiplikationsstab; ebenfalls für sehr lange Wellen bestimmt.

Auf einen cylindrischen Stab aus Glas oder Hartkautschuk (nicht Holz) ist eine lange enge Spule in einer Lage aufgewickelt.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Hertz'schen Wellen ist längs der Spule viel kleiner als in Luft. Die Theorie (vgl. Seibt und Fleming l. c. unten) ergibt sie gleich $1/\sqrt{c_1 S_1}$, wenn die elektrostatische Kapazität c_1 und der Selbstinduktionskoeffizient S_1 für die Längeneinheit der Spule gelten; beide in CGS gemessen, oder c in Farad, S in cm (Anh. 27 u. 28). Längs einer Spule von 4 cm Durchmesser und 25 Windungen/cm eines 0,3 mm dicken Drahtes war die Geschwindigkeit von der Ordnung $2\cdot 10^6$ m/sek, also 150 mal kleiner als in Luft.

Eine solche Spule verhält sich den el. Schwingungen gegenüber wie eine Luftsäule gegen akustische Schwingungen. Ein freies Ende der Spule entspricht einem geschlossenen Ende der Luftsäule, ein nach der Erde abgeleiteter Querschnitt einem offenen Ende oder einem durch eine Klappe geöffneten Querschnitt. Bei stehenden Schwingungen liegt am freien Ende ein Knoten in dem Sinne, daß die Spannungsänderung ein Maximum hat und die Strömung Null ist, am abgeleiteten Punkte umgekehrt ein Bauch.

Das Übertragen kann durch leitenden Anschluß der Spule an den Erreger geschehen, oder mittels Platten durch elektrostatische Influenz, oder mittels Drahtschleifen oder Spulen durch elektrodynamische Induktion.

Um nun eine gegebene Schwingungszahl des Erregers zu messen, stimmt man während der Übertragung durch Verschieben eines Erdkontaktes auf der Resonatorspule diese auf die Schwingungen des Erregers ab, d. h. so, daß stehende Schwingungen längs der Spule sich möglichst stark ausbilden. Knoten und Bäuche sucht man z. B mit der Vakuumröhre, die an den ersteren maximal, an den letzteren minimal aufleuchtet. Der doppelte Abstand benachbarter Knoten gibt die Wellenlänge λ.

Aus λ und der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v' an der Spule wird die Schwingungsdauer τ der Oszillation $\tau = \lambda/v'$ erhalten.

v' läßt sich empirisch ermitteln, dadurch daß man dasselbe Verfahren auf eine b e k a n n t e Schwingungsdauer anwendet, die durch einen Entladungskreis von bekannter Kapazität und Selbstinduktion gegeben ist.

Folgende Fehlerquellen sind zu beachten. Die den Enden näher liegenden Wellenteile weichen von der normalen Länge ab. Ferner wird v' durch die Umgebung der Spule, auch durch die Nähe des Erregers und des Beobachters beeinflußt. Im allgemeinen übt die Resonatorspule auch eine Rückwirkung auf die zu messende Schwingungsdauer aus. Vgl. hierüber, auch über die Frage, ob v' von der Schwingungsdauer abhängt, und über das nähere bei den Anordnungen die Literatur

Seibt, Elt. ZS 1902, 315, 341, 365, 387 u. 409. Theorie und Anordnungen, insbesondere zur Demonstration sehr energischer Schwingungen durch Spitzenwirkung. — Slaby, ib. 1903, 1007; Fleming, Phil. Mag. (6) 8, 417. 1904, Theorie und Messungen.

Elektrostatik.

126. Allgemeines über elektrostatische Messungen.

Isolierung. Eine zuverlässige Isolation liefern Schellack und Bernstein. Oberflächlich leitendes Glas wird mit destilliertem Wasser gewaschen oder besser abgekocht und in staubfreier Luft getrocknet. Frisch gereinigtes Glas isoliert meistens gut; am dauerhaftesten ist Flintglas, schwer schmelzbares Kaliglas, alkalifreies Glas Nr. 122 oder 477 aus Jena. Paraffin isoliert gut, deformiert sich aber leicht. Paraffiniertes Holz (8, 19) genügt für geringe Ansprüche. Für höhere Temperaturen leisten parallel zur Axe geschnittene Quarzplättchen als Unterlagen gute Dienste, auch wird verglaster Quarz empfohlen.

Wenn die Entladung eines gewöhnlichen Elektroskops durch die Berührung mit einem abgeleiteten Körper eine merkliche Zeit in Anspruch nimmt, so ist der Widerstand des Körpers mindestens auf die Ordnung 10^{10} Θ zu schätzen.

Gewöhnliche Influenz-Elektrisiermaschinen hält man am einfachsten durch Anstrahlen der Scheiben mit einem Petroleumlämpchen (Ganglampe) trocken. Man achte auf Fasern der Transmissionsseile und ähnliches.

Schutzhüllen. Um Influenzwirkungen nach und von außen zu beseitigen, schließe man die Apparate und Leitungen in zur Erde abgeleitete, metallische Hüllen ein. Erwähnt werde: Pappe, innen mit Stanniol überzogen; Netz aus Draht oder aus Stanniolstreifen, die auf oder besser in die Glashüllen geklebt sind, u. dgl. Zum Schutz längerer Leitungen eignen sich zusammensetzbare vierkantige Weißblechröhren, etwa 8×8 cm, deren eine Wand als Deckel aufzusetzen ist.

Vorsichtsmaßregeln bei der Messung mit abgetrennten Elektrizitätsmengen. Zur Vermeidung von Reibungselektrizität füllt man an Kommutatoren u. dgl. das Quecksilber in Fingerhüte, welche in eine isolierende Unterlage eingesetzt werden.

Die Messung kleiner Kapazitäten verlangt Zuleiter, Kommutatoren und ähnliches von kleiner Kapazität. Man stellt Kommutatoren z. B. aus Platindrähtchen an Schellackstäbchen her und bewirkt die Verbindungen durch ebenso gehaltene Platindrahtbügel.

Kondensatoren für genauere Messungen sollen tunlichst rückstandsfrei sein. Man wähle Luftkondensatoren oder auch solche mit Paraffin; bei der Herstellung werden die Kondensatorplatten unter Vermeidung von Verunreinigungen (z. B. Öl) in geschmolzenes Paraffin völlig eingetaucht; s. Arons, Wied. Ann. 35, 291. 1888.

Rückstandsfreie Träger werden durch kleine, abgeleitete, nicht ganz bis an ihre Enden mit Paraffin ausgegossene Metallröhrchen geliefert, in deren Axen die Leitungsdrähte laufen.

Erzeugung konstanter Potentiale. Am besten dienen vielpaarige galvanische Ketten, kleine Akkumulatoren, Spamer'sche Chromsäureelemente oder Clark-Elemente usw.; die letzteren in U-förmigen Röhrchen angeordnet, mit Paraffinverschluß auf der Seite der Zinklösung Monate lang haltbar, montiert auf einem Brett mit Glasstreifen, oder an einem isolierten Gestell aufgehängt; auch wohl Zamboni'sche Säulen. S. auch S. 380.

Hohe Potentiale werden durch Leidener Flaschen oder Batterien von großer Kapazität bez. geringem Elektrizitätsverlust geliefert. Man ladet einige Zeit vorher, weil anfangs die Spannungsabnahme durch Rückstandsbildung und El.-Verlust am stärksten ist. Nimmt man dann durch Berührung mit einem Halbleiter vor dem Gebrauch einen Teil der Ladung fort, so führt der nun freiwerdende Rückstand in Verbindung mit dem El.-Verlust einen zeitlichen Maximumzustand der Spannung herbei, so daß die Spannung sich dann eine Zeitlang wenig ändert. Durch alternierendes Beobachten lassen Änderungen sich eliminieren.

Nullpunkt des Potentials Meßbar sind nur Differenzen von Potentialen. Um für diese einen, allen Apparaten einer Versuchsanordnung gemeinsamen Anfangspunkt, ein Potential „Null", festzulegen, verbindet man alle auf Null zu haltenden Körper mit der Erde (Wasserleitung, Gasleitung, Erdplatte).

Im folgenden ist unter Potential stets die Potentialdifferenz gegen den gewählten Nullpunkt verstanden.

127. Elektrometer. Messung von Potentialen (Spannungen).

I. Sinus-Elektrometer (R. Kohlrausch 1853).

Eine Magnetnadel wird, zugleich mit einem abstoßenden Arm, auf das zu messende Potential V geladen. Durch Nachdrehen des Armes um den Winkel φ stelle man nun den ursprünglichen Kreuzwinkel zwischen beiden Teilen dadurch wieder her, daß man beim Visieren durch einen Spalt das zweimal gespiegelte Bild einer Marke wieder auf einen Punkt auf dem Spiegel der Nadel bringt. Dann ist $V = C\sqrt{\sin\varphi}$.

Verschiedene Nadeln und Kreuzwinkel ermöglichen sehr verschiedene Werte von C. Um diese auf einander zu reduzieren, vergleicht man die verschiedenen, einer konstanten Spannung (vgl. oben) entsprechenden φ.

II. Quadrant-Elektrometer (W. Thomson um 1860).

Vier leitende Quadranten, von denen je zwei gegenüberliegende mit einander verbunden sind, bilden eine geschlitzte Schachtel. In dieser ist die „Nadel" mit einem Stiel, der einen Ablesespiegel trägt, an einem feinen Draht aufgehängt. An den älteren Instrumenten läuft die Fort-

setzung des Stieles nach unten in ein kleines Platinblech aus, welches in konzentrierte staubfreie Schwefelsäure untertaucht, die außer zum Trockenhalten des Instrumentes, zum Dämpfen der Schwingungen dient.

Der Nadel wird die Ladung durch ihren Aufhängedraht bez. versilberten oder hygroskopisch gemachten Quarzfaden (8, 21) oder von der Schwefelsäure aus zugeführt.

Über die Erzeugung des konstanten Hilfspotentials s. S. 551. Wird dieses von einer Leidener Flasche geliefert, so findet man nach einer neuen starken Ladung das Gleichgewicht zuweilen instabil. Wenn Zuwarten nicht hilft, so schwäche man die Ladung.

Die Schwefelsäure veranlaßt häufig Nullpunktsverschiebungen, Kriechen der Nadel. Umrühren etwa ¼ St. vor der Beobachtung ist zweckmäßig. Das Beruhigungsplättchen soll an einem äußerst feinen platinierten und geglühten Platindraht (8, 18) aufgehängt sein, der zentral durch die Flüssigkeitsoberfläche geht. — Instrumente zu genauer Messung vermeiden die Flüssigkeitsdämpfung.

Sehr empfindliche Instrumente schütze man während der Beobachtung gegen helles Licht.

Formen des Quadrantelektrometers s. außer bei Lord Kelvin bei Kirchhoff, Branly, Mascart, Edelmann, Himstedt (versilberter Quarzfaden, magn. Dämpfer). Für exakte Messung besonders Hallwachs (Platindraht, Luftdämpfer), Wied. Ann. 29, 1. 1886; 55, 170. 1895; für sehr große Empfindlichkeit Dolezalek (hygroskopischer Quarzfaden, sehr leichtes Biskuit), ZS f. Instr. 1901, 345.

Durch eine mehrfache Nadel in einer entsprechenden Anzahl übereinandergesetzter Quadrantenschachteln — z. B. Kelvin's „Multizellular-Voltmeter" — wird die Empfindlichkeit gesteigert, so daß eine Zeigerteilung angewandt werden kann, deren Eichung natürlich empirisch geschieht (129).

Orientierung. In der Ruhelage, d. h. wenn alle Elektrometerteile abgeleitet sind, soll die Mittellinie der Nadel mit einem Trennungsdurchmesser der Quadranten nahe zusammenfallen, was durch Drehung des Torsionskopfes zu bewirken ist.

Genauere Orientierung. Man dreht die Nadel mittels der Aufhängung so, daß der bei abgeleiteten Quadranten unter Anlegung eines hohen Potentials an die Nadel eintretende Ausschlag ein Minimum wird oder besser, daß die unter Vorzeichenwechsel dieses hohen Potentials eintretenden entgegengesetzten Ausschläge gleich werden.

Die Empfindlichkeit ändert sich durch Vertikalverschiebung der Nadel und läßt sich hierdurch variieren. Bei genauen Messungen stelle man aber die Nadel womöglich in die Mitte der Quadrantenschachtel, die Minimumlage der Empfindlichkeit. Ein Nachlängen der Suspension hat

dann weniger Einfluß, auch wird die Symmetrie der Ablenkungen in dieser Lage am wenigsten durch Verbiegungen der Nadel, ungleiche Höhe der Quadranten usw. gestört.

Allgemeine Formel. Werden nach allseitiger Ableitung (Verbindung mit dem Gehäuse) an die Quadrantenpaare bez. an die Nadel die Potentiale Q_1, Q_2 und N angelegt, so dreht sich die Nadel um den (kleinen) Winkel

$$\alpha = \mathfrak{S}(Q_1 - Q_2 + \pi_1)[N - \tfrac{1}{2}(Q_1 + Q_2) + \pi_2]. \qquad 1.$$

π_1 und π_2 bedeuten Kontaktpotentiale der Quadranten gegeneinander und gegen die Nadel; sie werden durch geeignetes Kommutieren eliminiert.

$\mathfrak{S}$, die Elektrometer-Empfindlichkeit, ist in der Hauptsache proportional der für alle Schaltungen gemeinsam geltenden Empfindlichkeit $\mathfrak{E}$ der Aufhängung, enthält aber außerdem eine durch die Ladungen bewirkte Direktionskraft, deren Wirkung auf die einzelnen Schaltungen bei diesen erläutert werden wird.

Vgl. hierüber Maxwell § 219; Hallwachs, Wied. Ann. 29, 1. 1886; Gouy, Journ. de Ph. 7, 97. 1888; Orlich, ZS f. Instr. 1903, 97.

Mit Hilfsladung.

Bei Beobachtungen mit Hilfsladung muß man wegen der Schwankungen des Hilfspotentials von Zeit zu Zeit die Empfindlichkeit neu bestimmen (129 I).

1. Quadrantschaltung; die gebräuchlichste Schaltung. Das eine Quadrantenpaar wird dauernd auf dem Potential Null, die Nadel auf einem möglichst konstanten, gegen das zu messende hohen Potential N gehalten. Letzteres geschieht mit einer andrerseits abgeleiteten vielpaarigen Kette, bei geringerem Anspruch an Konstanz mit einer Zamboni'schen Säule oder auch einer, oft schon mit dem Instrument verbundenen Leidener Flasche.

Die Ladung des zweiten, bisher abgeleiteten Quadrantenpaares auf das zu messende Potential V bewirkt dann eine mit V nahe proportionale Ablenkung. Vorzeichenwechsel von V gibt darauf einen entgegengesetzten, etwas verschiedenen Ausschlag. Das Mittel aus beiden, der kommutierte Ausschlag α ist proportional V, also ist $V = C\alpha$.

Und zwar gilt für den Reduktionsfaktor C, wenn $\mathfrak{E}$ die Empfindlichkeit der Aufhängung und γ einen instrumentalen, im allgemeinen positiven Faktor bedeutet,

$$C = \frac{1}{\mathfrak{E}} \frac{1 + \gamma N^2}{N}. \qquad 2.$$

Das Korrektionsglied γN^2 enthält die durch die Ladung der Nadel bewirkte Direktionskraft (vgl. oben) und zwar bedeutet γN^2 das Verhältnis

der elektrischen, dem Hilfspotentiale N entstammenden (auch für $V=0$ vorhandenen) Direktionskraft zu derjenigen der Aufhängung. Die Empfindlichkeit $1/C$ wird nach Gl 2 gegeben durch $\mathfrak{E}N/(1+\gamma N^2)$; sie wächst also mit dem Nadelpotential nicht proportional, sondern verzögert an und erreicht bei $\gamma N^2=1$ ein Maximum. Vgl. Gouy u. Orlich l. c.

An einem Elektrometer Hallwachs'scher Form von der Schwingungsdauer 10 sek bei allseitiger Ableitung war γ etwa $=6{,}6\cdot10^{-6}/\mathfrak{V}^2$, also N_{max} nahe $=400\,\mathfrak{V}$. Der Ausschlag α auf 1 $\mathfrak{V}$ betrug bei 2 m Skalenabstand für $N=100$ 200 300 400 500 $\mathfrak{V}$
$\alpha=130$ 220 265 275 270 mm.

Die Ausschläge für $+V$ bez. $-V$ betragen nach Formel 1, von π_1 und π_2 abgesehen, $\mathfrak{G}V(N-\frac{1}{2}V)$ bez. $\mathfrak{G}V(N+\frac{1}{2}V)$, sie unterscheiden sich also von einander um V/N ihres Betrages, z. B. um 2 %, wenn 50 Akkumulatoren (100 $\mathfrak{V}$) die Nadel laden und wenn 2 $\mathfrak{V}$ gemessen werden. Im Mittelwert hebt $\frac{1}{2}V$ sich weg

2. Nadelschaltung; weniger gebraucht. Die beiden Quadrantenpaare werden dauernd durch Verbinden mit den Polen einer vielpaarigen galvanischen Kette von der Spannung Q, deren Mitte zur Erde abgeleitet ist, auf nahe entgegengesetzt gleiches Potential $\frac{1}{2}Q$ geladen. Verbindet man die vorher abgeleitete Nadel dann metallisch mit dem zu messenden Potential V, so tritt (siehe Formel 1, vor. S.) wieder eine mit V nahe proportionale Ablenkung ein. Vorzeichenwechsel von V gebe den mittleren Ausschlag α, dann gilt wieder $V=C\alpha$. Und zwar ist hier

$$C=\frac{1}{\mathfrak{E}}\frac{1+\gamma' Q^2}{Q}. \qquad 3.$$

γ' ist größer als γ (z. B. für obiges Instrument $\gamma'=50\cdot10^{-6}/\mathfrak{V}^2$), so daß bei gleichem verfügbaren Hilfspotential die Nadelschaltung unempfindlicher ausfällt als die Quadrantschaltung.

Ohne Hilfsladung (Doppel- oder „idiostatische" Schaltung) für größere Potentiale.

Die Schaltung ist wertvoll für die Messung von Wechselspannungen.

Die Nadel und das eine Quadrantenpaar sind abgeleitet. Das Potential V an dem vorher abgeleiteten zweiten Quadrantenpaar gibt dann einen, vom Vorzeichen von V unabhängigen, genähert V^2 proportionalen Ausschlag. Die Fehler aus den Kontaktpotentialen zwischen den Elektrometerteilen werden eliminiert (vgl. Hallwachs l. c.) dadurch, daß man gleichzeitig die Quadranten und V kommutiert. Ohne dies können erhebliche Fehler entstehen. α bedeute wieder das Mittel beider Ausschläge, dann ist genähert $V^2=C\alpha$, wo $C=1/\mathfrak{E}$ ist. Genauer hat man zu setzen:

$$V^2=C\alpha(1+p\alpha). \qquad 4.$$

wo p eine dem Skalenabstande umgekehrt proportionale Instrumentalkonstante bedeutet. S. Orlich l. c. S. 109, Formel 22.

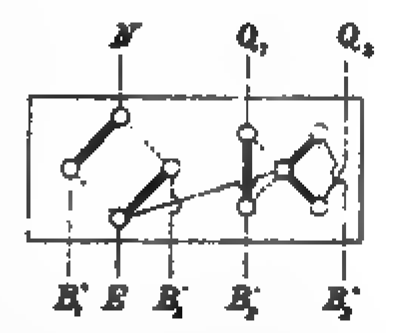
Das Korrektionsglied $p\alpha$ entspringt, wie die früheren Korrektionen, aus der elektrischen Direktionskraft der Ladung, tritt hier aber in anderer Form herein, weil diese Direktionskraft erst durch die zu messende Ladung selbst entsteht und mit dieser anwächst. Sein Faktor p betrug für das oben beschriebene Instrument bei 2000 mm Skalenabstand $76 \cdot 10^{-6}$.

Größere Skalenausschläge werden auf Winkel reduziert (25); doch kann man die Korrektion auch mit der Kaliberkorrektion (129) vereinigen.

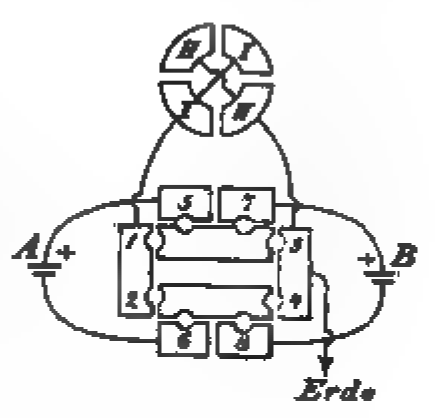
Die Konstanz von C wird hier nur durch die Konstanz der Aufhängung in bezug auf Direktionskraft, Länge und Torsion bedingt und ist durch sehr feine Metalldrähte oder leitend gemachte Quarzfäden in weitem Umfang und auf lange Dauer erreichbar.

Kommutatoren zum bequemen Verbinden und Auswechseln.

Nach Hallwachs. Neun Quecksilbernäpfe sind verbunden: N mit der Nadel, Q_1 und Q_2 mit den Quadranten. E leitet zwei Näpfe zur Erde ab. Über die Paare B_1 und B_2 s. unten. Umlegbare Systeme von Drahtbügeln an Schellackstäbchen vermitteln die Verbindungen. Die Zeichnung gilt für Quadrantschaltung; an den B_1 liegt die Hilfsbatterie, an den B_2 die zu messende Spannung. — Für Nadelschaltung hat man die Hilfsbatterie gegen die zu messende Spannung und ferner die beiden Bügelsysteme gegen einander zu vertauschen. — Bei Doppelschaltung bleiben die B_1 frei, N und E werden durch einen Draht überbrückt. An die B_2 kommt die zu messende Spannung. Zum Ableiten der Quadranten dient ein besonderer dreiarmiger Bügel, der Q_1 und Q_2 mit E verbindet. Näheres Wied. Ann. 55, 180. 1895.



Nach Dorn. Mit Weglassung der Nadel und Hilfsbatterie für Quadrantschaltung und zum Austausch der beiden Elemente A und B gezeichnet. Es bewirkt: die Stöpselung 1, 4, 5, 6 Ladung des Qu.-Paares I mit $+V$, 2, 3, 5, 6 mit $-V$ vom Element A. Paar II ist dabei immer abgeleitet. Stöpselung 1, 3 leitet alle Quadranten ab. Stöpselung 7 u. 8 statt 5 u. 6 schaltet statt A ebenso das andere Element B an.

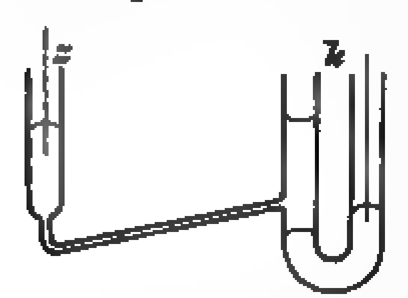


III. Kapillar-Elektrometer (Lippmann).

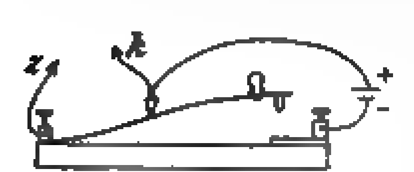
Die Kapillarspannung in einer mit verdünnter Schwefelsäure in Berührung stehenden Quecksilberoberfläche wird durch Polarisation mit Wasserstoff um einen Betrag verkleinert, welcher der Polarisation nahe proportional ist, solange diese unter etwa $\frac{1}{10}$ V bleibt. Später wird die

Abnahme langsamer; einem Minimum der Kapillarkonstante bei etwa 1 V folgt dann wieder eine Zunahme. Das Kap.-El. ist also auf kleine Spannungen beschränkt.

Wäßrige Schwefelsäure (25% etwa) steht mit Quecksilber in Berührung einerseits in der Kapillare einer eng ausgezogenen Glasröhre, andrerseits in einem weiten Glasrohr. Aus beiden Quecksilbermassen ragen Platindrähte *z* und *k* als Elektrometerpole heraus. Der negative Pol der zu messenden Spannungsdifferenz, welche < 1 V sein muß, wird mit *z*, der andere mit *k* verbunden. Man beobachtet entweder mit einem Mikroskop die Größe der Verschiebung oder die Größe der Druckänderung, welche die Kontaktstelle auf den Nullpunkt zurückführt. Nullpunkt ist Einstellungspunkt bei metallischer Verbindung von *z* mit *k*.



Unbenutzt sollen *z* und *k* metallisch verbunden stehen. Der Federschlüssel (Fig.; Ostwald) verbindet, mittels seines isolierenden Knopfes niedergedrückt, *k* und *z* mit den Polen des Elements, losgelassen verbindet er *k* und *z* mit einander. Ein Morse-Taster hat dieselbe Einrichtung.



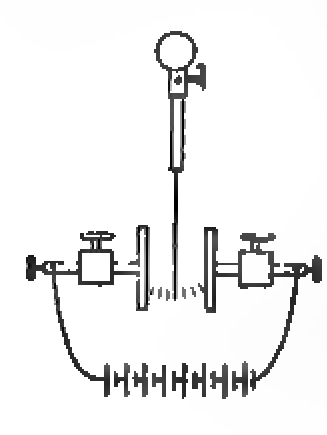
Nach Anwendung einer zu großen oder einer verkehrt gerichteten Spannung ist das Quecksilber an der Berührungsstelle in der Kapillare zu erneuern.

Die Eichung geschieht am besten, unter Benutzung des Satzes von der Proportionalität bei kleinen Spannungen, nach dem Verfahren I 2, S. 560, mit bekannten Elementen oder Akkummulatoren (80, S. 376 ff.). Oft dient das Instrument auch zu Nullmethoden.

Lippmann, Pogg. Ann. 149, 546. 1873. Einfache Formen für das Kapillar-Elektrometer s. z. B. bei Ostwald-Luther, physiko-chemische Messungen S. 333. — Eine auf die Unsymmetrie beim Auf- und Absteigen hinweisende Kritik bei van Laar, ZS f. phys. Ch. 41, 385. 1902.

IV. Andere Elektrometer.

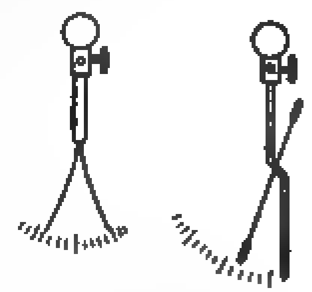
1. Hankel'sches Elektrometer; eine zu Messungen eingerichtete Form des Bohnenberger'schen Elektroskops. Zwischen Polplatten spielt ein Gold- oder Aluminiumblatt oder ein versilberter Quarzfaden. Durch eine trockene Säule oder Elemente können entweder das Blättchen oder (Fig.) die Polplatten zu konstanter Spannung geladen werden. Der andere Teil nimmt das zu messende Potential auf. Die Schaltungen entsprechen der Nadel- bez. Quadrantschaltung in II. Ein Mikroskop mit Okularmikrometer mißt die Verschiebungen an einem feinen Zacken des Blättchens. Für scharfe Einstellung beleuchte man mit einer nicht großen Gasflamme aus einiger Entfernung



Das Instrument hat sehr kleine Kapazität und momentane Einstellung. Bei maximaler Empfindlichkeit läßt sich 0,01 V beobachten. Durch Entfernen oder Annähern der Seitenplatten bezw. Änderung des Hilfspotentials wird die Empfindlichkeit variiert. Doppelschaltung mißt bis etwa 100 V. Vgl. auch Beggerow, Ann. der Ph. 7, 498. 1902.

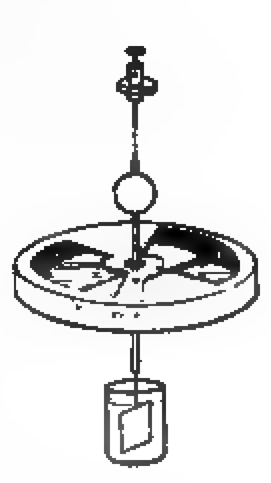
Über einen Vorschlag, eine trockene Säule am Torsionsfaden aufzuhängen, vgl. Nernst u. Dolezalek, ZS f. Instr. 1897, 65.

2. Blattelektroskope. Aluminium- oder Goldblatt-Elektroskope mit geeignetem Gradbogen lassen Potentiale von 50 bis 10000 V messen. Die Blättchen sollen möglichst in abgeleitete Metallhüllen eingeschlossen sein (**126**). Die Skale wird empirisch graduiert.


1. 2.

Über ein Elektroskop für Potentiale von 50 bis 200 V siehe Exner, Wiener Berichte 95 II, 1088. 1887; eine besonders für luftelektrische Versuche bestimmte Form von Elster u. Geitel (Bezugsquelle Günther u. Tegetmeyer, Braunschweig), siehe **124a** IV, S. 541; ein desgl. mit einem um eine Axe spielenden Aluminiumstreifen für 500 bis 10000 V (Fig. 2) s. bei Braun, Wied. Ann. 44, 771. 1891. — Über eine Form mit Hilfspotential an einer dem Goldblatte gegenüberstehenden Platte, bei mikroskopischer Ablesung sehr empfindlich, s. T. R. Wilson, Proc. Cambr. Phil. Soc. 12, 135. 1903; ZS f. Instr. 1903, 314.

3. Righi'sches Spiegelelektrometer, für stärkere Spannungen von etwa 3000 bis 25000 V als Hilfsapparat des absoluten Elektrometers besonders geeignet (**128**). Eine Nadel, welche auf das zu messende Potential V geladen wird, wird infolge ihrer unsymmetrischen Stellung zu zwei Ausschnitten im Gehäuse oder dgl. abgelenkt. Die Ausschläge e sind dem Quadrat von V genähert proportional. Bei der empirischen Graduierung (**129**) kann man die Formel $V = c\sqrt{e(1 - c'e)}$ zugrunde legen. Über Flüssigkeitsdämpfung vgl. S. 552. Die Anordnung s. bei Quincke, Wied. Ann. 19, 564. 1883.



Eine andere Anordnung mit regulierbarer bifilarer Direktionskraft und Ausschlägen, die nahe prop. V^2 sind, für 6000 bis 60000 V, Heydweiller, ZS f. Instr. 1892, 377.

Über einen Vorschlag zur Benutzung der Elektrostriktion zur Messung starker Spannungen mittels eines hohlen Glasfadens vgl. Quincke, Wied. Ann. 10, 385. 1880.

128. Absolute Messung elektrostatischer Potentiale (Harris 1834).

1. Von einer mit Elektrizität von der Flächendichte σ gleichmäßig geladenen Ebene erfährt eine El.-Menge ε, die ihr in einem gegen die

Ausdehnung der Ebene verschwindenden Abstand gegenüber steht, eine zur Ebene senkrechte Kraft $= 2\pi\sigma\cdot\varepsilon$, also vom Abstande unabhängig.

Beweis. Man zerlege die Ebene von dem Fußpunkte der von ε gefällten Senkrechten a aus in Elementarringe. Ein Ring vom Halbmesser r und der Breite dr übt die Kraft aus $\varepsilon\cdot\sigma\cdot 2\pi r dr\cdot a(r^2+a^2)^{-3/2}$. Die Gesamtkraft ist also $= \varepsilon\sigma 2\pi a\int r(r^2+a^2)^{-3/2}dr$. Das Integral ist $= -(r^2+a^2)^{-1/2}$, also zwischen den Grenzen 0 und r genommen $= 1/a - 1/(r^2+a^2)^{1/2}$, und wenn das zweite gegen das erste Glied verschwindet, $= 1/a$. Die Kraft wird also $= \varepsilon\sigma\cdot 2\pi$; q. e. d.

2. **Anziehung einer auf dem Potential V gehaltenen Platte f durch eine im kleinen Abstande a befindliche, große abgeleitete Platte.** Das System bildet einen Kondensator von der Kapazität (**132** I 3) $f/(4\pi a)$, d. h. die Platte vom Potential V hat die Ladung $V\cdot f/(4\pi a)$. Bei relativ sehr kleinem Abstande ist die entgegengesetzte Ladung der abgeleiteten Platte nahe ebenso groß, d. h. die Flächendichte ihrer Ladung beträgt $\sigma = V/(4\pi a)$. Die Menge $V\cdot f/(4\pi a)$ erfährt also nach 1 eine Gesamtkraft $k = 2\pi\cdot V/(4\pi a)\cdot Vf/(4\pi a) = f/(8\pi)\cdot V^2/a^2$. Welcher Nullpunkt dabei für das Potential gewählt wird, ist gleichgiltig; V bedeutet in der Kraftformel immer den Pot.-Unterschied zwischen beiden Platten.

Je weniger a gegen die Ausdehnung von f verschwindet, desto ungenauer wird der Ausdruck. Das Umgeben der geladenen Platte mit einem Schutzring (vgl. unten) erweitert die Giltigkeit.

Absolute Elektrometer (W. Thomson 1860).

Eine bewegliche, kreisförmige ebene Platte von der Größe f hängt, von einem auf gleichem Potential erhaltenen Schutzringe umgeben, über einer größeren festen Platte in einem kleinen Abstande a. Der Potentialunterschied $V - V_0$ bedingt dann eine gegenseitige Anziehungskraft $k = \frac{1}{8\pi}\frac{f}{a^2}(V - V_0)^2$; vgl. oben Nr. 2. Man erhält also die Differenz $V - V_0$ oder, wenn $V_0 = 0$ ist, $V = a\sqrt{8\pi k/f}$. Alle Längen in cm, k in Dynen gemessen, kommt V in elektrostatischen CGS, von denen eine Einheit 300 V beträgt. (Anh. 7, 15 u. 26.)

Anstatt f ist genauer zu setzen, wenn R und R' die Halbmesser der beweglichen Scheibe und des Schutzringes bedeuten, also $b = R' - R$ die Breite der schmalen Fuge,

$$f = \frac{\pi}{2}\left(R^2 + R'^2 - b\,\frac{R+R'}{1+4{,}5\,a/b}\right).$$

Maxwell, Elektrizität § 217 u. 218; 4,5 ist $= \pi/\lg\text{nat}\,2$.

Kirchhoff'sche Wage. Die bewegliche Platte (Fig. vor. S.) bildet die Schale einer Wage, mit dem Schutzring in einer Ebene liegend, wenn der Wagezeiger auf Null steht. Ein Anschlag der zweiten Wagschale verhindert weitere Annäherung an die tiefer stehende feste Platte.

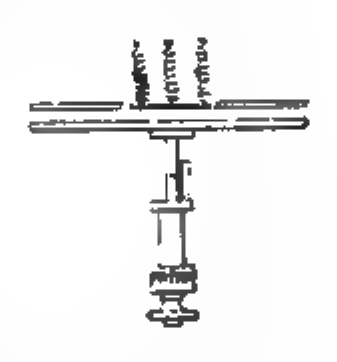
Wird letztere auf ein Potential V geladen, so muß man auf die zweite Wagschale p gr legen, damit die Wage umzukippen beginnt. Das Potential bestimmt sich dann nach der oben gegebenen Formel, wenn man $k = 981p$ setzt. Der Beginn des Umkippens wird durch das Unterbrechen eines galvanischen Stromes scharf fixiert, welcher durch den Anschlag zur zweiten Wagschale fließt.

Das Verfahren ist für Potentiale von mehreren CGS (reichlich 1000 V) an aufwärts geeignet.

Näheres s. Quincke, Wied. Ann. 19, 561. 1883; Czermak, Wiener Berichte 97, 307. 1888. Über feste Führung der Schale und Anordnungen bis zu 100000 V s. Abraham u Lemoine, Journ. de phys. (3) 4, 466. 1895; über eine plattenelektrometrische Zeigerwage von Kelvin das Verzeichnis von White, Glasgow. — Vgl. Wiedemann, Elektrizität, 4. Aufl. I S. 182.

Thomson'sches absolutes Elektrometer. Die bewegliche Platte bildet eine Federwage, die bereits in der Nullstellung mit Gewichtchen belastet ist. Der wegzunehmende Betrag p gr, bez. die in das Gewicht p gr umgerechnete Anspannung der Aufhängefedern, wodurch nach der Ladung die Nullstellung wieder herbeigeführt wird, gibt, mit $g = 981$ multipliziert, die Kraft k.

Die Schwierigkeit, a genau zu messen, wird hier so umgangen: die aufgehängte Platte samt Schutzring wird mit dem Gehäuse — einer Leidener Flasche — zu einem konstanten, nicht zu kleinen Potential geladen. Die feste, aber meßbar parallel verschiebbare Platte f wird zunächst zur Erde abgeleitet; die zum Erzielen der Nullstellung nötige Kraft sei $= k$, wenn f eine bestimmte Lage hat. Nun wird das zu messende Potential V der Platte f mitgeteilt. Damit die bewegliche Platte bei derselben Kraft k wieder in ihre Nullstellung kommt, sei eine Verschiebung von f um l cm nötig. Dann ist $V = l\sqrt{8\pi k/f}$.



Denn es ist, das konstante Hilfspotential durch V' bezeichnet (S. 558),

$$V' = a\sqrt{8\pi k/f} \quad \text{und} \quad V' \pm V = (a \pm l)\sqrt{8\pi k/f}.$$

Näheres über die Einrichtung bei W. Thomson, Papers on Electrostatics usw. oder in dem von White in Glasgow herausgegebenen Verzeichnis: Lord Kelvin's Standard Electr. Instr. — Auch in Wiedemann, Elektrizität 4. Aufl. I, 185.

Beurteilung von Potentialen aus der Schlagweite.

Zwischen Oberflächenteilen eines geladenen und eines abgeleiteten Leiters tritt bei hinreichend hohem Potential Funkenentladung ein. Eine genaue quantitative Beziehung wird durch die Umstände erschwert, die den Vorgang beeinflussen; so wird bei kleinen Schlagweiten im Beginn der Ladung ein höheres Potential erfordert, als später; Belichtung, besonders der Kathode, erleichtert den Funkenübergang; die Schlagweite hängt außer von der Natur des Gases auch von seinem Druck ab.

Trotzdem ist die Schlagweite unter Umständen ein bequemes Mittel zur Schätzung hoher Potentiale von mindestens einigen 1000 V. S. darüber Tab. 35.

Über den Einfluß der Ladungszeit auf die Schlagweite vgl. Toepler, Pogg. Ann. 134, 217. 1868; Jaumann, Wied Ann. 55, 655. 1895; Warburg, Wied. Ann. 59, 1. 1896. Über den Einfluß der Belichtung der Kathode Warburg, Wied. Ann 59, 1. 1896; 62, 385. 1897; Verh. D. Ph. Ges. 1900, 212. — Zusammenfassende Behandlung und Literaturangabe Starke, ZS f. Instr. 1903, 54.

129. Eichung und Kalibrierung eines Elektrometers.

Man beobachtet die Ausschläge, welche bekannte Potentiale, an das Elektrometer angelegt, hervorbringen, und stellt die Resultate, ev. mit Hilfe der genähert bekannten Form der Abhängigkeit, graphisch oder tabellarisch oder in einer Formel dar.

I. Instrumente für kleinere Potentiale.

1. Man beobachtet die Ausschläge, welche mehrere Normalelemente (80 II) einzeln und zusammenwirkend hervorbringen, wenn die Pole je mit einem Quadrantenpaare verbunden sind, wobei stets kommutiert und der beiderseitige Ausschlag gemittelt werde.

2. Man leitet einen konstanten Strom durch einen Rheostaten von großem Widerstande, dessen eine Polklemme mit der Erde in Verbindung steht. Die ganze Klemmspannung des Rheostaten soll das größte zur Kalibrierung erforderliche Potential erreichen.

Die Stromstärke i sei in A gemessen. Ein Elektrometerpol wird an den abgeleiteten und nun der andere stufenweise an andere Punkte des Rheostaten angelegt. Ein zwischen den Elektrometerpolen liegender Widerstand w Θ bezeichnet eine Spannung von iw V. Kommutieren des Stromes gibt die Ausschläge nach beiden Seiten.

II. Instrumente für größere Potentiale.

1. Mit einem absoluten Elektrometer (**128**); für Spannungen von 1000 V und mehr. Die Potentiale werden durch eine mit einer Leidener Batterie verbundene Influenzmaschine erzeugt. Am besten wird das absolute Instrument zuerst für das zu erreichende Potential eingestellt, erst dann die Ladung der beiden Instrumente vorgenommen, und zwar auf etwas höheres Potential als das verlangte. Durch Annäherung einer abgeleiteten Spitze, Berührung mit einem Taschentuch u. dgl. bewirkt man dann ganz langsames Sinken des Potentials und liest, sobald das absolute Instrument einspielt, das zu eichende ab.

Oberhalb 50000 V sind Elektrometer wegen der Verluste nicht direkt mehr brauchbar. Über die Messung größerer Spannungen durch Spannungsteilung s. z. B. E. Voigt, Ann. der Ph. 12, 385. 1903.

2. Mit galvanischer Kette; für Spannungen bis zu einigen Tausend Volt. Auch wenn die Spannung der Kette direkt nicht ausreicht, kann man auf folgendem Wege eichen.

a) Man verbindet mit der einen Endklemme eines Potentialverstärkers die Kette, mit der anderen das Elektrometer. Ist z die Verstärkungszahl, V die Spannung der Kette (S. 376 ff.), so ist zV das Potential auf dem Elektrometer.

Hallwachs sowie Exner, l. c. (127).

b) Der eine Pol P_1 der isoliert aufgestellten Kette ist mit der innern Belegung einer großen, außen abgeleiteten Leidener Batterie dauernd verbunden. Man leite P_1 ab und verbinde P_2 mit dem zu eichenden oder mit einem passenden Hilfselektrometer und beobachte den der Spannung V der Kette entsprechenden Ausschlag n_1. Alsdann wird P_1 von der Erde gelöst und das Elektrometer mit P_1 sowie einer Potentialquelle (Elektrisiermaschine usw.) verbunden und wieder bis zum Ausschlag n_1 geladen. Jetzt hat der Pol P_2 die Spannung $2V$.

Auf analoge Weise fortfahrend kann man beliebige Vielfache von V erzielen und an das Elektrometer anlegen. Vorausgesetzt wird eine im Vergleich mit den Elektrometern große Kapazität der Batterie. Vgl. F. Braun, l. c. **127.**

130. Elektrometrische Messung von Spannung, Widerstand, Stromstärke und Stromleistung.

I. Spannung. Die Spannungen von Elementen werden mit einander verglichen, indem man nach S. 553 ff., gewöhnlich in Quadrantschaltung, jedes von ihnen an das Elektrometer anlegt. Die beobachteten, ev. auf Proportionalität korrigierten (**127, 129**) Ausschläge geben durch einander dividiert das Verhältnis der Spannungen oder der el. Kräfte im stromlosen Zustande zu einander. — Ebenso vergleicht man Spannungen im Stromkreise (**101**).

Die Eichung des Elektrometers mit Normalelementen (**80 II**) läßt die Angaben in Volt erhalten.

II. Widerstand; vgl. **91** II. Zu vergleichende Widerstände schaltet man hinter einander in denselben Stromkreis ein, dessen Konstanz man prüft, legt die beiden Endpunkte zuerst des einen, dann des andern an das Elektrometer an und bestimmt aus dem Ausschlage die Spannung zwischen den Punkten. Das Verhältnis der Spannungen gibt das Verhältnis der Widerstände.

Elektrolytische Widerstände kann man ebenso messen, indem man von der Flüssigkeit durch zwei seitliche Bohrungen in der Glasröhre nach dem Elektrometer abzweigt, und zwar zunächst durch dieselbe Flüssigkeit, von da mittels zweier gleicher Elektroden; Reste von Ungleichheit fallen durch Kommutieren heraus. Die prinzipielle Vermeidung der Polarisation durch angeschlossene Zinksulfatlösung mit Zinkelektroden (Bouty) ist umständlich. — In jedem Fall ist die Stromwärme zu beachten.

Vgl. Sheldon, Wied. Ann. 34, 122. 1888; Rasehorn, Dissert. Halle 1889; Bouty, Ann. chim. phys. (6) 3, 433. 1884.

III. Stromstärke. Aus der Endspannung e V an einem bekannten Widerstande von w Θ im Stromkreise ergibt sich die Stromstärke $= e/w$ A. Vgl. **88** u. **101**.

Wechselströme.

Elektrometrische Methoden haben hier den Vorzug, daß die Fehler aus der Selbstinduktion fortfallen und daß bei den gebräuchlichen Wechselzahlen auch der Zuleitwiderstand und die Ladungskapazität des Instruments außer Betracht bleiben.

Je nach dem Elektrometer oder der Schaltung am Quadrantelektrometer (**127** II; IV) verfügt man über eine, der Spannung direkt oder quadratisch proportionale Wirkung, kann also sowohl $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V dt$ wie auch $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau V^2 dt$, d. i. das Quadrat der effektiven Spannung P_e (**120** I) direkt messen.

Die eff. Stromstärke i_e wird dadurch gefunden, daß man P_e an den Enden eines induktionsfreien Widerstandes w im Stromkreise mißt, als $i_e = P_e/w$.

Stromleistung. Die Leistung innerhalb eines Leitungsteiles vom Widerstande w ohne Selbstinduktion, also ohne Phasenverschiebung (**120** II) zwischen Spannung und Stromstärke, wenn in w keine el. Kraft liegt, kann einfach gemessen werden, indem man ein Elektrometer in Doppelschaltung (S. 554) an das eine Ende von w legt, während das andere abgeleitet ist. Der Ausschlag ist dem Quadrate der eff. Spannung, nämlich $(i_e w)^2$ proportional, also durch w geteilt, der Leistung $i_e^2 w$.

Um die Leistung innerhalb eines Leitungsteiles zu messen, auch wenn in ihm Phasenverschiebung besteht, legt man die ganze Spannung P dieses Teiles etwa an die Nadel, während die Quadranten gleichzeitig an einen induktionsfreien Teil der Leitung angelegt sind, wo also die Spannung in jedem Augenblick der Stromstärke proportional ist. Der Ausschlag ist dann proportional $\frac{1}{\tau}\int_0^\tau P i\, dt$, d. h. unmittelbar der gesuchten Größe (**120** III).

Genauere Vorschriften mit Rücksicht auf die Elektrometer-Korrektionen bei Orlich, ZS f. Instr 1903, 110.

131. Messung der Elektrizitätsmenge eines Kondensators.

Siehe auch **132** II.

1. Mit dem Elektrometer. Da die Ladungsmenge in einem bestimmten Kondensator dem Potential proportional ist, so lassen sich Ladungen desselben Kondensators mit dem Elektrometer (**127**) vergleichen. Der „Rückstand“, d. h. die bei einer kurz dauernden Entladung zurückbleibende Elektrizitätsmenge, äußert keinen Einfluß auf das Potential; den Angaben des Elektrometers ist also die durch eine kurz dauernde Verbindung beider Belegungen entladene „disponibele“ Ladung proportional.

2. **Mit dem Galvanometer.** Eine große Elektrizitätsmenge kann mittels ihrer Entladung durch ein Galvanometer von hinreichend isolierten Windungen bestimmt werden (**109** I). Der Gefahr, daß ein Funke zwischen den Windungen überspringt oder daß der magnetische Zustand der Nadel oder eines Eisenpanzers geändert wird, beugt man durch Einschalten eines großen Widerstandes (feuchter Faden) vor.

Die elektromagnetische CGS-Einheit ist = 10 A sek oder Coulomb, sowie = $300 \cdot 10^6$ elektrostatischen CGS; Anh. Nr. 14 und 25.

3. **Mit der Lane'schen Maßflasche.** Bei der Ladung einer Leidener Batterie kann man die zugeführte Elektrizitätsmenge bestimmen, indem man die Belegungen isoliert und die eine mit der Elektrisiermaschine, die andere mit einer Maßflasche verbindet. Jedem Funken der Maßflasche entspricht ein bestimmter Zuwachs der Ladung der Batterie. Der Rückstand wird hier mit gemessen. — Die Eichung auf verschiedene Schlagweiten geschieht elektrometrisch (**127** I u. IV) oder nach Tab. 35.

4. **Mit dem Luftthermometer** (Riefs). Die Depression der Flüssigkeitssäule durch eine Entladung ist proportional dem Produkt aus der entladenen Elektrizitätsmenge und ihrem Potential. Der Widerstand des Drahtes in der Thermometerkugel wird sehr groß gegen die Widerstände der übrigen Entladungsstrecken vorausgesetzt. Da die Ladung derselben Leidener Flasche oder Batterie ihrem Potential proportional ist, so verhalten sich die entladenen Mengen wie die Quadratwurzeln aus den durch sie hervorgebrachten Depressionen.

132. Elektrostatische Kapazität.

Kapazität c eines Leiters ist die Elektrizitätsmenge, welche ihn zum Potential 1 ladet, während die Leiter in influenzierbarer Nähe auf Null gehalten werden. Die Kapazität hängt nicht nur von der Form des Leiters, sondern auch von seiner Lage zur Umgebung ab (Beobachter, Tisch, Wand usw.).

Über Einheiten der Kap. vgl. Anh 16 u. 27.

I. Aus den Dimensionen (in elektrostatischen Einheiten).

1. Kugel $c = r$.

Beweis. Eine auf einer Kugelfläche gleichmäßig ausgebreitete El.-Menge e gibt im Innern ein konstantes Potential V, welches also gleich dem auf den Mittelpunkt ausgeübten Potential sein muß. $V = e/r$. Also $c = e/V = r$

Kondensatoren. Kapazität schlechtweg heißt hier die Kapazität der einen (inneren) Belegung, des „Kollektors“ Zu feineren Meßzwecken

benutzt man Luftkondensatoren (R. Kohlrausch, verschiebbare Platten; große konstante Kapazitäten z. B. Lord Kelvin), allenfalls auch solche mit Paraffin (126). Glas-, Glimmer-, Wachstafft- usw. Kondensatoren folgen wegen Rückstand und Oberflächenleitung den einfachen Kondensatorgesetzen nicht genau. — Ihre Kapazität pflegt mit wachsender Temperatur zu steigen, bis über 1% auf 1°.

Die Kapazität einfach gestalteter Kondensatoren läßt sich berechnen. a bedeute den konstanten Abstand der Belegungen. Die Formeln gelten für Luft als Dielektrikum; ev. ist noch mit der Dielektrizitätskonstante (133, Tab. 36) zu multiplizieren.

2. Kugelkondensator, innerer Halbmesser $=r$, äußerer $=r'$. Die äußere Kugel sei abgeleitet. $c=rr'/(r'-r)=rr'/a$, wenn $a=r'-r$ der Abstand der Kugelflächen ist. Führt man anstatt r und r' die beiden Flächen f und f' ein, so wird, da $r^2=f/(4\pi)$ und $r'^2=f'/(4\pi)$ ist, $c=\sqrt{ff'}/(4\pi a)$.

Beweis. Eine kugelflächig gleichmäßig verteilte El.-Menge wirkt auf einen äußeren Punkt, wie wenn sie im Mittelpunkt konzentriert wäre. Da das Potential auf einen Punkt außerhalb beider Kugeln Null sein soll, so müssen die beiden Ladungen gleich groß sein, etwa gleich $+e$ und $-e$. Dann ist das von beiden herrührende Potential (vgl. oben) auf der inneren Kugel also $V=e/r-e/r'=e(r'-r)/rr'$. Daraus folgt $c=e/V=rr'/(r'-r)$; q. e. d.

3. Parallele Flächen. Bei relativ sehr kleinem Abstande a ist, wenn f die Fläche bedeutet, genähert $c=f/(4\pi a)$; denn man kann die Flächen als Teile von unendlich großen Kugeln betrachten. Die Plattendicke, sowie die nach den Rändern zunehmende Dichtigkeit der Ladung bringen um so größere Korrektionen, je weniger a gegen f verschwindet.

4 Kreisplatten-Kondensator vom Radius r. Genähert, wenn a sehr klein ist, $c=r^2/4a$ Genauer ist ($d=$ Plattendicke):

$$c=\frac{r^2}{4a}+\frac{r}{4\pi}\left(\operatorname{lgnat}\frac{16\pi r(a+d)}{a^2}+1+\frac{d}{a}\operatorname{lgnat}\frac{a+d}{d}\right). \qquad 1.$$

5. Schutzring-Kondensator. Darunter versteht man eine Kreisplatte als Kollektor, unter Belassung eines schmalen Luftringes umgeben von einer weiteren, ebenfalls isolierten Platte, gegenüber gestellt einer parallelen, großen abgeleiteten Platte (ähnlich wie Fig. S. 568). Kreisplatte und Schutzplatte werden zu gleichem Potential geladen; die letztere vermindert hierbei die Ungleichmäßigkeit der Ladung an den Rändern um so mehr, je dichter sie umschließt. Als Ladungsmenge gilt aber nur die Ladung der Kreisplatte. r sei der Radius der Kollektorplatte, r' der innere Radius des Schutzrings, $b=r'-r$ die Furchenbreite.

Näherungsformel: $c=(r+r')^2/16a)$.

Genauer ist:

$$c=\frac{(r+r')^2}{16a}-\frac{r+r'}{2\pi}(\beta\operatorname{tg}\beta+\operatorname{lgnat}\cos\beta), \qquad 2.$$

wo $\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}b/a$. Die Formel setzt b klein gegen die Plattendicke voraus. Eine genaue Formel bei Kirchhoff.

Kirchhoff, Abhandl.; Formel 1: S. 112, wo der Abstand aber $=2a$ gesetzt ist, und Formel 2: S. 117. Eine andere Formel bei Maxwell, Elektr. I, § 201.

6. Cylinder-Kondensator von der Länge l, dem inneren Radius r, dem äußeren $r+a$. Wenn l sehr groß gegen r, so gilt für den inneren Cylinder $c=\frac{1}{2}\frac{l}{\lg\text{nat}(1+a/r)}$; ist zugleich a klein gegen r, so wird $c=\frac{1}{2}l\,r\,a$.

Ein Cylinder, den man verschieden tief in einen anderen einschiebt, ist für variabele Kapazitäten bequem.

7. Zurückführung einer elektrostatischen Kapazität c auf Widerstandskapazität. Bei beliebiger Gestalt ist $1/c$ gleich der mit 4π multiplizierten Größe C, welche S. 374 u. 487 Widerstandskapazität genannt ist, wenn man den Kondensator in eine große Flüssigkeitsmenge eingetaucht denkt und die beiden Platten als Elektroden ansieht.

Eine elektrostatisch in cm gemessene Kapazität gibt, durch 900000 geteilt, die Kapazität in Mikrofarad (Anh. 27).

II. Mit dem Elektrometer.

Man beachte, besonders bei kleinen Kapazitäten, die Bemerkungen S. 550 und zu Anfang dieses §. Die zu vergleichenden Leiter müssen so aufgestellt sein, daß sie sich nicht gegenseitig influenzieren.

Schnelle Beruhigung der Elektrometerschwingungen läßt sich durch passendes Ein- und Ausschalten von Elementen in die Erdleitung des geeigneten Elektrometerteils erreichen.

1. Vergleichung durch Ladungsteilung. Der Leiter I wird, mit dem Elektrometer (Kapazität γ) verbunden, zum Potential V geladen. Der vorher abgeleitete Leiter II wird zugeschaltet: das Potential sinke auf V'. Dann ist

$$c_2:(c_1+\gamma)=(V-V'):V'.$$

Die Methode eignet sich für große Kapazitäten, bei denen γ einen geringen Einfluß hat. Sie stellt erhebliche Anforderungen an Isolation.

Die Kapazität γ eines Elektrometers läßt sich gerade so durch Ladungsteilung mit der eines Leiters, z. B. eines Kondensators oder einer von Wänden usw. hinreichend entfernt aufgehangenen Kugel, vergleichen.

Kapazitäten, namentlich des Quadrantelektrometers, auch der Zuleitungen usw. werden leicht unterschätzt. - Eventuell ist auch auf die Veränderlichkeit von γ mit der Ablenkung zu achten.

2. Vergleichung durch Gegenstellen. Man schließe eine vielpaarige galvanische Kette durch einen großen Widerstand (Rheostat) R und verbinde die Leiter I und II je mit

einem Ende von R. An beliebiger Stelle von R sei eine Erdleitung anzubringen. Wird diese so angelegt, daß nach der Abtrennung der Leiter ihre Ladungen sich bei gegenseitiger Verbindung neutralisieren, so verhalten sich die Kapazitäten umgekehrt wie die beiderseitigen Teile von R. Vgl. auch 3.

Die Kapazität des Elektrometers, an welchem man die Neutralisierung prüft, kommt hier nicht in Betracht.

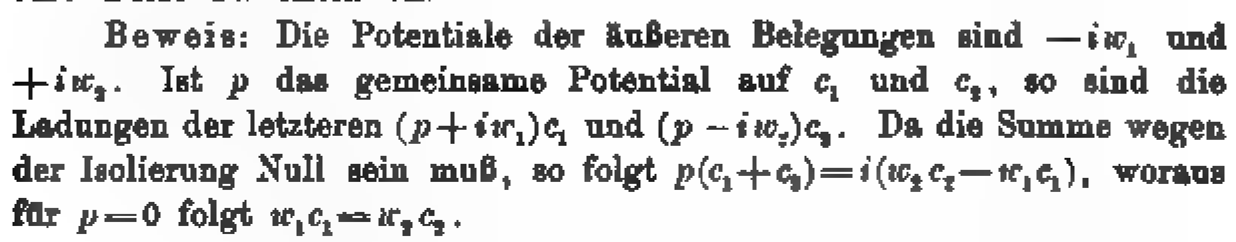
Beweis aus 80 I 4.

Die Methode läßt sich auf verschiedene Weise modifizieren. Man kann z. B. die Leiter an die Pole der offenen Kette anlegen und die Erdleitung an der letzteren so anbringen, daß sie die Elementenzahl im Verhältnis $c_1 : c_2$ teilt.

Auch kann man, namentlich bei dem Vergleich nahe gleicher Kapazitäten, dem einen Pol der offenen Kette noch Elemente zufügen, die durch einen Widerstand geschlossen sind. Indem man von diesem an passender Stelle ableitet, lassen sich die Potentiale genau in ein solches Verhältnis bringen, daß die Ladungen sich neutralisieren. Über die Ausführung vgl. Lebedew, Wied. Ann. 44, 289. 1891.

3. Vergleich von Kondensatoren. Man schiebt den Erdkontakt (Fig.) so, daß bei der Verbindung von a mit dem vorher abgeleiteten Elektrometer kein Ausschlag entsteht, dann ist

$$c_1 : c_2 = w_2 : w_1 .$$



Man benutzt eine vielpaarige Kette und einen großen Widerstand. Vor der Verbindung mit der Kette sind alle Teile zu entladen.

Beweis: Die Potentiale der äußeren Belegungen sind $-iw_1$ und $+iw_2$. Ist p das gemeinsame Potential auf c_1 und c_2, so sind die Ladungen der letzteren $(p+iw_1)c_1$ und $(p-iw_2)c_2$. Da die Summe wegen der Isolierung Null sein muß, so folgt $p(c_1+c_2)=i(w_2c_2-w_1c_1)$, woraus für $p=0$ folgt $w_1c_1=w_2c_2$.

Zur Kalibrierung eines gut isolierten Kapazitätssatzes eignen sich Nr. 2 u. 3.

III. Mit dem ballistischen Galvanometer. (109.)

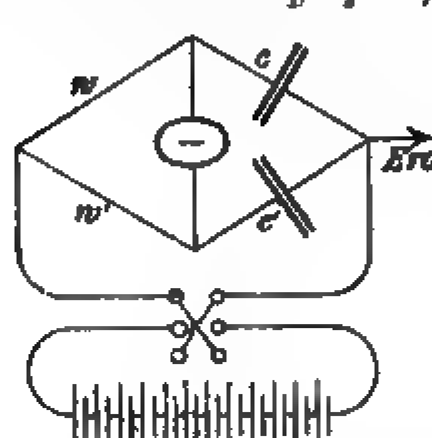
Diese Methoden geben nur bei großen Kapazitäten gute Resultate

4. Vergleichung durch Einzelentladung. Man ladet die Kondensatoren zu gleichem Potential und entladet sie einzeln, bei großer Spannung unter Einschaltung eines großen Widerstandes, durch dasselbe Galvanometer. Die Kapazitäten ver-

halten sich wie die Ausschläge, wobei man mit Vorteil die Multiplikationsmethode (**110**) anwenden kann. Das gleiche Potential erhält man mittels einer Batterie. Leidener Flaschen können auch mit der Elektrisiermaschine zu gleichem Potential geladen werden, indem man jene während der Ladung mit einander verbindet, oder indem man sie an ein Elektrometer legt.

5. Prüfung auf Gleichheit durch Gegenstellen. Die Ladung erfolge auf gleiches Potential mit entgegengesetztem Vorzeichen. Die Gleichheit der Ladungsmengen wird mit dem Galvanometer geprüft, durch welches beide Kondensatoren, nach ihrer Abtrennung von der Quelle, gleichzeitig entladen werden.

Sind die Kapazitäten nicht genau gleich, so kann man ähnlich wie unter II 2 die Spannungen meßbar auf ein anderes Verhältnis regulieren. Wird dabei durch Ausprobieren gefunden, daß das Galvanometer keinen Ausschlag gibt, wenn das Spannungsverhältnis $= V_1/V_2$ ist, so gilt für die Kapazitäten $c_1 : c_2 = V_2 : V_1$.

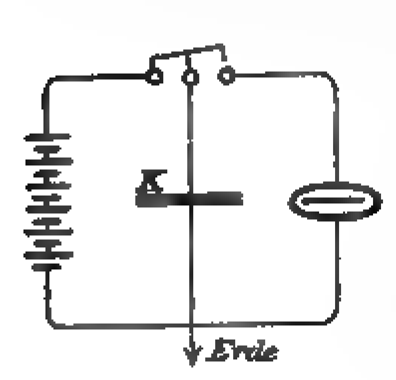


6. Vergleichung in der Wheatstone'schen Brücke. Werden w und w' so reguliert, daß beim Kommutieren des Gesamtstromes kein Ausschlag entsteht, so ist $c : c' = w' : w$. w und w' können zusammen aus einem Draht mit Schleifkontakt bestehen. Siehe auch V 11.

Absolute Kapazität.

Durch das Galvanometer. Die Entladung (vgl. Nr. 4) liefert die Kapazität c in elektromagnetischen Einheiten (Anh. 27), wenn die ballistische Galvanometerkonstante und die el. Kraft E der ladenden Säule (Normalelemente, Akkumulatoren; s. **80** II) bekannt sind. Die El.-Menge Q in A sek und E in V gibt c in Farad.

7. Eine Wippe mit drei Kontakten, etwa Quecksilbernäpfen, gestatte, die eine Belegung des Kondensators K entweder mit dem einen Batteriepol oder mit der einen Galvanometerklemme zu verbinden, während die anderen Enden der drei Instrumente ein für alle mal an Erde (Gas- oder Wasserleitung) liegen.



Man läßt den Kondensator durch Ver-

bindung mit der Batterie sich laden, verbindet ihn dann (um vom Rückstande unabhängig zu sein, kurz) mit dem ruhenden Galvanometer und beobachtet den ersten Ausschlag s. Wenn die el. Kraft der Batterie $= E$ und der ballistische Reduktionsfaktor des Galvanometers $= \mathfrak{P}$, so ist

$$c = \frac{\mathfrak{P}}{E} \cdot s.$$

Denn die Entladungsmenge Q ist einerseits $= c \cdot E$, andrerseits $= \mathfrak{P} \cdot s$.

$\mathfrak{P}$ wird nach **109** I ermittelt; vgl. ebendort den Einfluß der Dämpfung. E wird aus der Anzahl der Elemente und der el. Kraft des einzelnen Elements, z. B. für Akkumulatoren $E = 2{,}01\, n\, \mathfrak{V}$ berechnet.

Die Messungen lassen sich leicht wiederholen, auch unter Anwendung der Multiplikationsmethode (**110**), wenn die Pole der Batterie oder des Galvanometers sich durch die Wippe bequem vertauschen lassen.

8. Nach Maxwell. E und die Galvanometerkonstante fallen heraus bei folgendem Verfahren. Man schließt die Säule durch das Galvanometer und einen gegen ihren inneren Widerstand sehr großen Widerstand R; der konstante Ausschlag sei $= s_0$. Der mit derselben Batterie geladene Kondensator gebe bei der Entladung durch das Galvanometer den Ausschlag s. Der Widerstand Säule + Galvanometer sei $= W$, die Schwingungsdauer der ungedämpften Nadel $= \tau$, das Dämpfungsverhältnis $= k$ und $\Lambda = \lg\mathrm{nat}\, k$ (**27**). Dann ist

$$c = \frac{\tau}{\pi} \, \frac{1}{R+W} \, \frac{s}{s_0} \cdot k^{\frac{1}{\pi} \cdot \mathrm{arc\,tg} \frac{\pi}{\Lambda}}$$

(Tab. 29). Bei größeren Ausschlägen wird s auf den doppelten Sinus des halben Winkels, s_0 auf die Tangente korrigiert (**25**; Tab. 28).

Verfügt man nicht über hinreichenden Widerstand R, so kann man bei der Bestimmung von s_0 die Elemente gruppenweise in gleicher Zahl parallel schalten. Der obige Ausdruck ist dann durch die Anzahl der Gruppen zu dividieren. Oder man legt eine Abzweigung an das Galvanometer; vgl. **86**.

τ in sek, R und W in Ohm liefern die Kapazität in Farad (Anh. 27). 1 Mikrofarad $= 10^{-6}$ Farad $= 10^{-15}$ el. magnetischen $= 9 \cdot 10^5$ el. statischen CGS-Einheiten.

IV. Mit Dauerausschlägen durch rasch wiederholte Ladung und Entladung.

Wenn ein Kondensator c mittels einer selbsttätigen Wippe in rascher Folge Nmal/sek von der el. Kraft E geladen und durch ein Galvanometer entladen wird (zweite Fig S 568), wo oben anstatt der umlegbaren Wippe ein durch Federkraft oszillierender Doppelkontakt zu denken ist), so ist die mittlere Stromstärke in diesem gleich $E \cdot cN$; d. h. der so behandelte Kondensator verhält sich ähnlich wie ein Widerstand $1/(cN)$ in einem Leitungskreise, der sonstige Widerstände nicht enthält (vgl. übrigens unten). Hiernach läßt sich die Messung einer Kapazität auf die Methoden der Widerstandsbestimmung zurückführen. Die Meßwiderstände werden induktions- und kapazitätsfrei vorausgesetzt (80 IV).

Bei sehr raschem Gang der Wippe wird die ohne Rückstandsbildung geltende Kapazität gemessen; verschiedene Schwingungszahlen liefern ein Urteil über den im ersten Augenblick sich bildenden Rückstand.

Ladungs- und Entladungszeit. Vorausgesetzt wird jedoch die Innehaltung der Grenze von N, oberhalb deren die Ladung zum vollen Potential und die Entladung bis zum Potential Null nicht mehr stattfindet. Die Zeit, in der ein Potentialunterschied auf seinen $x$ten Teil sinkt, wird durch $t = w c \cdot \lg \mathrm{nat}\, x$ dargestellt (vgl. 94 a, 5), also muß die Berührungsdauer um so größer sein, je größer die Kapazität und der Galvanometerwiderstand ist. Für $x = 1000$ wird $t = 6{,}9 \cdot wc$, beträgt also z. B. für $w = 10\,\Theta$ und $c = 10^{-6}$ Far $t = 6{,}9 \cdot 10^{-5}$ sek. Es reicht demnach meistens eine sehr kurze Zeit aus. — Über den Einfluß der Selbstinduktion des Entladungsweges auf die Entladung vgl. noch Anh. 28.

Als Wippe ist eine elektromagnetisch angeregte schwingende Feder oder Stimmgabel mit geglühter Platinspitze in reinem Quecksilber geeignet; zur Bestimmung ihrer Schwingungszahl am besten das phonische Rad (57, 7).

9. Bestimmung nach Siemens. Zeigt das Galvanometer (zweite Fig. S. 568) die Stromstärke i (z. B. $i = \mathfrak{C}s$, wenn $\mathfrak{C}$ der Reduktionsfaktor und s der Ausschlag; 89), so ist nach dem vorigen $i = EcN$, also $c = i/(EN)$.

Die absolute Messung von i kann ersetzt werden dadurch, daß man dieselbe Batterie E durch das Galvanometer (γ) und einen großen vorgeschalteten Widerstand R schließt. Der Ausschlag sei $= s_0$, dann ist offenbar

$$c = \frac{1}{N} \frac{1}{R+\gamma} \cdot \frac{s}{s_0}.$$

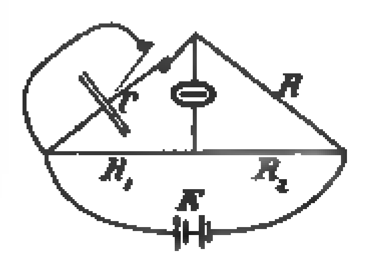
s/s_0 wird vorteilhaft nicht weit von 1 genommen, weil dann die Korrektionen auf die Tangente usw. unerheblich wirken. Über das Verfahren bei mangelndem großen R s. III 8.

Um Kondensatoren zu vergleichen, genügt es, die zugehörigen beobachteten Ausschläge durch einander zu dividieren.

Die Kapazitäten der Zuleitungen sind ev. besonders zu ermitteln und in Rechnung zu stellen.

Siemens, Pogg. Ann. 102, 66. 1857. Vgl. auch die Umkehrung der Methode 94a, 5.

10. Nullmethode (Maxwell). Dieses Verfahren gibt wohl die genauesten Resultate. Man schaltet den Kondensator wie in der Figur in eine Brückenverzweigung und gleicht die Widerstände bis zur Stromlosigkeit der Brücke ab, d. h. so, daß die Ladeströme des Kondensators den konstanten Strom kompensieren, dann ist genähert $1/(cN):R=R_1:R_2$, also $c=\frac{1}{N}\frac{R_2}{RR_1}$.



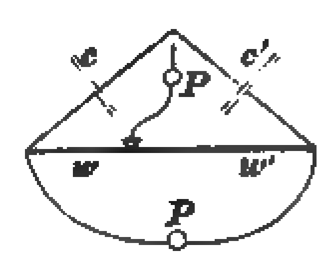
Genauer tritt rechts noch der Faktor hinzu (J. J. Thomson), wenn γ der Galvanometer- und w der Batteriewiderstand ist,

$$\frac{1-R_2^2/[(R_1+R_2+w)(R+R_2+\gamma)]}{[1+R_2/R\cdot w/(R_1+R_2+w)][1+R_2/R_1\cdot\gamma/(R+R_2+\gamma)]}.$$

Maxwell, Electr. II § 775; J. J. Thomson, Phil. Tr. (A) 174, 707. 1883; Klemenčič, Wien. Ber. 89, 298. 1884; Himstedt, Wied. Ann. 29, 560. 1886; 33, 1 1888; über die Ausführung auch Dittenberger u. Grüneisen, ZS f. Instr. 1901, 111.

V. Vergleichung durch Wechselströme mit dem Telephon.

11. Die beiden P bedeuten ein Induktorium und ein Telephon. Wenn das letztere schweigt oder als optisches Telephon keinen Ausschlag gibt, so ist, wie unter Nr. 6, $c:c'=w':w$ (Palaz). w und w' sollen induktionsfrei sein.



12. Über Vergleichung einer Kapazität mit einem Selbstinduktions-Koeffizienten s. **117**, 4 u. 5. Da der letztere konstanter als die elektrostatische Kapazität ist, kann die Methode vorteilhaft sein.

Siehe über Methoden auch Heydweiller, El. Messungen S. 202ff.

VI. Aus dem Widerstande des mit einem Leiter gefüllten Kondensators.

13. Kann der Kondensator, soweit Kraftlinien merklich durchgehen, mit einer Flüssigkeit vom bekannten, gegen das L.-V.

der Kondensatorplatten verschwindenden Leitvermögen $\varkappa\,\mathrm{cm}^{-1}\Theta^{-1}$ gefüllt oder in sie eingetaucht und der nun zwischen den Platten vorhandene Leitungswiderstand w gemessen werden (**96**), so folgt aus Nr. 7 S. 566 in elektrostatischem Maße für Luft als Dielektrikum

$$c = \frac{1}{4\pi} \frac{1}{w\varkappa}.$$

Je größer die zu messende Kapazität, desto geringer muß, um eine geeignete Größe des Widerstandes zu bekommen, das Leitvermögen der Flüssigkeit sein Wässrige Lösungen sind dann wegen der Schwierigkeiten der Widerstandsbestimmung, die aus ihrer hohen Dielektrizitätskonstante entspringen, weniger geeignet als andere Lösungen, z. B. Quecksilberchlorid in Äthylacetat (Essigäther).

Kalibrierung eines Meß-Kondensators von veränderlicher Kapazität (Nernst).

Einen solchen Kondensator (K) kann man herstellen, indem man in die Luftschicht eines Platten-Kondensators eine mit einer Längenteilung versehene (Glas)-Platte von höherer Dielektrizitätskonstante (**133**) mehr oder weniger tief einschiebt. Besser wird, um Einflüsse der Umgebung auf die Kapazität zu vermindern, eine der Platten durch eine Doppelplatte ersetzt, welche die andere einhüllt, und mit einer Doppelglasplatte gearbeitet. Am besten wird ein mit einzuschiebendem Glascylinder versehener oder selbst verstellbarer Cylinder-Kondensator sein.

Zur Kalibrierung dient ein ähnlicher Hilfskondensator (H) und ein kleiner Kondensator (c) von konstanter Kapazität, den man ab- oder zuschalten kann. Man stellt K und H auf Gleichheit ein (siehe z. B. oben V) und liest K ab. Dann fügt man zu H die Kapazität c, stellt K wieder ein und liest ab. Nun entfernt man c, stellt zunächst H wieder ein, fügt dann c abermals zu H, verstellt K usw. Den Verschiebungen von K entspricht jedesmal ein konstanter Zuwachs der Kapazität. Eine Kurve oder Tabelle nimmt diese auf.

Nernst, ZS f. phys. Ch. 14, 639. 1894. Vgl. auch **133** I.

133. Dielektrizitätskonstante (Faraday 1837).

Lehrsätze.

1 Die elektrostatische Kapazität eines Leiters ist cet. par. der „Dielektrizitätskonstante" oder dem „spezif. Induktionsvermögen" D des umgebenden Mittels, des „Dielektrikums" proportional; die Kapazität eines Kondensators also, insofern die Kraftlinien merklich alle im Zwischenmittel

verlaufen, der D.-K. des letzteren. D wird meist für Luft $=1$ gesetzt (vgl. unten). Ist also c_0 die Kapazität für Luft, c diejenige für ein anderes Dielektrikum von der D.-K. D, so ist $D = c/c_0$.

2. Die elektrostatische Kraft k zwischen zwei punktförmigen Elektrizitätsmengen e_1 und e_2 im Abstande r innerhalb eines Mittels von der D.-K D ist $k = (1/D)\ e_1 e_2/r^2$.

3. Aus 1 und 2 folgt, daß die gegenseitige Kraftwirkung zwischen zwei auf festen Potentialen erhaltenen Leitern in einem Mittel von der D.-K. D cet. par. proportional D ist.

Einige D.-Konstanten s. Tab 36. Ausführlichere Tabellen z. B. bei Landolt u. Börnstein.

Statt der Luft wird sachgemäßer das Vakuum als Einheit genommen; dann hat atm. Luft die D.-K. 1,0006. Durch Multiplikation hiermit werden also die gemessenen D.-K. auf das Vakuum bezogen. Der Unterschied ist für feste und flüssige Körper praktisch gleichgiltig, aber bei den Angaben für Gase sorgfältig zu beachten.

I. Bestimmung mit dem Kondensator.

Eine D.-Konstante wird nach 1 gemessen durch das Verhältnis zweier Kapazitäten (132). Die Auswahl der Methoden ist wegen des Leitvermögens der Dielektrika beschränkt. Auf die hieraus entstehenden Fehler hat man hauptsächlich zu achten. Man verringert sie durch raschen Wechsel der Ladung und Entladung.

Die Proportionalität zwischen Kapazität und D.-K. ist daran geknüpft, daß die Kraftlinien ganz im Dielektrikum verlaufen. Cylinder-Kondensatoren, deren äußere Belegung abgeleitet wird, lassen diese Bedingung besser erfüllen als Platten-Kondensatoren.

Kapazitäten der Zuleitungen sind ev. von den gemessenen Größen abzuziehen

A. Nichtleiter.

(Nach den Methoden in 132.)

Flüssigkeiten.

1. Man vergleicht den Versuchskondensator, einmal Luft, das andere Mal die Flüssigkeit enthaltend, mit einem zweiten, konstanten Kondensator von ähnlicher Kapazität. Um die obige Bedingung zu erfüllen, kann man nötigenfalls den Kondensator ganz in die Flüssigkeit untertauchen. Zur Messung bequem sind z. B. die Methoden 132 V.

Gase (Boltzmann) verlangen, da ihre D.-K. wenig verschieden ist, eine Nullmethode: etwa 132 Nr. 2 oder 10.

Tropfbare Flüssigkeiten s. u. a. bei Silow, Pogg. Ann. 158, 306. 1876; Palaz, J. de phys. (2) 5, 370. 1885. Gase und Dämpfe: Boltzmann, Pogg. Ann. 155, 403. 1875; Klemenčič, Wien. Ber. 91, 712. 1885; Lebedew, l. c. (S. 567).

Feste Körper.

2a. Einen schmelzbaren Körper kann man wie eine Flüssigkeit behandeln, indem man ihn um den eingetauchten Kondensator erstarren läßt.

2b. Platten-Verfahren. Der Körper wird als Scheibe zwischen die parallelen, reichlich kleineren Platten eines Luftkondensators gebracht. Der Kondensator von R. Kohlrausch läßt Platten leicht auswechseln und parallel stellen. Je relativ kleiner der Plattenabstand, desto mehr verschwinden die Fehler, welche der Methode wegen des rückwärts verlaufenden Teiles der Kraftlinien anhaften.

Bedeutet a den Plattenabstand des Kondensators (klein gegen den Radius), c_0 die Kapazität mit Luft, c die Kapazität mit eingeschobenem Körper von der Dicke d (**21** II), so ist

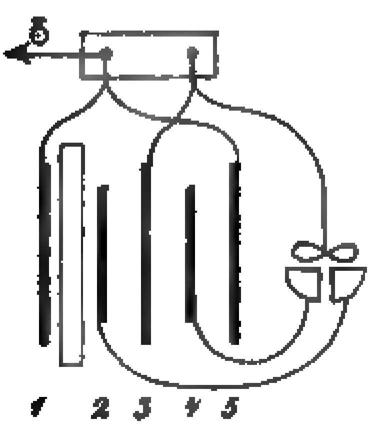
$$\frac{1}{D} = 1 - \frac{a}{d}\frac{c - c_0}{c}.$$

Beweis. Es ist $c_0 = \frac{1}{4}r^2/a$ (**132** I). Die Scheibe des Dielektrikums wirkt wie eine Luftschicht von der Dicke d/D. Daneben ist noch eine Luftdicke $a-d$; also $c = \frac{1}{4}r^2/(a-d+d/D)$. Durch Division fällt r heraus; s. Boltzmann, Pogg. Ann. 151, 482 u. 531. 1874.

3. Platten-Verschiebung. Man vermeidet die Messung von a und die Korrektion wegen der Zuleitungen, wenn eine der Kondensatorplatten parallel meßbar verschoben werden kann. Nach Einbringen der Scheibe sei eine Abstandsvermehrung um δ nötig, um die frühere Kapazität herzustellen. Dann ist (vgl. den obigen Beweis)

$$D = d/(d - \delta).$$

Auch auf Flüssigkeiten, welche man in ein zwischen den Platten stehendes planparalleles Gefäß eingießt, ist die Methode anwendbar.



Unter Anwendung eines Hilfskondensators kann man eine der Nullmethoden von **132** gebrauchen.

4. Eine besondere Form der Nullmethode (Gordon, Phil. Trans. 1879, 417) ist durch fünf äquidistante Kondensatorplatten gegeben, von denen eine (Nr. 1) verschiebbar ist. 1 und 5 sind abgeleitet.

3 ist mit einem Pol eines Induktionsapparates verbunden, dessen anderer Pol abgeleitet ist, sowie mit der Nadel eines Elektrometers. Die Schaltung des letzteren entspricht dem Dynamometer in der Wheatstone'schen Brücke Fig. in 96, 2. Ist Nr. 1 so eingestellt, daß die Nadel ruhig bleibt, so verhalten sich die Kapazitäten (1,2):(2,3) = (4,5):(3,4). Die Einstellung wird mit und ohne dielektrische Platte gemacht. D berechnet sich wie unter 3; die Verschiebung ist $= \delta$. Je größer D, desto empfindlicher wirken Einstellungs-Fehler.

An Stelle des Elektrometers kann man ein Telephon anwenden (Winkelmann).

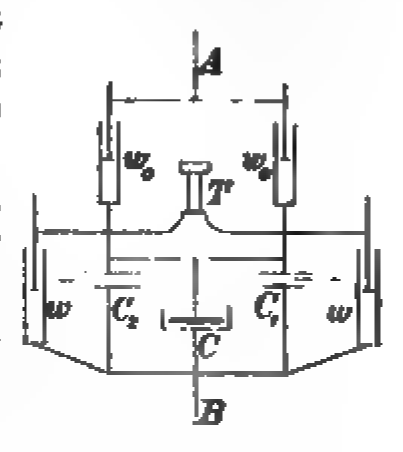
Über Anwendung von nur 3 Platten s. Winkelmann, Wied. Ann. 38, 161. 1889; vgl. jedoch dazu: Cohn, ib. 46, 135. 1892. Über Anwendung des Differentialinduktors: Elsas, ib. 44, 654. 1891.

Die Resultate der obigen Methoden können schon durch Spuren von Leitung erheblich gefälscht werden.

B. Unvollkommene Isolatoren.

5. Mit Kompensation des Leitvermögens (Nernst).

C ist der Versuchskondensator, bestehend aus einer Metallplatte von konstanter Stellung zu dem Boden eines abgeleiteten Metallgefäßes, welches mit der zu untersuchenden Flüssigkeit, mit einer Flüssigkeit von bekannter D-K D_0 (Xylol 2,36; Tab. 36) und endlich mit Luft gefüllt wird. Letzteres geschieht, um die Kapazität der Zuleitungen usw. c zu eliminieren, soweit sie von Kraftlinien herrührt, die außerhalb der Flüssigkeit verlaufen. C_1 ist der Vergleichs-Meßkondensator aus zwei Metallplatten mit einschiebbarer Glasplatte (132, S. 572), C_2 ein konstanter Hilfskondensator. T ist ein Telephon. Bei A und B werden Wechselströme eines kleinen Induktoriums eingeführt.



w_0 und w_0 bedeuten zwei gleiche, gleichgestaltete Widerstände, bei Nernst Flüssigkeitssäulen mit Elektroden. Die Gleichheit wird daran erkannt, daß, wenn das Telephon schweigt, Vertauschung der beiden w_0 keine Änderung bewirkt. w und w sind zwei Flüssigkeitswiderstände, die durch Elektrodenverschiebung oder mittels Verengerung der Säule durch einen verstellbaren Stift geändert werden können; sie sind nur bei der Untersuchung schlecht isolierender Körper nötig. Über die Flüssigkeit in w s. 96, S. 440.

Man schaltet C luftgefüllt zu C_2 und stellt C_1 ein. Man schaltet dann C' zu C'_1 und verstellt C'_1 wieder bis zum Schweigen

des Telephons. Diese Verschiebung mißt das Doppelte der Kapazität c des Kondensators einschl. der Zuleitungen.

Ebenso wird die Kapazität c_f nach Beschickung des Troges mit der Flüssigkeit von der unbekannten D.-K. D gemessen. Hat diese Flüssigkeit ein Leitvermögen, so ist das Telephon zunächst nicht zum Schweigen zu bringen. Man schaltet dann auf der Gegenseite durch Probieren eine solche Länge von $\varkappa$ aus, daß das Tonminimum wieder gut ist. Ein Leitvermögen wie dasjenige eines guten destillierten Wassers ist so noch zu kompensieren.

Gerade so sei nach Füllung des Troges C mit der Eichflüssigkeit D_0 die Kapazität $= c_0$ gefunden. D ergibt sich dann aus der Formel

$$D - 1 = (D_0 - 1) \cdot (c_f - c)/(c_0 - c), \qquad 1.$$

worin man für die c die entsprechenden (ev. der Kalibrierung entsprechend nach S. 572 korrigierten) Verschiebungen in C_1 setzt.

Folgt aus $c = \gamma\, 1 + c'$, $c_f = \gamma \cdot D + c'$, $c_0 = \gamma \cdot D_0 + c'$, wo c' die Kapazität der Zuleitungen bedeutet.

Erdleitung sowie Berührung mit der Hand ist zu vermeiden, Symmetrie und Konstanz der Zuleitungen zu beachten.

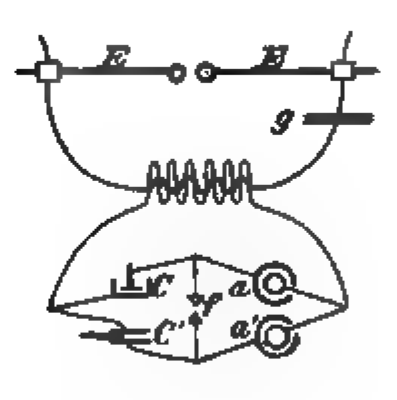
Je nach der Größe der D.-K. kann man Tröge von verschieden großer Luftkapazität anwenden.

Über direkte absolute Messung, über Fehlerquellen und Vorsichtsmaßregeln vgl. Nernst, ZS f phys. Ch 14, 622. 1894; Turner, ib. 35, 385. 1900.

C. Bessere Leiter.

6. Mittels sehr schneller Schwingungen (Nernst).

An die Elektroden E eines Funkeninduktors ist ein Nebenschluß angelegt, der eine Spule (10 Windungen) und einen Glastafelkondensator g enthält. Die bei den Funkenentladungen in diesem Zweige entstehenden elektrischen Schwingungen von einigen Millionen/sek induzieren eine über die Spule geschobene Sekundärrolle (32 Windungen). Diese Rolle dient als Stromquelle in der Brückenverzweigung, deren Zweige a und a' aus ungefähr gleichen Kondensatoren (Leidener Flaschen) bestehen, während C den mit dem zu messenden Dielektrikum zu versehenden Kondensator und C' einen meßbar zu regulierenden Vergleichskondensator (vgl. Nr. 5 und S. 572) vorstellt.



Als Indikator der Stromlosigkeit in der Brücke dient eine Funken-

strecke f zwischen sehr fein einstellbaren, auf einander senkrechten Platinschneiden oder ein elektrolytischer Wellendetektor (**125** II, 8) nebst Telephon.

Stromlosigkeit beweist wieder die Proportionalität der Paare von Brückenzweigen. Man verfährt nun wie unter Nr. 5, füllt C mit Luft, mit einer Eichflüssigkeit und mit der zu messenden Flüssigkeit und rechnet nach Formel 1.

Ein Leitvermögen, wie von einem schlechten destillierten Wasser ($\varkappa \cdot 10^6 = 20$), macht sich noch nicht störend bemerklich.

Über das Nähere vgl. Nernst, Wied. Ann. 60, 600. 1897; Nernst u. v. Lerch, Ann. der Ph. 15, 836. 1904.

7. Aus der Dauer elektrischer Schwingungen.

Wenn ein Kondensator c sich auf einem Wege vom Selbstinduktionskoeffizienten S (**117**) entlädt, so treten zwischen den Kondensatorplatten elektrische Schwingungen von der Schwingungsdauer $\tau = 2\pi\sqrt{cS}$ auf; Anh. 28. τ ist also cet. par. proportional $\sqrt{c}$. Über Erzeugung und Messung der Schwingungen s. Schiller, Pogg. Ann. 152, 535. 1874.

8. Aus der Entladungszeit eines Kondensators.

Die Zeit t, in der die Ladung eines durch einen Widerstand w geschlossenen Kondensators c auf ihren p^{ten} Teil sinkt, ist $t = cw \,\mathrm{lg\,nat}\, p$ (**94** a 5). Mittels des Helmholtz'schen Pendelunterbrechers (**109** III) läßt t sich messen. Cohn und Arons, Wied. Ann. 28, 454. 1886.

II. Durch Kraftwirkungen.

Nach Nr. 8 S. 573 ist die gegenseitige Kraftwirkung zweier auf festem Potential erhaltener Leiter proportional der Diel.-Konstante des Mittels, in welchem sie sich befinden.

9. An einem passend gebauten Quadrantelektrometer in Doppelschaltung (**127** II) beobachtet man die durch ein konstantes Potential (Daniell, Akkumulatoren) hervorgebrachten Ausschläge bei Füllung mit Luft bez. mit der Flüssigkeit. Die auf Proportionalität mit dem Quadrat der Potentialdifferenz korrigierten Ausschläge (**129**) stehen im Verhältnis der D.-Konstanten. Die Nadel ist an einem feinen Metalldraht aufgehängt, der zugleich als Zuleitung dient (Silow).

Bei Spuren von Leitung stört die Polarisation; daher ladet man besser mit Wechselströmen (**96**; Induktionsapparat, rotierender Kommutator) und kann dann selbst Körper wie Alkohol, Wasser, Lösungen bis $\varkappa = 10^{-5}$ messen (Cohn u. Arons). Zur Eliminierung der Schwankungen des Potentials dient ein dem

ersten parallel geschaltetes, gleichzeitig abgelesenes, gewöhnliches Elektrometer. Flüssigkeitsströmungen durch Temperaturschwankungen, Verdampfung usw. sind sorgfältig zu vermeiden.

Silow, Pogg. Ann. 156, 389. 1875; Cohn u. Arons, Wied. Ann. 33, 13. 1888; Tereschin, ib. 36, 792. 1889; Heerwagen, ib. 48, 35. 1892; Smale, ib. 57, 215. 1896.

III. Aus der Länge elektrischer (Hertz'scher) Wellen.

Nach Maxwell ergibt sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit langer el. Wellen in einem Mittel proportional $1/\sqrt{D}$. Ist die Wellenlänge derselben Schwingung in Luft $=\lambda_0$, in dem Dielektrikum $=\lambda$, so gilt also $D=(\lambda_0/\lambda)^2$, oder auch $D=n^2$, wenn n das Brechungsverhältnis langer Wellen aus Luft in das Mittel bedeutet.

Der ursprüngliche Versuch, aus den Beobachtungen an Lichtwellen das Br.-V. für lange Wellen nach den S. 261 gegebenen Formeln zu extrapolieren (wo z. B. in der Cauchy'schen Formel A den gesuchten Wert darstellen würde), hat sich, im Zusammenhange mit der anomalen Dispersion (S. 261), nur an wenigen Körpern als zulässig erwiesen. Selbst im Gebiet der langen Wellen hängt D noch von der Wellenlänge ab — „elektrische Dispersion" —, wenn der Körper auch hier anomale Dispersion besitzt.

Man erzeugt längs einer Doppeldrahtleitung stehende, möglichst homogene Hertz'sche Wellen (125) und bestimmt ihre Länge sowohl in Luft wie im Dielektrikum aus der Beobachtung der Maxima oder Minima der Spannungsschwankung: mittels der an verschiedenen Stellen erhaltenen Fünkchen (Arons u. Rubens), mittels des Bolometers (Rubens, Cohn) oder eines empfindlichen Hitzdrahtinstrumentes (Hertz-Thwing) oder des Aufleuchtens einer Vakuumröhre (Lecher, Drude).

Das Verfahren ist auf Körper von größerem Leitvermögen anwendbar als die übrigen Methoden, z. B. noch auf verdünnte Salzlösungen.

Lecher, Wied. Ann. 41, 850. 1890; 42, 142. 1891; Arons u. Rubens, ib. 42, 581 u. 44, 206. 1891; E. Cohn, ib. 45, 370. 1892; Cohn u. Zeeman, ib. 57, 15. 1896; Drude, ib. 61, 466. 1897; eingehende Beschreibung auch im ZS f. phys. Ch. 23, 267. 1897; Auszug ZS f. Instr. 1898, 351. — Über den Tesla-Transformator vgl. Drude, Ann. der Ph. 8, 336. 1902; ZS f. phys. Ch. 40, 636. 1902.

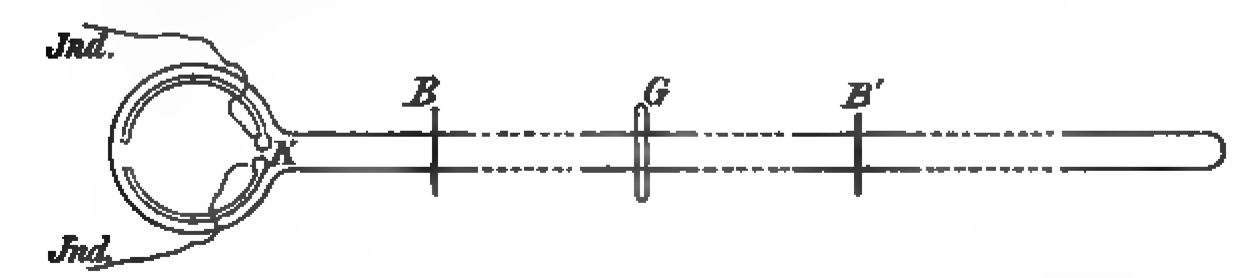
10. Anordnungen von Drude; vgl. 125.

Der Wellenerreger (Blondlot; Fig. folg. S.) besteht aus zwei in Petroleum liegenden Halbkreisen ($2r=5$ cm) aus 3 mm dickem Kupferdraht, je mit einem Pol der Elektrizitätsquelle verbunden. Diese Pole werden entweder direkt von den Polen eines Rühmkorff-Induktors (6 bis 10 cm Schlagweite) gebildet oder wirksamer von den Polen der dünndrähtigen Wicklung (300 Windungen, ½ mm dick, $2r=7$ cm) eines „Tesla-Transformators". Die dicke, symmetrisch durch eine kleine Leidener Flasche (100 qcm Belegung, 2½ mm Glasdicke) geteilte Windungslage des Transformators

(5 Windungen, $1\frac{1}{2}$ mm dick, $2r=11$ cm) liegt an der durch zwei Zinkstücke gebildeten Funkenstrecke (2 mm) des Induktoriums.

Die Zuleitungen zu den Halbkreisen sind dünndrähtig, und zwar sei, falls das Induktorium direkt benutzt wird, einem der Halbkreise die Zuleitung — vgl. auch die Bemerkungen **125** I 1 — nur bis zu $\frac{1}{2}$ mm Abstand genähert, so daß hier Funken überspringen. Die Entladungen finden zwischen den Kugelenden K von 6 mm Durchmesser mit etwa $\frac{1}{2}$ mm Schlagweite statt. Die Halbkreise sind umgeben oder über einer Zwischenlage von Glimmer bedeckt von einem Drahtkreise, dessen offene Enden mit einer hinten geschlossenen Doppeldrahtleitung von etwa 1 cm Abstand verbunden sind. Die so längs der Drähte laufenden elektrischen Wellen haben in Luft etwa 37 cm Halbwellenlänge.

Ein fest aufliegender Querdraht B überbrückt — an der Drude-schen Anordnung 7 cm hinter der Aufbiegung der Drahtleitungen — die beiden Drähte, so daß an dieser Stelle bleibend ein Minimum der stehenden Wellen liegt. Ungefähr 16 cm hinter dieser Brücke liegt auf den Drähten als zweite Überbrückung eine stark evakuierte Geissler'sche oder Zehnder'sche Röhre G; sie leuchtet besonders stark auf, wenn kräftige Schwingungen vorhanden sind, also am stärksten, wenn auf der weiteren Strecke eine Stelle leitend überbrückt wird, der vermöge des Ortes von B und der angewandten Wellenlänge ein weiteres Minimum zukommt. Diese Minima sollen also in Luft nahe um ein Vielfaches von 37 cm von einander abstehend gefunden werden; das erste liegt aber von der Brücke B etwas (bei dem Drude'schen Apparat um 6 cm) weniger entfernt.



Als verschiebbare Brücke dient ein zweiter Querdraht B' über einem Maßstabe. Beobachtet werden also die Lagen von B', denen das stärkste Aufleuchten entspricht, bez. die Mitten zwischen den Übergangsstellungen, bei denen das Aufleuchten beginnt. Der Abstand benachbarter Lagen bezeichnet je eine halbe Wellenlänge.

a) Man bestimmt die Halbwellenlänge in Luft (λ_0) und demnächst in der zu messenden Flüssigkeit (λ), indem die Drähte durch einen mit dieser gefüllten Glastrog durchgeführt werden. Nach dem früheren ist dann $D=(\lambda_0/\lambda)^2$. λ_0 und λ werden aus mehreren solchen Resonanzlagen abgeleitet, ev. unter Anwendung der Berechnung nach **3** II.

Auch die Stellen schwächsten Leuchtens können in leicht ersichtlicher Weise zur Messung zugezogen werden.

Korrektion wegen des begrenzten Flüssigkeitsquerschnitts. Das gemessene λ fällt wegen der beschränkten Querdimensionen etwas zu groß aus; das hiermit berechnete D ist also zu vergrößern. Die empirische Korrektion (Drude) beträgt

für ein gefundenes $D =$	10	20	30	40	50	60	80
im Kasten $8 \times 3{,}5$ cm	+0,8	1,9	2,8	3,3	3,6	3,8	+4,0%
„ „ 5×6 cm			+0,5				+2,1%.

Über Vorsichtsmaßregeln bei besseren Leitern oder anomal absorbierenden Körpern vgl. Drude l. c.

b) Genäherte Werte von D erhält man mit sehr wenig Flüssigkeit nach Drude folgendermaßen. Die Flüssigkeit wird in einen kleinen Kondensator (s. unten) eingefüllt. Die an den Enden jetzt offene Doppelleitung wird (außer durch den festen Bügel B) geschlossen durch eine Überbrückung, einmal mit einem Metalldraht, das andere Mal mit diesem Kondensator. In beiden Fällen stellt man so, daß die Röhre G maximal aufleuchtet; aus dem Unterschied l der beiden Einstellungen läßt sich D entnehmen, entweder nach einer rein empirischen, nachher graphisch dargestellten Eichung mit bekannten Flüssigkeiten, etwa Mischungen von Benzol mit Aceton ($D = 2{,}3$ bis 20) oder Aceton mit Wasser ($D = 20$ bis 60); Tabellen bei Drude l. c. Oder man benutzt die von Drude aufgestellte Beziehung $D = a \operatorname{ctg} 2\pi l/\lambda - b$, deren Konstanten a und b empirisch ermittelt werden.

1. 2.

Zwei Kondensatorfläschchen (Fig. nat. Gr.) verschiedener Kapazität, bis in den Hals zu füllen, genügen. Nr. 1 dient für große, 2 für kleine D.-K.

Auch flüssig eingefüllte, in dem Fläschchen erstarrte Substanzen können, wenigstens annäherungsweise, bestimmt werden.

Eine bequeme Anordnung mit posaunenartig meßbar zu verlängernder Doppelleitung siehe bei Drude l. c.

Über Messungen an Kristallen vgl. u. a. noch Curie, Ann. chim. phys. (6) 17, 385. 1889; 18, 212 usw. 1889; Graetz u. Fomm, Wied. Ann. 53, 85. 1894; Fellinger, Ann. der Ph. 7, 333. 1902; W. Schmidt ib. 9, 919. 1902; 11, 114. 1903.

Über Gase und Dämpfe s. besonders Boltzmann, Pogg. Ann. 155, 403. 1875; Klemenčič, Wien. Sitzber. 91 (2a), 712. 1885; Lebedew, Wied. Ann. 44, 289. 1891.

Anhang.

Das auf Längen-, Massen- und Zeiteinheit zurückgeführte „absolute“ Maßsystem mit Anschluß einiger Gesetze und Erläuterungen.

Um einen Gegenstand, einen Vorgang oder Zustand physikalisch zu beschreiben, ist seine Art und Größe anzugeben. Dies geschieht durch eine Zahl, welche ausdrückt, wie oft eine anderweitig definierte Größe derselben Art, die Einheit, in der zu beschreibenden Größe enthalten ist.

Als Einheit einer Größe genügt jede unveränderliche Größe derselben Art. Als Einheiten dienen für die Länge und für die Masse die international vereinbarten, durch das Wasser mit einander in Beziehung gesetzten Einheiten des Meter-Gramm-Systems, für die Zeit die Umdrehungsdauer des Erdkörpers, für die Temperatur das Intervall zwischen den Umwandlungspunkten der Aggregatzustände des Wassers.

Solche als unveränderlich zu verbürgende, willkürliche Grundeinheiten lassen sich aber nur für wenige Größen aufstellen. Eine vollständige Maßkunde gibt es erst, seitdem man gelernt hat, die Einheiten der übrigen Größen mittels geometrischer, kinematischer und physikalischer Beziehungen auf wenige Grundeinheiten zurückzuführen, z. B. eine Geschwindigkeit auf Länge und Zeit, eine Kraft auf Geschwindigkeit und Masse, eine Wärmemenge auf den Temperaturgrad und das Wasser oder auf die äquivalente Arbeit und hierdurch auf Kraft und Länge, eine Elektrizitätsmenge auf die von ihr auf eine andere Menge ausgeübte Kraft.

Die Einführung dieser „abgeleiteten“ Einheiten bietet nicht nur den Vorteil, daß die Anzahl der willkürlichen Einheiten eingeschränkt wird, sondern sie dient zugleich dazu, dem mathematischen oder physischen Gesetz, welches zur Definition der Einheit gebraucht wird, eine einfache Gestalt zu geben. Denn jede Ableitung einer Einheit läßt sich benutzen, um die „Konstante“, welche in einem Gesetz die verschiedenen Größenarten ver-

bindet und deren Zahlenwert eben von den Einheiten abhängt, auf den bequemsten Zahlenwert zu bringen.

Der von einem bewegten Körper zurückgelegte Weg l ist der Geschwindigkeit u und der Zeit t proportional, also l = Const. ut, wo der Zahlenwert Const. von den Einheiten abhängt. Würde als Geschwindigkeits-Einheit die Fall-Geschwindigkeit g am Ende der ersten Sekunde gelten, so wäre Const. $= g$. Setzt man aber als Einheit die Geschwindigkeit, bei welcher in der Zeit Eins der Weg Eins zurückgelegt wird, so ist Const. $= 1$, und das Gesetz erhält die einfachste Gestalt $l = ut$.

Das System der abgeleiteten Einheiten hat sich an den elektrischen und magnetischen Größen entwickelt, weil für die meisten von diesen die Aufbewahrung von Grundmaßen unmöglich ist. Gauſs und Weber zuerst führten diese Größen auf Länge, Masse und Zeit zurück. Das so entstehende System heißt wohl das absolute[1]) Maßsystem. Und zwar werden vorzugsweise Centimeter, Gramm und Sekunde als Grundeinheiten gewählt, und die hierauf zurückgeführten Einheiten heißen [cm-gr-sek]- oder CGS-Einheiten. Werden, um kleinere oder größere Einheiten zu erhalten, für Länge und Masse anstatt cm, gr andere Paare von Grundeinheiten vorgezogen, so bieten die Gauſs'schen Grundeinheiten mm, mg oder andrerseits dm, kg oder endlich m, Tonne den Vorteil, daß ihr Zusammenhang durch das Wasser gewahrt bleibt.

Das Gramm ist hier als Masse von 1 cm^3 Wasser gemeint, während der gewöhnliche Sprachgebrauch unter Gramm usw. ein Gewicht, d. h. eine Kraft zu verstehen pflegt. Im CGS-System hat ein Körper von m gr das Gewicht nicht $= m$, sondern $= gm$, unter g die Schwerbeschleunigung verstanden. Die bei seiner Hebung um die Höhe h verrichtete Arbeit ist $= ghm$, das von ihm durch seine Schwere im Abstande l von einer Drehaxe ausgeübte Drehmoment $= glm$ zu setzen. Dagegen ist im letzteren Falle das Trägheitsmoment des Körpers, welches im statischen Maßsystem gleich l^2m/g sein würde, hier gleich l^2m.

1) Der Name „absolut" stammt von der erdmagnetischen Intensität. Im Gegensatze zu der früher üblichen nur relativen Messung gab Gauſs in seiner *Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata* eine durch die Einheiten von Länge, Masse und Zeit definierte absolute Einheit für die Intensität. Ein weiter gehender Anspruch wird mit dem Worte „absolut" nicht erhoben.

Gauß hatte in seinem ersten diesbezüglichen Aufsatz (Erdmagnetismus und Magnetometer, Schumacher's Jahrbuch 1836; Gauß' Werke Bd. 5, S. 329) den Magnetismus mittels des Grammes als einer Kraft-Einheit definiert, ist jedoch alsbald zu der Auffassung des Grammes als Masse übergegangen. Zweifellos war dieser für Physik und Technik so bedeutsam gewordene Schritt gerechtfertigt.

Denn da das Gewicht eines Körpers auf der Wechselwirkung mit einem anderen Körper beruht und daher schlechthin gar nicht existiert, da es ferner selbst an der Erdoberfläche um $^1/_2$ % veränderlich ist, so kann man nicht das Gewicht eines bestimmten Körpers als Gewichtseinheit aufstellen. Genaue Gewichtseinheiten müßten mindestens für jede geographische Breite besonders angefertigt werden. Was man mit dem Namen „Gewichtsatz" bezeichnet, ist aber nichts anderes als ein Massensatz; und eine Wägung mit der gewöhnlichen Wage ist keine Gewichts-, sondern eine Massenbestimmung, die auch in der Tat fast immer den Zweck der Wägung bildet. Der Chemie, dem Handelsverkehr, der Medizin ist es nicht um den Druck der Körper auf ihre Unterlage zu tun, sondern um die Masse, durch welche die chemische Wirksamkeit, der Geld- oder der Nahrungswert usw. bedingt wird.

Innerhalb der Physik ist die Auffassung des Grammes usw. als Masse größtenteils durchgeführt. Die Gebiete, in denen die geographische Veränderlichkeit des Gewichts hinter andere Fehlerquellen zurücktritt und wo aus Bequemlichkeit der frühere Gebrauch sich erhalten hat, wie Elastizität, Kapillarität, auch wohl Druck und Arbeitsleistung, werden immer mehr eingeschränkt. In solchen Fällen der Beibehaltung des „statischen" Maßsystems wird die Einheit als Grammgewicht usw. bezeichnet.

Dimensionen. Einheiten, die aus anderen abgeleitet sind, stellen sich vermöge des Gesetzes, welches zur Ableitung benutzt worden ist, als Funktionen ihrer Grundeinheiten dar, die Einheiten des „absoluten" Maßsystems also als Funktionen von Längeneinheit $[l]$, Masseneinheit $[m]$ und Zeiteinheit $[t]$, z. B. die Geschwindigkeitseinheit als $[l]:[t]$, die Volumeinheit als $[l]^3$, die Krafteinheit als $[l]\,[m]:[t]^2$. Diese Abhängigkeit soll in der Form $[lt^{-1}]$, $[l^3]$, $[lmt^{-2}]$ usw. dargestellt und den Einheiten aller Größenarten zugesetzt werden. Der Exponent von l, m oder t heißt die „Dimension" der Größenart bezüglich Länge, Masse oder Zeit. Siehe Tab. 41.

Der Begriff der „Dimension", bereits von Fourier aufgestellt, schließt sich in seiner sehr nützlichen Einführung in das Meßwesen an Maxwell und Jenkin an (Reports Brit. Assoc. 1863; Sonderabdruck: Reports of the Comm. on el. Standards, London 1873, S. 59). Er rechtfertigt sich durch die Erwägung, daß eine Gleichung zwischen benannten Größen nicht nur aussagt, daß ihre linke und rechte Seite dem Zahlenwerte, sondern auch

daß sie der Größenart nach gleich sind. Man kann nicht 1 Glas Wasser = 1 Glas Wein setzen; bei der Anwendung des = Zeichens müssen nicht nur die Gläser gleich groß sein, sondern es müssen entweder beide Wasser oder beide Wein enthalten.

Eine benannte Zahl stellt nun das Produkt aus der reinen Zahl und der ihr zugesetzten Einheit vor; l cm bedeutet $l \times$ die als Längeneinheit angenommene Länge des Centimeters. Drückt man jetzt z. B. das Galilei'sche Gesetz so aus: empfängt eine Masse m in einer Zeit t eine Geschwindigkeit u, so wirkt auf die Masse eine Kraft $k = m \cdot u/t$, so heißt dies nicht nur, daß k und mu/t numerisch gleich sind, sondern daß k Krafteinheiten gleich gesetzt werden m Masseneinheiten mal u Geschwindigkeits- durch t Zeiteinheiten; $[k] = [m][u][t]^{-1}$. Da nun ferner bei der Zurückführung der Geschwindigkeit auf Länge und Zeit $[u] = [l][t]^{-1}$ erhalten wird, so entsteht

$$[k] = [m]\,[l]\cdot[t]^{-2} = [m]^1\cdot[l]^1\cdot[t]^{-2}.$$

In ohne weiteres verständlichen Worten drückt man dies so aus: Die Krafteinheit hat bezüglich der Massen- und der Längeneinheit die Dimension +1, bezüglich der Zeiteinheit die Dimension −2.

Es steht auch frei, zu sagen, eine Kraft hat bezüglich Länge, Masse und Zeit die Dimensionen 1, 1 und −2.

Gegen das vorige wird eingewendet, daß die Multiplikation benannter Größen mit einander keinen ersichtlichen Sinn hat. Wenn dieser Einwand berechtigt wäre, so dürfte man Gleichungen, welche zu Produkten aus solchen Größen führen, überhaupt nicht aufstellen. Dadurch, daß dieses Multiplizieren aber niemals zu einem Widerspruch führt, beweist die Erfahrung, daß ihm in der Natur ein Sinn innewohnt.

Den Dimensionen einer Größenart kommt aber nicht eine absolute, ein für allemal bestimmte Bedeutung zu, sondern sie hängen im allgemeinen davon ab, welches Naturgesetz zur Ableitung der Einheit benutzt wird. Eine Elektrizitätsmenge e z. B. stellt sich, elektrostatisch aus dem Coulomb'schen Gesetz abgeleitet, dar als $[e_s] = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$, elektromagnetisch aber, etwa aus dem Biot-Savart'schen Gesetz abgeleitet, als $[e_m] = [l^{1/2} m^{1/2} t^0]$. Die Dimensionen drücken also die gegenseitigen Beziehungen der Größenarten nur in dem gewählten Maßsystem aus, welches demnach in einer zusammenhängenden Betrachtung konsequent durchgeführt werden muß.

In dem eben angezogenen Falle hat übrigens die Vergleichung der Dimensionen von e_s und e_m zu einem fundamentalen Ergebnis geführt. Die Division der beiden Formeln ergibt $[e_s/e_m] = [l/t]$; das Verhältnis der für eine Elektrizitätsmenge in den beiden Systemen entstehenden Ausdrücke hat also die Dimensionen einer Geschwindigkeit, deren Zahlenwert (300 10^8 cm/sek; vgl. Nr. 24) nun tatsächlich als „kritische Geschwindigkeit v" oder in der Maxwell'schen elektromagnetischen Lichttheorie als die Lichtgeschwindigkeit im Äther auftritt.

Die Dimensionen sind wertvoll als einfachstes Prüfungsmittel von Formeln auf eine Eigenschaft, welche bei einer richtigen Formel immer vorhanden sein muß, nämlich auf die Homogenität. Wenn man nämlich die in der Formel vorkommenden Größenarten durch ihre Dimensionen aus einem bestimmten Maßsystem ersetzt, so muß links und rechts dasselbe entstehen.

Z. B. beträgt die Arbeit, welche von einem elektrischen Strome i, dessen Potentialdifferenz $= E$ ist, in der Zeit t verrichtet wird, $Q = Eit$. Die Dimensionen (Tab. 41) aus dem elektromagn. System eingesetzt, erhält man $Eit = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}] \cdot [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] \cdot [t] = [l^2 m t^{-2}]$; aus dem elektrostatischen System $[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]\ [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}] \cdot [t] = [l^2 m t^{-2}]$, also in beiden Fällen die Dimension einer Arbeit (vgl. Nr. 9). — Ferner hängt die Schwingungsdauer t einer Masse vom Trägheitsmoment K mit der Direktionskraft D durch die Gleichung zusammen $t^2 : \pi^2 = K : D$. Setzt man, nach 12, $K = [l^2 m]$ und nach 11a $D = [l^2 m t^{-2}]$ ein, so entsteht rechts $[l^2 m] : [l^2 m t^{-2}] = [t^2]$, wie es sein muß, da π eine reine Zahl ist.

Die Dimension ermöglicht ferner sofort den Übergang von einer Gruppe von Grundeinheiten, etwa mm, mg, zu einer anderen, etwa cm, gr. Denn wenn die abgeleitete Einheit eine Grundeinheit zur p^{ten} Potenz enthält, so ändert sich, sobald die Grundeinheit im Verhältnis n geändert wird, die abgeleitete Einheit im Verhältnis n^p. Der Zahlwert einer in dieser Einheit ausgedrückten bestimmten Größe wird hierdurch also gegen früher im Verhältnis n^{-p} geändert.

Die Zahl, welche eine Geschwindigkeit l/t darstellt, wird bei dem Übergang von mm zu cm im Verhältnis 10^{-1} geändert, beim Übergang von Sekunde zu Minute im Verhältnis 60^{+1}. Die Zahl für eine Kraft $[lm/t^2]$ ändert sich, wenn man von mm-mg zu cm-gr übergeht, im Verhältnis $10^{-1}\ 1000^{-1} = 1/10000$ (Tab. 41).

Auch für das technische elektromagnetische Maßsystem, welches mit den Benennungen Ohm, Ampere, Volt, Farad usw. Einheiten für Widerstand, Stromstärke, Spannung, Kapazität usw. enthält, gibt es ein System von Grundeinheiten, nämlich, außer der Sekunde als Zeiteinheit, den Erdquadranten $= 10^9$ cm als Längeneinheit und 10^{-11} gr als Masseneinheit. Stellt eine abgeleitete Größenart sich dar als $[l^\lambda \cdot m^\mu \cdot t^\tau]$, so ist also die Einheit im technischen Maßsystem im Verhältnis $10^{9\lambda}\ 10^{-11\mu}$ größer als im CGS-System.

Z. B. ist eine Stromstärke $= [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$; also die Einheit Ampere $= 10^{9/2} \cdot 10^{-11/2} = 10^{-1}$ CGS-Stromeinheiten (vgl. Nr. 24). — Die Arbeits-

einheit ist $=[l^2mt^{-2}]$; also ist 1 Volt-Ampere-Sek. oder Watt-Sek. oder „Joule" gleich $10^{18} \cdot 10^{-11} = 10^7$ CGS-Arbeitseinheiten (vgl. Nr. 30).

Die Vorsätze **Mega-** oder **Mikro-** (z. B. Megohm oder Mikrofarad) bedeuten 10^6mal größere oder kleinere Einheiten.

Einheiten aus Raum und Zeit.

Die am Schluß jeder Definition in [ ] gegebenen Ausdrücke bedeuten die Einheit im CGS-System.

1. **Fläche** $f=[l^2]$. Einheit ist das Quadrat über der Längeneinheit; [cm²].

2. **Raum** $v=[l^3]$. Einheit ist der Würfel über der Längeneinheit; [cm³].

3. **Winkel** $\varphi=[l^0]$. Einheit ist der Winkel, dessen Bogen gleich dem Halbmesser ist; [Winkel von 57,296 Bogengraden].

Ein Winkel wird in der Mechanik gleich dem zugehörigen Kreisbogen, geteilt durch den Halbmesser, gesetzt. Ein kleiner Winkel ist also seinem Sinus oder seiner Tangente numerisch gleich. — Dimension $=l/l=1$, d. h. von den Grundeinheiten unabhängig.

4. **Geschwindigkeit** $u=[lt^{-1}]$. Die Geschwindigkeit Eins besitzt ein Punkt, der in der Zeiteinheit die Längeneinheit zurücklegt; [cm/sek].

Geschwindigkeit ist der zurückgelegte Weg geteilt durch die zum Zurücklegen gebrauchte Zeit.

5. **Beschleunigung** $b=[lt^{-2}]$. Einheit ist die Beschleunigung, bei welcher die Geschwindigkeit in der Zeiteinheit um Eins wächst; [cm/sek²].

Wächst die Geschwindigkeit in der Zeit t um die Größe u, so besitzt das bewegte Ding eine Beschleunigung $b=u/t$. — Die Fallbeschleunigung beträgt unter 45° geogr. Breite 980,6 cm/sek² oder 9,806 m/sek².

Mechanische und Wärme-Einheiten.

6. **Dichtigkeit** $s=[l^{-3}m]$. Die Einheit besitzt ein Körper, der in der Raumeinheit die Masse Eins hat; [gr/cm³ oder Wasser von + 4°][1]).

7. **Kraft** $k=[lmt^{-2}]$. Einheit ist die Kraft, welche der Masse Eins in der Zeit Eins die Geschwindigkeit Eins mitteilt; [cm gr/sek² = 1 Dyne = 0,001020 gr-Gew.].

Das Grundgesetz der Mechanik sagt, daß eine Kraft k, welche einer Masse m in der Zeit t eine Geschwindigkeit u erteilt, mit den Größen m und u im direkten, aber mit t im umgekehrten Verhältnis steht; also

---

1) Genauer hat Wasser von 4° in diesem Sinne 0,99997.

heißt das Gesetz vollständig $k = C \cdot m \cdot u/t$. Man sagt aber stets: die Kraft ist gleich Masse×Beschleunigung, setzt also $C = 1$. Damit hat man gefordert, daß für m, u und t gleich 1 auch $k = 1$ sei. — Die durch die Anziehung der Erde auf 1 gr ausgeübte Kraft beträgt hiernach unter 45° geogr. Br. 980,6 cm·gr·sek^{-2}. Eine „Dyne" (Clausius) ist also ein wenig größer als die Anziehung der Erde auf 1 mg.

8. Druck $p = [l^{-1} m t^{-2}]$. Einheit ist der Druck, bei welchem auf die Flächeneinheit die Kraft Eins kommt; [gr/(cm sek^2) oder Dyne/cm^2 = 0,9869·10^{-6} Atmosph.].

Sind Kräfte gleichmäßig über eine Fläche verteilt, so nennt man Druck die auf die Flächeneinheit (senkrecht) wirkende Kraft. — Eine Flüssigkeit von der Dichtigkeit s übt in der Tiefe h cm unter der ebenen Oberfläche den Druck ghs cm^{-1} gr sek^{-2} oder Dyne/cm^2 aus, wo für 45° Breite $g = 980{,}6$ ist. — Der Druck von 1 cm Quecksilber ist = 13,596 980,6 = 13332 und 1 Atm = 76·13332 = 1013200 Dyne/cm^2.

9. Arbeit, Energie, lebendige Kraft, Wärmemenge $Q = [l^2 m t^{-2}]$. Einheit der Arbeit ist die Arbeit, welche die Kraft Eins verrichtet, wenn sich ihr Angriffspunkt nach ihrer Richtung um die Längeneinheit verschiebt; [cm^2 gr/sek^2 = 1 Erg = 1,020·10^{-8} Meterkilogrammgewicht = 2,39·10^{-8} Wasser-gr-Kal.].

Allgemein ist Arbeit = Kraft×Weg; $Q = kl$. Sind Kraft- und Wegrichtung gegeneinander um den Winkel φ geneigt, so tritt $\cos\varphi$ als Faktor hinzu. — Durch Hebung von 1 kg um 1 m (Meterkilogrammgewicht des statischen Maßsystems) wird die Arbeit 1000·981·100 = 98100000 Erg geleistet. — Die elektrotechnische Arbeitseinheit „Wattsekunde" oder „Joule" ist = 10^7 Erg; vgl. Nr. 30.

Eine Volumvermehrung v unter dem konstanten Druck p bedeutet eine äußere Arbeit $Q = vp$. Ist der Druck als h cm Quecksilber gemessen, so ist also $Q = 13332\, vh$ Erg. Eine Kubikcentimeter-Atmosphäre entspricht $Q = 13332 \cdot 76 = 1013200$ Erg; vgl. Nr. 8.

Arbeitsfähigkeit oder potentielle Energie eines Körpers oder eines Systemes ist die Arbeitssumme, die der Körper oder das System durch Verschiebung unter dem Einfluß der wirkenden Kräfte leisten kann.

Gleichwertig mit Arbeit ist die lebendige Kraft, Bewegungs- oder kinetische Energie $\frac{1}{2} m u^2$ einer Masse m, welche eine Geschwindigkeit u besitzt.

$m \cdot u^2 = [m l^2 t^{-2}]$ hat die Dimensionen der Arbeit.

9a. Wärmemenge Eins ist die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge; [1 Erg; vgl. oben].

Das mechanische Äquivalent der Wasser-gr-Kalorie beträgt in Hubarbeit 427 gr-Gew.×m, also 427·980,6·100 = 41900000 cm^2 gr sek^{-2} oder Erg = 4,19 „Wattsekunden" oder „Joule". Der reziproke Wert 239·10^{-10} ist das Wärmeäquivalent der CGS-Arbeitseinheit oder des Erg in gr-Kal.

Arbeit bei der Wärmeausdehnung eines Gases. Ein Gasvolumen v werde bei konstantem Druck p von der absoluten Temperatur T auf $T+1$ erwärmt. Die Ausdehnung ist $=v/T$, die äußere Arbeit also $=p\,v/T$, nach dem Mariotte-Gay-Lussac'schen Gesetze für eine gegebene Gasmenge eine konstante Größe, die man für 1 gr eines Gases mit R und mit dem Namen (individuelle) **Konstante des Gases** bezeichnet. Es ist also $R=p/(s\,T)$, wenn s die zu p und T gehörende Dichtigkeit des Gases (Tab. 12a) ist, für Luft z. B. $R=1013200/(0{,}001293\cdot 273)$ $=2\,870\,000$ cm^2 gr/sek^2

Allgemeine Gaskonstante; Arbeit bei der Vergasung. Werden die Größen nicht auf 1 gr, sondern auf 1 gr-Molekül (1 „Mol") des Gases bezogen, so verliert die Gaskonstante ihren individuellen Charakter, denn jedes gr-Molekül eines vollkommenen Gases oder Dampfes (z. B. 32 gr Sauerstoff oder 2,016 gr Wasserstoff) hat cet. par. ein gleiches Volumen, nämlich bei 0° und 1 Atm 22412 cm^3, bei der abs. Temp. T und dem Drucke p CGS also $22412\cdot 1013200/p\cdot T/273{,}09 = 83\,150\,000\,T/p$ cm^3 (Avogadro'sches Gesetz)[1]. Die bei der Vergasung eines gr-Moleküls unter Gleichgewichtsdruck bei der Temperatur T geleistete **äußere Arbeit** beträgt also $8315\cdot 10^4\,T$ Erg, und die hierzu verbrauchte Wärmemenge ist also $8315\cdot 10^4\,T/(419\cdot 10^5) = 1{,}985\cdot T$ Wasser-gr-Kal. 1,985 (öfters = 2 gesetzt) bedeutet hiernach die allgemeine, auf das gr-Molekül bezogene Gaskonstante in kalorischem Maße. — Dieselbe Zahl gilt für Stoffe, die in Lösung gehen und deren „osmotischer Druck" den Gasgesetzen folgt (van't Hoff).

Bei einem vollkommenen, d. h. bei einem Gase, in welchem die Ausdehnung nicht von einer inneren Arbeitsleistung begleitet ist, stellt die Differenz $c_p - c_v$ der spezifischen Wärmen c_p bei konstantem Drucke und c_v bei konstantem Volumen die Wärmemenge dar, welche bei der Ausdehnung der Gasmenge Eins unter konst. Drucke durch 1° Temp.-Erhöhung auf äußere Arbeit verwendet wird. 1,985 ist also gleich jener Differenz, bezogen auf die Erwärmung eines Grammmoleküls.

Zweiter Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie (Clausius). Ein Körper oder ein System von Körpern durchlaufe einen vollkommenen, umkehrbaren thermodynamischen Kreisprozeß und nehme dabei die in Arbeitsmaß ausgedrückte Wärmemenge Q bei der abs. Temperatur T auf und gebe Q' bei T' ab. Dann ist erstens $Q-Q'$ die von ihm geleistete äußere Arbeit oder die in Arbeitsmaß ausgedrückte, in Arbeit umgesetzte Wärmemenge; zweitens gilt

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{T}{T'} \quad \text{oder} \quad \frac{Q-Q'}{Q} = \frac{T-T'}{T}.$$

9b. Die absolute Temperaturskale. Vollkommen läßt die Temperatur sich nicht auf die anderen Größen zurückführen; ein Punkt der Skale muß willkürlich positiv numeriert werden. Nachdem dies geschehen ist,

1) Die Zahlen 22412 u. 273,09 entsprechen dem idealen Grenzzustande der Gase; vgl. die Zusammenstellung von D. Berthelot, ZS Elektroch. 1904, 621.

liegt aber durch die Anerkennung des zweiten Hauptsatzes (v. S.) die ganze Skale fest. Ein Punkt der Skale — z. B. der Siedepunkt des Wassers — werde mit der Zahl T_1 numeriert. Bei dieser Temperatur nehme eine Maschine, die mit vollkommenem Kreisprozeß zwischen T_1 und einer anderen zu bestimmenden Temperatur T_2 — z. B. dem Eispunkt des Wassers — arbeitet, eine Wärmemenge auf und verwandele hierbei den, durch einen Versuch ermittelten Bruchteil n dieser Menge in mechanische Arbeit. Dann gilt nach dem vorigen $n = (T_1 - T_2)/T_1$, also ist hierdurch $T_2 = T_1(1-n)$ bestimmt. Jeder andere Punkt kann durch einen ihm entsprechenden Versuch festgelegt werden (W. Thomson 1848). Die Temperatur, welche als untere Grenze des Kreisprozesses alle Wärme in mechanische Arbeit verwandeln läßt, ist der absolute Nullpunkt.

Diese Definition ist identisch mit der gebräuchlicheren Form: wenn einem vollkommenen Gase (vgl. 18 und 42) bei den Temperaturen T und T' unter gleichem Drucke die Volumina v und v' oder bei gleichem Volumen die Drucke p und p' zukommen, so verhält sich $T':T = v':v$ oder $= p':p$. Denn diese Proportion führt, auf einen vollkommenen, mit dem Gase vorgenommenen Kreisprozeß angewandt, zu der erstgenannten als Folgerung. Grundsätzlich ist die erste Definition vollkommener, weil über den Gaszustand eines Körpers von vorn herein nichts sicheres ausgesagt werden kann.

10. Leistung $L = [l^2 m t^{-3}]$. Die Einheit der Leistung liegt vor, wenn in der Zeiteinheit die Arbeit Eins verrichtet wird; [$cm^2 gr/sek^3$ = Erg/sek = 10^{-7} Watt = $136 \cdot 10^{-12}$ Pferdestärke].

Leistung nennt man die in der Zeiteinheit getane Arbeit. 1 Watt = 10^7 CGS; 1 Pf-Stärke = 75 kg-Gew. m/sek = $736 \cdot 10^7$ CGS.

10a. Wärmeleitvermögen. Das W.-L. Eins hat ein Körper, wenn bei einem Temperaturgefälle Eins durch den Querschnitt Eins in der Zeiteinheit die Wärmemenge Eins senkrecht hindurchfließt; [cm gr/(sek^3 × Grad)].

Die Einheit ist, weil die, nicht auf Länge, Masse und Zeit zurückgeführte Temperatur eingeht, nicht in das CGS-System einzureihen. — Messung der Wärmemenge in Wattsekunden bez. in Wasser-gr-Kalorien macht die Zahl für das W.-L. 10^7 mal, bez. $419 \cdot 10^5$ mal kleiner, als in CGS.

11. Drehmoment $P = [l^2 m t^{-2}]$. Das D.-M. Eins wird dargestellt durch die Kraft Eins, welche senkrecht am Hebelarm Eins angreift; [$cm^2 gr/sek^2$ = Dyne × cm = 0,00102 gr-Gew. × cm].

Die Kraft k am Hebelarm l erzeugt das D.-M. $P = k \cdot l$.

11a. Direktionskraft $D = [l^2 m t^{-2}]$.

Diese mißt die Stabilität der Gleichgewichtslage eines um eine Axe drehbaren Körpers. Ablenkung aus der Gleichgewichtslage um den kleinen Winkel φ erzeugt ein mit φ proportionales Drehmoment P. Das konstante Verhältnis $P/\varphi = D$ heißt Direktionskraft.

Die D.-K. eines Pendels von der Masse $m = 1$ kg im Abstande $l = 1$ m von der Drehaxe beträgt $100 \cdot 1000 \cdot 981 = 98\,100\,000$ $cm^2\, gr\, sek^{-2}$, denn das Drehmoment für einen kleinen Ablenkungswinkel φ ist $= lmg \cdot \varphi$.

Die von der Schwere ausgeübte D.-K. einer bifilaren Aufhängung (27a) von dem Fadenabstande 10 cm, der Fadenlänge 200 cm, der Masse 1000 gr ist $\frac{1}{4} \cdot 10 \cdot 10/200 \cdot 1000 \cdot 980{,}6 = 122600$ CGS.

12. Trägheitsmoment $K = [l^2 m]$. Die Einheit wird dargestellt durch die Masse 1 gr im Abstande 1 cm von einer Drehaxe; [cm² gr].

Das T.-M. einer Masse m im Abstand l von einer Drehaxe ist $K = l^2 m$;

29. Das T.-M. des Pendels unter 11a ist also $100^2 \cdot 1000 = 10^7$ cm² gr.

Drehmoment durch T.-M. gibt die Winkelbeschleunigung.

T.-M. K, Direktionskraft D und einfache Schwingungsdauer t hängen durch die Gleichung $t^2/\pi^2 = K/D$ zusammen.

13. Elastizitätsmodul $\eta = [l^{-1} m t^{-2}]$. Die Einheit des E.-M. würde ein Körper haben, der in Stabform vom Querschnitt Eins sich durch eine dehnende Kraft um einen dieser Kraft numerisch gleichen Bruchteil verlängert. [gr/(cm sek²) $= 1{,}020 \cdot 10^{-8}$ kg-Gew./mm²].

Die (relativ kleine) Verlängerung eines Stabes von l cm Länge und q cm² Querschnitt durch eine dehnende Kraft von k Dynen beträgt $1/\eta \cdot kl/q$. — $\sqrt{\eta/s}$ gibt die Schallgeschwindigkeit, wenn s die Dichte ist.

Die praktisch gebrauchten Elastizitätsmoduln kg-Gew./mm² sind mit $1000 \cdot 981 \cdot 100 = 98100000$ zu multiplizieren, um für das CGS-System zu gelten. Vgl. 52.

13a. Kapillarkonstante, 13b. Reibungskoeffizient und 13c. Diffusionskonstante; s. 58 bis 58b.

Elektrostatische Einheiten.

14. Elektrizitätsmenge $\varepsilon = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. „Elektrostatische" oder „mechanische" Einheit der E.-M. ist die Menge, welche eine ihr gleiche Menge aus der Entfernung Eins mit der Kraft Eins abstößt; [cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$/sek $= 333 \cdot 10^{-12}$ Amperesekunde oder „Coulomb" vgl. 25]

Diese Einheit fordert also, auf das Coulomb'sche Gesetz angewandt, daß die Kraft k einer El.-Menge ε auf eine andere ε' aus dem Abstande l cm $k = \varepsilon\varepsilon'/l^2$ Dynen wird.

Die Dimensionen ergeben sich folgendermaßen: Wenn eine E.-M. ε eine gleiche Menge aus der Entfernung l mit der Kraft k abstößt, so ist $\varepsilon = l\sqrt{k}$. Die Dimensionen von k sind durch $[l m t^{-2}]$, die von ε also durch $[l][l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$ gegeben.

14a. Elektrische Flächendichte $\sigma = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Dichte ist gleich Eins, wenn auf die Flächeneinheit die El.-M. Eins kommt; [cm$^{-1/2}$ gr$^{1/2}$ sek^{-1}].

14b. Elektrische Feldstärke $\mathfrak{F}=[l^{-1/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Die an einem Orte auf die El.-Menge Eins ausgeübte Kraft heißt die el. Feldstärke daselbst. Die Einheit hat also ein Feld, in welchem auf die El.-M. Eins die Kraft Eins ausgeübt wird; [gr$^{1/2}$/(cm$^{1/2}$ sek)].

Das von einer punktförmigen E.-M. ε CGS bewirkte Feld hat in l cm Abstand von dieser El.-M. die Stärke ε/l^2 [cm$^{-1/2}$gr$^{1/2}$sek^{-1}]. — Als Richtung des Feldes bezeichnet man die Richtung der auf die positive Elektrizität ausgeübten Kraft.

14c. Kraftlinie $\mathfrak{C}=[l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Die Kraftwirkung von El.-Mengen kann man darstellen durch Linien (Faraday). Die Richtung der Linien gibt die Kraftrichtung, ihre Dichtigkeit, d. h. ihre Anzahl in einem Bündel vom senkrechten Querschnitt Eins gibt die Feldstärke an dem betr. Orte; [cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$/sek]. Von jeder Elektrizitäts-Einheit gehen nach 14b also 4π Einheitskraftlinien aus.[1])

Von der El.-Menge ε gehen $N=4\pi\varepsilon$ Kraftlinien aus. Im Abstande l sind diese gleichmäßig über die Kugelfläche $f=4\pi l^2$ verteilt, ihre Dichtigkeit ist also $N/f=\varepsilon/l^2$, gibt mithin die Feldstärke an dem Punkte. — Man sieht zugleich, daß eine konzentrisch kugelig verteilte El.-Menge nach außen ebenso wirkt, wie eine gleich große vom Mittelpunkt aus.

Feldstärke zwischen zwei el. Flächen. Die Flächen seien sehr groß im Verhältnis zu ihrem Abstand und seien gleichmäßig mit El. belegt von den Flächendichten die eine $+\sigma$, die andere $-\sigma$. Dann besteht zwischen ihnen ein el. Feld von der Stärke $4\pi\sigma$. Dies folgt aus 128, 1 oder auch daraus, daß die $4\pi\sigma$ Kraftlinien, die von der Flächeneinheit ausgehen, bei hinreichend kleinem Abstande zu der gegenüberliegenden Flächeneinheit geradlinig hinübergehen. Vgl. auch magn. Feld, S. 595.

15. Potential oder Spannung oder elektromotorische Kraft, elektrostatisch gemessen $V=[l^{1/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Die Einheit des Potentials hat eine mit der E.-M. Eins auf ihrer Oberfläche gleichmäßig geladene Kugel vom Halbmesser Eins; [cm$^{1/2}$gr$^{1/2}$/sek = 300 V; vgl. 26].

Wenn Massen vorhanden sind, welche anziehende oder abstoßende Kräfte nach dem umgekehrten Quadrate der Entfernung ausüben, so nennt man Potential dieser Massen auf einen in der Nachbarschaft befindlichen Punkt den Ausdruck, dessen Gefälle nach irgend einer Richtung die auf eine Masse Eins in dem Punkte nach dieser Richtung ausgeübte Kraft, bei El.-Mengen also die Feldstärke ergibt. Gefälle ist die Größe, um welche der Ausdruck abnimmt, wenn man von dem betrachteten zu einem nahe benachbarten Punkte übergeht, geteilt durch den Abstand beider Punkte; oder kurz der negative Differentialquotient

1) Der Faktor 4π ist unbequem. Indessen würde sein Beseitigen an diesem Orte nur dadurch möglich sein, daß z. B. unter 14b der Faktor $1/(4\pi)$ hereintritt.

des Ausdrucks nach der betrachteten Richtung. Danach ist das Potential der El.-Menge ε auf einen Punkt im Abstande l gleich ε/l; denn es ist $-\frac{d(\varepsilon/x)}{dx} = \frac{\varepsilon}{x^2}$. Aus $V = \varepsilon/l$ ergeben sich auch die Dimensionen von V. —

Die Einheit des Potentials läßt sich hiernach auch definieren als das von der El.-Menge Eins im Abstande Eins bewirkte Potential. — Die Potentiale mehrerer El.-Mengen, z. B. der Teile der el. Ladung eines Körpers auf einen Punkt, summieren sich einfach; El.-Mengen ε_1 ε_2 ..., die von einem Punkte die Abstände l_1 l_2 ... haben, bewirken also zusammen in diesem Punkte das Pot. $\varepsilon_1/l_1 + \varepsilon_2/l_2 + \cdots$, und das Potential, welches eine auf einer Kugelfläche vom Halbmesser r gleichmäßig ausgebreitete El.-M. ε auf den Mittelpunkt (und auf alle Punkte im Innern; vgl. 16) ausübt, ist gleich ε/r

Das Potential hat die fernere wichtige Bedeutung, daß $\varepsilon(V_1 - V_2)$ die Arbeit angibt, welche die elektrischen Kräfte leisten, wenn die El.-Menge ε von einem Orte mit dem Pot. V_1 zu einem Orte mit dem Pot. V_2 übergeführt wird. Denn die Arbeit $\int k\,dx$ (vgl. 9) ist in diesem Falle, weil $k = -\varepsilon\, dV/dx$, gleich $-\varepsilon\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}} dV = \varepsilon(V_1 - V_2)$.

16. Elektrische Kapazität, elektrostatisch gemessen, $c = [l]$. Die Einheit der Kapazität hat ein Leiter, der durch die Einheit der El.-Menge zum Potential Eins geladen wird, z. B. eine einzeln in Luft befindliche Kugel vom Halbmesser Eins; [cm = 1,11·10⁻⁶ Mikrofarad; vgl. 27].

Damit eine El.-Menge ε auf einem Leiter im Gleichgewicht sei, muß sie sich so verteilen, daß das Potential V im Leiter konstant ist. Wenn die Umgebung keine elektrischen Ladungen enthält (außer den etwa von dem Körper selbst influenzierten Ladungen), so sind Potential (Spannung) und El.-Menge einander proportional; $\varepsilon = c \cdot V$. Das Verhältnis $c = \varepsilon/V$ nennt man elektrostatische Kapazität des Leiters. — Beispiele, sowie die Beziehung von c zu der Widerstandskapazität s. 182 I.

Die Kapazität der Kugel ist gleich ihrem Halbmesser r, denn die El.-Menge ε, über die Oberfläche verteilt, bewirkt in der Kugel ein konstantes Potential, welches wir z. B. aus der Wirkung auf den Mittelpunkt $= \varepsilon/r$ finden. — Das CGS-Potential irgend eines geladenen Leiters kann man hiernach numerisch gleich setzen der El.-Menge, die in einer mit ihm durch einen sehr dünnen Draht verbundenen entfernten Kugel vom Halbmesser 1 cm bei dieser Ladung des Körpers enthalten wäre.

17. Dielektrizitätskonstante $D = [l^0 m^0 t^0]$. Die D.-K. Eins hat der leere Raum oder nahe auch ein Gas.

Ein Kondensator, welcher mit Luft als Dielektrikum die Kapazität c besitzt, hat, wenn die Luft überall da, wo merklich Kraftlinien hindurchgehen, durch ein Dielektrikum von der D.-K. D ersetzt wird, die Kapazität $D \cdot c$. — Von den Grundeinheiten ist D unabhängig.

18. El. Stromstärke $i = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]$. Die „elektrostatisch" oder „mechanisch" gemessene Einheit der el. Stromstärke hat ein Strom, bei welchem in der Zeit Eins die El.-M. Eins (vgl. 14) durch den Querschnitt des Leiters fließt; [cm$^{3/2}$gr$^{1/2}$/sek^2 = 333 · 10^{-12} A; vgl. 24].

18a. El. Widerstand $w = [l^{-1} t]$. Die el.-statisch gemessene Einheit hat ein Leiter, in dem die Potentialdifferenz (15) Eins zwischen seinen Enden den Strom Eins (18) hervorbringt; [sek/cm = 900 · 10^9 Θ; vgl. 29].

1 Θ hat 1,111 · 10^{-12}, ein Quecksilberwürfel von 1 cm Seite bei 0° hat 1,0453 · 10^{-16} el.-stat. [cm^{-1}sek] Widerstands-Einheiten.

Elektrisches Leitvermögen einer Substanz ist der reziproke Widerstand eines cm-Würfels zwischen zwei gegenüberliegenden Seiten.

Magnetische Einheiten.

Vgl. auch die vorigen zu den elektrostatischen Einheiten gemachten Bemerkungen, welche großenteils auf den Magnetismus übertragen werden können.

19. Freier Magnetismus oder Stärke eines Magnetpoles $\mathfrak{m} = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Einheit des freien Magnetismus (oder der Stärke des Magnetpoles) ist die Menge (oder der Magnetpol), welche auf eine gleiche aus dem Abstande Eins die Krafteinheit ausübt; [cm$^{3/2}$ gr$^{1/2}$/sek].

19a. Magnetische Flächendichte $\varrho = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Einheit ist gegeben, wenn die Flächeneinheit die Menge Eins an freiem Magnetismus besitzt.

20. Stabmagnetismus oder magnetisches Moment $M = [l^{5/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Einheit würde dargestellt werden durch einen Magnet mit zwei Einheitspolen ± 1 im gegenseitigen Abstande 1 cm; [cm$^{5/2}$gr$^{1/2}$/sek].

Jeder Magnet hat gleich viel positiven und negativen Magnetismus. Der einfachste Magnetstab würde aus zwei gleich starken punktförmigen Polen bestehen. Ein Magnet aus zwei Polen von der Stärke $\pm\mathfrak{m}$ im gegenseitigen Abstande $\mathfrak{l}$ hat das magnetische Moment $M = \mathfrak{m}\mathfrak{l}$.

Die CGS-Einheit ist 10000 mal größer als die ursprüngliche Gauſs'sche [mm, mg, sek]-Einheit.

Mit M sind die Wirkungen in die Ferne proportional.

Fernwirkung aus erster Hauptlage. Der Magnet $\mathfrak{m}\mathfrak{l}$ wirke auf den im Abstande L von seiner Mitte befindlichen Magnetpol $\mathfrak{m}'$. Die gesamte

$+\mathfrak{m}$ — $-\mathfrak{m}$ — $\mathfrak{m}'$
$\mathfrak{l}$

Kraft k **auf** $\mathfrak{m}'$ ist die Differenz der von den beiden Polen ausgeübten Kräfte, also

$$k = \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}'}{(L-\frac{1}{2}\mathfrak{l})^2} - \frac{\mathfrak{m}\mathfrak{m}'}{(L+\frac{1}{2}\mathfrak{l})^2} = 2\mathfrak{l}\mathfrak{m}\cdot\mathfrak{m}'\cdot\frac{L}{(L^2-\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)^2}.$$

$\mathfrak{l}\mathfrak{m}$ ist das magnetische Moment $= M$. Also wird

$$k = 2M\mathfrak{m}'\frac{L}{(L^2-\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)^2} = \frac{2M\mathfrak{m}'}{L^3}\frac{1}{(1-\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2/L^2)^2} \qquad 1.$$

oder durch Reihenentwickelung (vgl. S. 9, Gl. 5)

$$k = 2M\mathfrak{m}'/L^3\cdot(1+\tfrac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2+\tfrac{3}{16}\mathfrak{l}^4/L^4+\cdots).$$

Man sucht aus so großen Entfernungen zu arbeiten, daß das dritte Glied zu vernachlässigen ist. Ist L so groß gegen $\mathfrak{l}$, daß man auch $\frac{1}{2}\mathfrak{l}^2/L^2$ gegen 1 vernachlässigen kann, so wird einfach $k = 2M\mathfrak{m}'/L^3$.

Zweite Hauptlage. $\mathfrak{m}'$ sei wieder im Abstande L von der Mitte des Magnets gelegen. Der ungleichartige Pol übt eine Anziehungskraft $= \mathfrak{m}\mathfrak{m}'/(L^2+\frac{1}{4}\mathfrak{l}^2)$, der gleichartige eine gleich große Abstoßungskraft aus. Beide Kräfte setzen sich nach dem Parallelogramm in eine der Stabaxe parallele Kraft

$-\mathfrak{m}$ | $\mathfrak{l}$ | $+\mathfrak{m}$ $\qquad \mathfrak{m}'$

$$k = \mathfrak{m}\mathfrak{m}'/(L^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2)\cdot\mathfrak{l}/\sqrt{L^2+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2} = M\mathfrak{m}'/L^3\cdot(1+\tfrac{1}{4}\mathfrak{l}^2/L^2)^{-3/2} \qquad 2.$$

zusammen, wofür geschrieben werden kann

$$k = M\mathfrak{m}'/L^3\cdot(1-\tfrac{3}{8}\mathfrak{l}^2/L^2+\tfrac{15}{128}\mathfrak{l}^4/L^4+\cdots).$$

Bei sehr großer Entfernung L wird $k = M\mathfrak{m}'/L^3$.

Wird der Pol $\mathfrak{m}'$ durch eine auf der Kraftrichtung senkrechte kurze Magnetnadel von der Länge $\mathfrak{l}'$ mit den Polen $\pm\mathfrak{m}'$ ersetzt, so erfährt die Nadel ein Drehmoment $= k\mathfrak{l}'$. Da $\mathfrak{m}'\mathfrak{l}'$ das magn. Moment der Nadel $= M'$, so beträgt das Drehmoment P aus großer Entfernung L

$$\text{in 1. H.-L.}\quad P = 2\frac{MM'}{L^3} \qquad \text{und in 2. H.-L.}\quad P = \frac{MM'}{L^3},$$

wozu wegen der Magnetlänge nötigenfalls die oben in den Klammern gegebenen Korrektionsfaktoren kommen.

Man kann also auch definieren: Die Einheit des Stabmagnetismus hat ein Magnet, welcher auf einen gleichen aus der großen Entfernung L in 1. Hauptlage das Drehmoment $2/L^3$, oder in 2. Hauptlage $1/L^3$ ausübt.

Ist die Nadel nicht so kurz, daß man $\mathfrak{l}'^2$ gegen L^2 vernachlässigen kann, so kommt zu dem Ausdruck für k noch der Faktor hinzu:

in der 1. H.-L. $\qquad 1-\frac{3}{8}\mathfrak{l}'^2/L^2$,

in der 2. H.-L. $\qquad 1+\frac{3}{2}\mathfrak{l}'^2/L^2$.

Bildet die kurze Nadel mit der Kraftrichtung den Winkel φ, so ist obiges Drehmoment mit $\sin\varphi$ zu multiplizieren

Die Ausdrücke für ideale Magnete mit Punkt-Polen gelten nahe auch für wirkliche Magnete von gestreckter Form. Für Fernwirkungen gibt es zwei „Pole“, in denen der positive und der negative Magnetismus konzentriert gedacht werden können. Bei den gewöhnlichen Magneten beträgt

der Polabstand (die reduzierte Länge) etwa $^5/_6$ der Stablänge. Über die empirische Bestimmung s. 76b.

Nach den nicht gekürzten Formeln 1 und 2 v. S. sind die Ausdrücke für M/H S. 352 gebildet.

Zerlegung eines Magnets in Komponenten. Einen Magnet M, welcher mit der Verbindungslinie L den Winkel α bildet, darf man für Fernwirkungen in zwei Stäbe von der Stärke $M\cos\alpha$, bez. $M\sin\alpha$ zerlegen, welche aus der 1., bez. der 2. Hauptlage wirken.

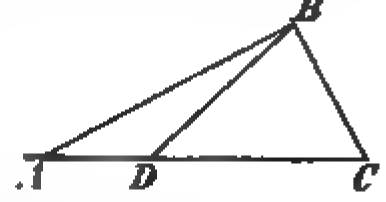
20a. Spezifischer Magnetismus oder Magnetisierung $\mathfrak{J} = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Die Einheit hat ein Magnet, dessen Moment geteilt durch sein Volumen gleich Eins ist.

Sp. Magn. oder Magnetisierung nennt man das Verhältnis des magn. Moments zum Volumen (auch wohl zur Masse) des Magnets. Gute, sehr dünne Stahlmagnete haben höchstens etwa 750 CGS auf 1 ccm (100 auf 1 gr). Die überhaupt (in Elektromagneten) erreichbare Grenze beträgt etwa 1500 CGS auf 1 ccm (200 auf 1 gr).

21. Magnetische Intensität eines Ortes oder magnetische Feldstärke H oder $\mathfrak{H} = [l^{-1/2} \cdot m^{1/2} \cdot t^{-1}]$. Die Einheit der Feldstärke herrscht an einem Orte, wo auf einen zur Richtung der Feldkraft senkrechten Magnet vom Moment Eins das Drehmoment Eins oder auf einen Einheitspol die Kraft Eins ausgeübt wird; [$gr^{1/2}/(cm^{1/2}$ sek) = 1 Gauſs]. Angaben in [mm,mg,sek] werden durch 10 geteilt in CGS verwandelt.

Der Ort eines Magnetpols übt im allgemeinen (durch Erdmagnetismus oder benachbarte Magnete oder elektrische Ströme) auf den Pol $\mathfrak{m}$ eine mit $\mathfrak{m}$ proportionale Kraft k aus, $k = \mathfrak{m} H$. Die Größe H, welche also die Kraft auf einen Einheitspol bedeutet, heißt Intensität der magnetischen Kraft, oder magnetische Intensität, oder Stärke des magnetischen Feldes.

Die von einem kurzen Magnet M von A aus am Orte B bewirkte Intensität erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC. Es sei $AD = \frac{1}{3} AC$. Dann ist BD die Richtung und $M \cdot AB^{-3} \cdot BD/AD$ die Intensität der Kraft in B (Gauß). Beweis durch Zerlegung von M nach Nr. 20 am Schluß.



Wirkung eines magn. Feldes auf einen Magnet. Das Drehmoment auf einen zur Kraftrichtung senkrechten Magnet mit zwei Polen $\pm\mathfrak{m}$ vom Abstande $\mathfrak{l}$, also vom magnetischen Moment $M = \mathfrak{m}\mathfrak{l}$, ist $= \mathfrak{m} H \cdot \mathfrak{l} = MH$, bez. $MH \sin\varphi$, wenn der Magnet im Winkel φ gegen die Kraftrichtung liegt. Also ist MH die Direktionskraft. Die (einfache) Schwingungsdauer t wird also, wenn K das Trägheitsmoment (vgl. Nr. 12), gegeben durch $t^2/\pi^2 = K/(MH)$. Für horizontal drehbare Magnete ist H die Horizontalkomponente der Feldstärke.

Z. B. sei $H = 0{,}2\ \mathrm{cm}^{-1/2}\mathrm{gr}^{1/2}\mathrm{sek}^{-1}$. Ein dünner Magnet wiege 20 gr und habe 10 cm Länge, also $K = 20 \cdot 10^2/12 = 167\ \mathrm{cm^2 gr}$. Der Magnetismus des Stabes sei $M = 400\ \mathrm{cm}^{5/2}\mathrm{gr}^{1/2}\mathrm{sek}^{-1}$. Dann ist $t = 3{,}14\sqrt{167/(400 \cdot 0{,}2)} = 4{,}5$ sek

Ablenkung einer kurzen Nadel durch einen Magnet. Ein Magnet M befinde sich in 1. Hauptlage zu einer Nadel vom Moment M' im Abstande L. Wenn φ der Ablenkungswinkel, so müssen für diesen Winkel die Drehmomente $2MM'/L^3 \cdot (1 + \frac{1}{2}l^2/L^2)\cos\varphi$ vom Magnet und $M'H\sin\varphi$ vom Erdmagnetismus gleich sein. Also ist

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{2}{L^3}\frac{M}{H}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l^2}{L^2}\right).$$

In der 2. Hauptlage fällt der Faktor 2 weg, und anstatt $\frac{1}{2}l^2$ kommt $-\frac{3}{8}l^2$. Die S. 350 mit η bezeichnete Korrektionsgröße hat die Bedeutung, daß bei kurzer Nadel in erster H.-L. $\sqrt{2\eta}$, in zweiter $\sqrt{-\frac{8}{3}\eta}$ den Polabstand des Magnets darstellt.

Magnetische Potentialdifferenz oder „magnetomotorische Kraft“ zwischen zwei Punkten. Liegen zwei Punkte in einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$ nach der Feldrichtung um die Länge l auseinander, so nennt man $\mathfrak{H}l$ die zwischen ihnen bestehende magn. Potentialdifferenz oder magn.-mot. Kraft. Die letztere Bezeichnung stammt aus der formalen Analogie des Gesetzes der Fortleitung von Magnetismus mit dem Ohm'schen Gesetz. Vgl. 22.

21a. Kraftlinie $\mathfrak{M} = [l^{3/2}m^{1/2}t^{-1}]$. Kraft-Richtung und Stärke des magn. Feldes an irgend einem Orte werden gegeben durch Richtung und Dichte der Kraftlinien; unter Dichte deren Anzahl auf die senkrecht zu der Richtung gelegte Flächeneinheit verstanden. Die Anzahl, welche durch eine anders gerichtete Flächeneinheit geht, gibt die Feld-Komponente senkrecht zu dieser Flächenrichtung. — Von einem Magnetpol $+\mathfrak{m}$ oder $-\mathfrak{m}$ treten $4\pi\mathfrak{m}$ positive oder negative Kraftlinien in den umgebenden Raum aus. Vgl. 14c und 26a; [$\mathrm{cm}^{3/2}\mathrm{gr}^{1/2}/\mathrm{sek}$ = Einheitskraftlinie oder Einheit des magnetischen Flusses = 1 „Maxwell“].

Magnetisches Feld zwischen zwei Magnetpolen. Zwei gleichmäßig entgegengesetzt magnetisierte breite, gleich große Pole, jeder von der Fläche f und der Gesamtstärke $\mathfrak{m}$, mögen sich in einem so kleinen Abstande gegenüberstehen, daß die $4\pi\mathfrak{m}$ Kraftlinien von dem einen Pol ohne merkliche „Streuung“ nach außen geradlinig zum anderen hinüber gehen. Da diese Linien über die Fläche f ausgebreitet sind, so ist die Feldstärke zwischen den Polen $\mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{m}/f = 4\pi\varrho$, wenn man die Dichte $\mathfrak{m}/f$ des freien Magnetismus auf den Polflächen mit ϱ bezeichnet.

22. Magnetisierungskoeffizient („Suszeptibilität“) $\varkappa = [l^0 m^0 t^0]$. Die Einheit des M. K. hat ein Körper, dem die magnetisierende Intensität Eins das magnetische Moment Eins der Volumeinheit

mitteilt. $\varkappa$ hat die Dimensionen Null, ist also eine unbenannte, von den Grundeinheiten unabhängige Zahl, kann demnach auch zu einer solchen addiert werden; vgl. 22a.

$\varkappa$ ist das Verhältnis der „Magnetisierung" $\mathfrak{J}$ (Magnetismus geteilt durch Volumen; 20a) eines Körperelementes zu der auf dieses wirkenden magnetisierenden Intensität $\mathfrak{H}$; letztere ist die Differenz der äußeren und der von dem Magnetismus des Körpers selbst herrührenden Kräfte. Der letztere Teil verschwindet nur in einem gegen seinen Querschnitt als unendlich lang zu betrachtenden Stabe und in einem geschlossenen, nach seiner peripherischen Axe magnetisierten Ringe, dem freie Pole fehlen; vgl. 115, S. 494.

Nur für diamagnetische und schwach magnetische Körper ist $\varkappa$ merklich konstant; Tab. 36a. Über Eisen s. 115 und Tab. 37. Zugleich ist für Eisen bekanntlich $\varkappa$ bei ansteigender Magnetisierung kleiner als bei absinkender (innere magn. Reibung; „Hysterese").

22a. Permeabilität $\mu = 1 + 4\pi\varkappa = [l^0 m^0 t^0]$. Die Einheit der P. hat die Luft oder strenger das Vakuum. $1/\mu$ **heißt magnetischer Widerstandskoeffizient des Körpers.**

Erläuterung. Ein langer Stab vom Querschnitt f, der sich in einem magnetischen Felde $\mathfrak{H}$, parallel den Kraftlinien gelegt, zum Betrage $\varkappa\mathfrak{H}$ per Volumeinheit magnetisiert, hat Pole von der Stärke $f\cdot\varkappa\mathfrak{H}$ und vereinigt in dieser Eigenschaft $4\pi\cdot f\varkappa\mathfrak{H}$ Kraftlinien. Hierzu die Kraftlinienzahl $f\mathfrak{H}$ wegen des Feldes selbst addiert, gibt $f\mathfrak{H}(1+4\pi\varkappa) = \mu f\mathfrak{H}$ als die Zahl im Innern des Stabes. Sieht man nun $\mu f\mathfrak{H}$ als einen Strom von Kraftlinien an, schreibt man ferner $\mu f\mathfrak{H} = \mathfrak{H}l\cdot\mu f/l$, wobei l die Länge zwischen zwei beliebigen Querschnitten des Stabes ist, so hat dieser Ausdruck dieselbe Form wie das Ohm'sche Gesetz für die Elektrizität, indem $\mathfrak{H}l$ die magnetomotorische Kraft (S. 596) und, wenn μ als magn. Leitvermögen aufgefaßt wird, $l/(\mu f)$ den magn. Widerstand vorstellt.

22b. Induktion $\mathfrak{B} = [l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1}] = \mu\mathfrak{H} = (1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H}$; $[gr^{1/2}/(cm^{1/2} sek) = 1$ Gauſs$]$. Vgl. noch Induktionsfluß, 26a.

$\mathfrak{B}$ ist die Dichte der Kraftlinien im magnetisierten Körper.

Chemisches Maß der Elektrizität.

23. Stromstärke, chemische Einheit. Die Einheit hat der Strom, welcher in der Zeit Eins die Einheit der chemischen Wirkung ausübt. Als El.-Menge Eins wäre die Menge zu bezeichnen, welche mit einem einwertigen Atom wandert. Solange man die absoluten Atomzahlen nicht kennt und sich auf ausgeschiedene Massen bezieht, ist das chemische Strommaß ein willkürliches Maß, weil die durch den Strom ausgeschiedene Menge eines Elektrolytes von der Substanz abhängt. Im Anschluß an die in der Chemie gebräuchlichen Zahlen ist für eine chemische Stromeinheit der Strom, welcher in 1 sek 1 gr-Äquivalent eines

Elektrolytes zersetzt oder 1 gr-Äqu. eines Ions (z. B. 8 gr Sauerstoff, 1,008 gr Wasserstoff oder 107,93 gr Silber; vgl. Tab. 34 u. 42) ausscheidet, am bequemsten. Diese Einheit ist gleich 9654 elektromagnetischen (24) und gleich $290 \cdot 10^{12}$ elektrostatischen CGS-Einheiten (18).

Elektromagnetische Einheiten.

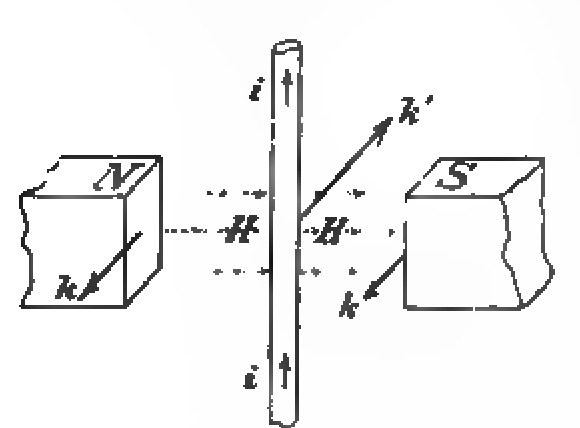
24. Stromstärke, elektromagnetisch gemessen $i = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$, Weber'sche Einheit. Die Einheit ist durch den Strom gegeben, dessen Längeneinheit aus der Entfernung Eins auf einen Magnetpol Eins die (transversale) Kraft Eins ausübt. Das wirkende Stromstück hat man sich zu einem Kreisbogen vom Halbmesser Eins gebogen zu denken; [$cm^{1/2} gr^{1/2}/sek = 300 \cdot 10^{8}$ elektrostat. CGS = 10 A; vgl. 18].

Ein kurzes Stück von der Länge l eines Stromes i wirkt auf einen in der Senkrechten auf l gelegenen Magnetpol $\mathfrak{m}$ aus der Entfernung L mit der (transversalen) Kraft $k = i\mathfrak{m} \cdot l/L^2$ (Biot-Savart'sches Gesetz). Daraus folgt die Dimension $[i] = [l \cdot k \cdot \mathfrak{m}^{-1}]$ oder, wenn $k = lmt^{-2}$ und $\mathfrak{m} = l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}$ eingesetzt wird, $[i] = [l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}]$.

Ein ganzer Kreisstrom i vom Halbmesser R übt also auf einen Pol $\mathfrak{m}$ im Mittelpunkt die Kraft $k = \mathfrak{m} i \cdot 2\pi R/R^2 = \mathfrak{m} i \cdot 2\pi/R$ aus.

Die [cm, gr]-Stromeinheit ist 100mal größer als die [mm, mg]-Einheit.

Die folgende Definition ist identisch mit der obigen: Ein geradliniger Strom i von der Länge l senkrecht zu den Kraftlinien in einem magn. Felde H fließend, erfährt die (transversale) Kraft: $k' = Hil$.



Die Richtung der Kraft, welche der Strom erhält, oder die er auf Magnetpole ausübt, welche das Feld H erzeugen, ist in der Figur dargestellt.

Bildet die Strom- mit der Feldrichtung den Winkel φ, so ist $Hil \cdot \sin\varphi$ die zu beiden Richtungen senkrechte Kraft.

Elektrodynamische Stromeinheit. Diese ist mit der elektromagnetischen identisch, wenn man das Ampère'sche Gesetz so ausspricht: Zwei gleichgerichtete Ströme i und i' in den geradlinigen Leitern l und l' in dem (relativ großen) gegenseitigen Abstande L ziehen sich mit der Kraft $2li \cdot l'i'/L^2$ an, wenn sie zur Verbindungslinie senkrecht stehen; sie stoßen sich mit der Kraft $li \cdot l'i'/L^2$ ab, wenn sie mit der Verbindungslinie zusammenfallen. In einer anderen gegenseitigen Lage zerlegt man sie parallelepipedisch in Komponenten, welche eine der obigen Stellungen haben oder auf einander senkrecht stehen. Die letzteren Teile wirken nicht auf einander.

1. Magnetisches Moment eines geschlossenen Stromes. Ein ebener, geschlossener, wie oben gemessener Strom i von der umflossenen Fläche f wirkt in die Ferne wie ein senkrecht durch f gesteckter Magnet $M = fi$. — Genauer gilt: Der geschlossene Strom darf bezüglich seiner Wirkung nach außen durch zwei Blätter von dem gegenseitigen kleinen Abstande a ersetzt werden, welche die Stromwindung ausfüllen und von denen das eine mit Nordmagnetismus, das andere mit Südmagnetismus von der Flächendichte i/a bedeckt ist. Vgl auch unter 3.

Man kann also auch sagen: Strom Eins ist der Strom, welcher die Flächeneinheit umfließend in die Ferne wie ein Magnet Eins wirkt.

Beweis für einen Kreisstrom vom Halbmesser r, welcher auf einen in seiner Axe im Abstande L gelegenen Magnetpol $\mathfrak{m}$ wirkt. Jedes Stückchen λ übt die Kraft aus $k = \lambda i \mathfrak{m}/(L^2+r^2)$. Die Komponente dieser Kraft nach der Axe ist $= k \cdot r/\sqrt{L^2+r^2} = \lambda \cdot r i \mathfrak{m}/(L^2+r^2)^{3/2}$. Die Summe aller dieser Komponenten ist $2\pi r \; r i \mathfrak{m}/(L^2+r^2)^{3/2}$ oder für ein großes L gleich $2 \pi r^2 i \; \mathfrak{m}/L^3$. Die anderen Kraftkomponenten heben sich auf. Der Strom wirkt also (20) wie ein Magnet vom Moment $\pi r^2 \cdot i$; q. e d.

2 Drehmoment auf einen geschlossenen Strom. Die Windungsfläche f einer vom Strome i durchflossenen drehbaren Spule in einem Magnetfelde, dessen Stärke senkrecht zur Drehaxe $= H$ ist, bilde den Winkel φ mit der Richtung von H. Dann ist das Drehmoment $= i f H \cos\varphi$. $f H \sin\varphi$ ist gleich der Anzahl magn. Kraftlinien, die durch die Stromfläche hindurchtreten.

3. Magn. Feld einer Stromspule. Eine gleichmäßig mit n Windungen auf jeder Längeneinheit bewickelte cylindrische Spule mit dem Strom i wirkt nach außen genau wie die Belegungen der beiden Endflächen mit freiem Magnetismus von der Flächendichte ni; vgl. oben 1. — Im Innern einer im Verhältnis zum Durchmesser langen Spule entsteht auf einer von den Enden hinreichend abstehenden Strecke ein homogenes magnetisches Feld von der Stärke $= 4\pi n i$. Näheres s. 114 I.

Beweis. Das erste folgt aus dem Ersatz der Einzelströme nach Nr. 1 durch magnetische Belegungen. Indem man nämlich a gleich dem Abstande der Windungen wählt, neutralisieren sich die Wirkungen benachbarter Windungen bis auf die beiden übrigbleibenden äußersten Belegungen. a ist $= 1/n$, also die Flächendichte $= i/a = ni$, q. e d. — Die Feldstärke im Innern folgt, wenn man die Spule in zwei, links und rechts von dem betrachteten Querschnitt gelegene Teile zerschnitten denkt. Ein Punkt des Querschnitts befindet sich dann zwischen zwei Polflächen von der Flächendichte $\varrho = \pm ni$, also ist die Feldstärke nach S. 596 gleich $4\pi\varrho$ oder $4\pi n i$.

4. Magn. Feld um einen geradlinigen Strom. Ein langer gerader Strom i bewirkt ein zirkulares Feld. In einem Punkte, der den Abstand r vom Drahte und einen gegen r sehr großen Abstand von den Drahtenden hat, ist die transversale Feldstärke $= i \cdot 2/r$.

Elektrochemisches Äquivalent (Faraday, Weber; vgl. 23 u. 87). Der Strom 1 CGS zersetzt in 1 sek 0,000933 gr Wasser, scheidet 0,01118 gr Silber oder allgemein von einem Körper vom Äquivalentgewicht A (Sauerstoff $= \frac{16}{2} = 8$) die Menge $A/9654 = A \cdot 0{,}0001036$ gr/sek ab.

„Praktische“ Einheit[1]). 1 Ampere $= 0{,}1\ cm^{1/2} gr^{1/2} sek^{-1}$ $= 300 \cdot 10^7$ elektrostatischen CGS oder 1,118 mg/sek Silber oder 1/96540 gr-Äquiv./sek.

25. Elektrizitätsmenge, elektromagn. gemessen $q = [l^{1/2} m^{1/2}]$. Als Einheit gilt die von dem Strome Eins in der Zeiteinheit durch einen Querschnitt der Leitung beförderte Menge; [$cm^{1/2} gr^{1/2}$ = 10 Amperesek. $= 300 \cdot 10^8$ elektrostatischen CGS].

„Praktische Einheit“ ist die Elektrizitätsmenge, welche bei der Stromstärke 1 A in 1 sek durch den Querschnitt der Leitung fließt. Sie heißt Amperesekunde oder Coulomb und entspricht also 0,1 CGS oder 1/96540 gr-Äquiv.

Verhältnis der elektrostat. zur elektromagn. Einheit der El.-Menge (Weber u. R. Kohlrausch). $300 \cdot 10^8$ statische CGS sind gleich einer elektromagnetischen CGS. Die Dimensionen stehen im Verhältnis $v = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}] : [l^{1/2} m^{1/2}] = [l/t]$. Nach der Maxwell'schen elektromagn. Theorie des Lichtes ist dieses Verhältnis v gleich der Lichtgeschwindigkeit. Vgl. S. 584.

Zwei elmg. Einheiten ziehen sich also aus 1 cm Abstand mit der Kraft v^2 CGS oder Dynen an.

1) Wegen der Schwierigkeit einer genauen absoluten Strommessung ist der gesetzlichen Definition des Ampere die durch die Zahl 1,118 mg/sek Silber ausgedrückte chemische Stromwirkung zugrunde gelegt worden.

Neben der CGS-Einheit eine 10mal kleinere einzuführen war unzweckmäßig. Bei elektromagnetischen Beziehungen führt diese Durchbrechung des Maßsystems zu großen Unbequemlichkeiten, so daß man hier besser, anstatt nach A, nach der Weber'schen CGS-Einheit rechnet, ein Weg, den die wissenschaftliche Elektrotechnik meist einschlägt.

Man kann voraussehen, daß früher oder später der Wunsch auftreten wird, die CGS-Einheit der Stromstärke überall durchzuführen. Damit würde dann, des Ohm'schen Gesetzes wegen, eine gleichzeitige Änderung entweder der Widerstands- oder der Spannungseinheit verbunden werden müssen. Die erstere zehnmal zu verkleinern wäre unbequem; die elektromotorische Kraft dagegen nach einer zehnmal größeren Einheit als das Volt zu rechnen, würde mehr Vorteile als Nachteile gewähren. Die Einheiten der Kapazität und Selbstinduktion ändern sich dabei nicht.

26. Elektromotorische Kraft oder Spannung oder Potentialunterschied, elektromagnetisch gemessen $E = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]$.

a) Die Einheit wird aus den Erscheinungen der Induktion folgendermaßen definiert (W. Weber). In einem magn. Felde von der Stärke Eins werde ein gerader, zur Feldrichtung senkrechter Leiter mit der Geschwindigkeit Eins senkrecht zu sich selbst und zur Feldrichtung bewegt. Die hierdurch in jeder Längeneinheit des Leiters induzierte el. Kraft ist die elektromagnetisch gemessene Einheit der el. Kraft; [$cm^{3/2} gr^{1/2}/sek^2 = 10^{-8}$ V $= 333 \cdot 10^{-13}$ oder $\frac{1}{300 \cdot 10^8}$ el.-stat. CGS-Potentialeinheiten].

Das zugrunde liegende Gesetz lautet: In einem magn. Felde H (21) erfährt ein gerader, zur Feldrichtung senkrechter Leiter von der Länge l, wenn er senkrecht zu sich selbst und zur Feldrichtung mit der Geschwindigkeit u verschoben wird, eine induzierte el. Kraft $E = lHu$.

Die el. Kraft stellt sich also hier dar als Länge × magnetische Intensität × Geschwindigkeit $= l \cdot l^{-1/2} m^{1/2} t^{-1} \cdot l t^{-1} = l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}$.

Bewegt man z. B. an einem Orte des mittleren Deutschlands, wo die gesamte erdmagnetische Intensität $= 0{,}45$ CGS ist, einen senkrecht zur Inklinationsrichtung gehaltenen geraden Draht von 1 m Länge mit der Geschwindigkeit 1 m/sek senkrecht zu sich und zu H, so wird die el. Kraft $= 100 \cdot 0{,}45 \cdot 100 = 4500$ CGS $= 45$ Mikrovolt induziert.

b) Statt des obigen kann man auch sagen: Die el. Kraft Eins wird induziert in einem Leiter, der sich in einem magn. Felde so bewegt, daß er in der Zeiteinheit eine Kraftlinie schneidet.

Für den Fall unter *a*) sieht man dies leicht. Ein magn. Feld von der Stärke Eins wird nämlich durch parallele Kraftlinien von der Dichte Eins, d. h. mit je einer Kraftlinie in der Querschnittseinheit dargestellt. Jedes cm des mit der Geschwindigkeit Eins wie oben bewegten Leiters schneidet also in 1 sek eine Kraftlinie.

c) Eine mit den vorigen identische Definition der el. Kraft läßt sich aus der Arbeitsleistung ableiten. Einheit ist nämlich die el. Kraft, welche, wenn sie den Strom Eins hervorbringt, in der Zeiteinheit die Einheit der Arbeit verrichtet, z. B. in einem Drahte (welcher alsdann nach Nr. 29 den Widerstand Eins haben muß) die der Arbeitseinheit äquivalente Wärmemenge erzeugt. Vgl. hierüber 30

„Praktische" Einheit[1]). 1 Volt $= 10^8$ CGS.

1 el.-stat. CGS-Potentialeinheit $= 300$ V; 1 Daniell etwa $= 1{,}1$ V; 1 Bunsen etwa $= 1{,}9$ V; 1 Akkumulator $= 2{,}0$ V; (1 „legales Volt" $= 0{,}9972$ V).

1) Gesetzlich ist das Volt definiert als die el. Kraft, welche in einem Leiter von 1 Θ Widerstand (29) den Strom 1 A erzeugt.

Potentialdifferenz oder Spannung. Die el. Kraft einer Säule ist proportional dem Potentialunterschiede der offenen Säule an den Polen. Indem man die beiden Größen identifiziert, erhält man also auch im elektromagnetischen Maßsystem den Begriff Potential, welcher mit dem Begriff el. Kraft gleichartig ist.

Man kann den Begriff auch so definieren: Potential innerhalb eines vom Strome durchflossenen Leiters ist die Größe, deren Gefälle oder negativer Differentialquotient nach einer Richtung die in dieser Richtung auf die Elektrizitätsmenge Eins ausgeübte Kraft ergibt.

Gesetze der Magnetoinduktion.

Dieselbe Einheit der elektromotorischen Kraft liegt den folgenden Formen des Induktionsgesetzes zugrunde.

I, Nach Neumann. Ein beliebig gestalteter Leitungsdraht werde in einem magnetischen Felde bewegt, welches nicht homogen zu sein braucht, also etwa von beliebigen benachbarten Magneten oder Strömen erzeugt sein kann — oder es werde ein Magnetpol oder Magnet in der Nachbarschaft eines ruhenden Leiters bewegt. Die Geschwindigkeit im einen oder anderen Falle sei $= u$.

Um die hierdurch im Leiter induzierte el. Kraft zu erhalten, denke man ihn von der Stromeinheit durchflossen. Dann würden von dem Felde auf den Strom Eins oder von dem Strome Eins auf den Magnet Kräfte ausgeübt werden, und p sei in irgend einem Augenblick deren Komponenten-Summe nach der Richtung der wirklich ausgeführten Bewegung. Die in diesem Augenblick induzierte el. Kraft beträgt dann pu.

Im Falle drehender Bewegung ist für p das Drehmoment in der Drehungsebene und für u die Winkelgeschwindigkeit zu setzen.

II, Aus den geschnittenen Kraftlinien; vgl. 21a. Für viele Fälle übersichtlich ist das Gesetz in folgender Form: Wird ein Leiter in einem magnetischen Felde bewegt (oder auch ein Magnet in der Nähe eines Leiters), so ist die el. Kraft gleich der Anzahl (Vorzeichen!) von Kraftlinien, die der Leiter in der Zeiteinheit schneidet; bei einem geschlossenen Leiter gleich der Änderung (Vorzeichen!) der ihn durchsetzenden Kraftlinienzahl in der Zeiteinheit.

III, Induktion durch ruhenden veränderlichen Magnetismus. Magnetismus, der in der Nähe eines Leiters entsteht (bez. verschwindet), erzeugt denselben Integralwert el. Kraft, wie wenn er aus großer Entfernung auf irgend einem Wege an seinen Ort bewegt würde (bez. umgekehrt). — Für einen geschlossenen Leiter ist dieser Integralwert gleich dem Zuwachs (bez. der Abnahme) der Zahl der Kraftlinien, welche die Fläche durchsetzen; vgl. oben. Bei mehrfachen Windungen sind alle Flächen zu rechnen (immer die Vorzeichen beachten!).

Gedrehte Spule im magn. Felde; Erdinduktor (111, 116). Das Feld sei homogen. Wir denken uns die Windungen auf eine zur Feldrichtung senkrechte Ebene projiziert. Die Summe f der Flächenprojektionen ändere in irgend einem Augenblick ihre Größe um den kleinen Betrag df in der kleinen Zeit dt. Dann ist die in diesem Augenblick induzierte el. Kraft E gleich der Feldstärke H multipliziert mit der Geschwindigkeit df/dt der Flächenänderung; $E = H \cdot df/dt$. Wird der Multiplikator aus einer zur Richtung von H senkrechten Anfangsstellung um 180° gedreht, so beträgt der Integralwert der el. Kraft dieses Induktionsstoßes $\int E dt = 2fH$. Daß $2fH$ die Anzahl der von den Windungen hierbei geschnittenen Kraftlinien ist, sieht man sofort. — Die Sätze gelten auch, wenn die Drehaxe nicht zur Feldrichtung senkrecht steht, falls man als H die größte Feldkomponente in der Drehungsebene nimmt, also für eine vertikale Axe die Horizontalkomponente des Feldes

Die Sätze sind in dem **allgemeineren Satz** enthalten: Ein geschlossener ebener Leiter von der Windungsfläche f werde in einem magnetischen Felde bewegt (welches nicht homogen zu sein braucht). H_1 und H_2 seien die Komponenten der Feldstärke senkrecht zur Windungsfläche (Vorzeichen!) zu Anfang und am Schluß der Bewegung. Dann ist der Integralwert der inzwischen induzierten el. Kraft $\int E dt = f(H_1 - H_2)$. — Wird also die Spule aus einer Stellung senkrecht zur Richtung eines Feldes H aus diesem herausgezogen, so ist $\int E dt = fH$. — Alle diese Sätze ergeben sich leicht aus dem Neumann'schen Induktionsgesetz oder aus dem Satz von den Kraftlinien, I u. II vor. S

Über das Dämpfungsgesetz schwingender Spulen oder Magnete s. 108.

Magnetinduktor (112) In eine gegen ihren Durchmesser lange Spule werde aus großer Entfernung ein Magnet vom Moment M eingeschoben, so daß er sich schließlich der Spulenaxe parallel in der Spule hinreichend weit von ihren Enden (114 I) befindet (bez. er werde aus dieser Lage herausgezogen) Oder auch es entstehe (bez. verschwinde) innerhalb der Spule das magn. Moment M. Der Integralwert der dabei induzierten el. Kraft ist $= 4\pi n M$; n bedeutet die Windungszahl auf der Längeneinheit der Spulenaxe.

Man kann diesen Satz aus der Form I des Induktionsgesetzes vor. S leicht beweisen, wenn man berücksichtigt, erstens, daß der eine Pol des Magnets vom Moment $M = \mathfrak{m}\mathfrak{l}$ einen um $\mathfrak{l}$ längeren Weg in der Spule zurücklegt als der andere, und daß zweitens die vom Strome Eins im Innern der Spule auf den Pol $\mathfrak{m}$ ausgeübte Kraft $= 4\pi n \cdot \mathfrak{m}$ sein würde (S 599).

26a. Magnet. Induktionsfluß $\mathfrak{M} = [l^{3/2} m^{1/2} t^{-1}]$. Vgl. 20a bis 22b; [$cm^{3/2} gr^{1/2} sek^{-1}$ = magn. Einheitskraftlinie = 1 „Maxwell"].

$\mathfrak{M}$ ist die Gesamtzahl der Kraftlinien in einem magnetisierten Querschnitt. Der magn. Induktionsfluß in einem langen oder ringförmig geschlossenen Eisenstabe vom Querschnitt f mit dem Magn.-Koeffizienten $\varkappa$ oder der Permeabilität μ, welcher durch die magn. Intensität $\mathfrak{H}$ zur Magnetisierung $\mathfrak{J}$ (20a) erregt wird, beträgt $\mathfrak{M} = (\mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{J})f = (1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H}f$

$=\mu\mathfrak{H}f=\mathfrak{M}f$. Denn $\mu\mathfrak{H}f$ ist die hier erregte, den Stab durchsetzende Anzahl von Kraftlinien; 22a. — $\mathfrak{M}$ gibt zugleich das, während der Entstehung oder des Verschwindens der Magnetisierung, in einer den Stab dicht umgebenden Windung induzierte el. Kraft-Integral.

27. Kapazität, elektromagnetisch gemessen $c=[l^{-1}t^2]$. Die Einheit der Kapazität besitzt ein Leiter, der die El.-Menge Eins (25) enthält, wenn er zum Potential Eins oder von der el. Kraft Eins (26) geladen ist, während die Leiter der Umgebung das Potential Null haben. Vgl. auch 16 u. 17; [sek²/cm $=9\cdot10^{20}$ el.-stat. Kapaz.-Einh. $=10^9$ Farad $=10^{15}$ Mikrofarad].

Die Einheit für die El.-Menge ist hier $3\cdot10^{10}$ mal größer, die des Potentials $3\cdot10^{10}$ mal kleiner als im elektrostat. System, also wird die Einheit der Kapazität jetzt $9\cdot10^{20}$ mal größer als dort. Ein Luftkondensator von 0,1 cm Plattenabstand, der die Kapazität 1 CGS el. magn. hätte, müßte also nach 182 I 3 eine Fläche haben $f=4\pi\cdot0{,}1\cdot9\cdot10^{20}=113\cdot10^{19}$ qcm $=113\cdot10^{9}$ qkm, etwa 220 mal die Erdoberfläche.

Praktische Einheit. Die Kapazität eines Kondensators, welcher durch die Elektrizitätsmenge 1 Amperesekunde oder 1 Coulomb zur Spannung 1 V geladen wird, ist 1 **Farad**.

1 Farad $=10^{-9}[\mathrm{cm}^{-1}\mathrm{sek}^2]$ el.-magn. oder $=9\cdot10^{11}$[cm] el.-stat. CGS-Einh. $=10^6$ Mikrofarad.

28. Induktions-Koeffizient oder elektrodynamisches Potential $S=[l]$. Die Einheit ist durch einen Leiter dargestellt, in dem durch die Änderungsgeschwindigkeit Eins eines Stromes die elektrom Kraft Eins induziert wird. S ist der Faktor, mit welchem die zeitliche Änderungsgeschwindigkeit di/dt eines Stromes zu multiplizieren ist, um die Größe der durch diese Änderung zur Zeit t induzierten el. Kraft E zu erhalten; [cm $=10^{-9}$ Quadrant oder Henry].

Selbstinduktions-Koeffizient oder Selbst-Potential eines Leiters. (Vgl. 117.) Die durch Stromänderung induzierte el. Kraft ist, nach der Stromrichtung positiv gezählt, $E=-S\cdot di/dt$.

Gestreckte Spule aus N Windungen von dem gegen die Länge l kleinen Halbmesser r. Es ist nahe $S=4\pi^2N^2(\sqrt{l^2+r^2}-r)\cdot r^2/l^2$; also, wenn r sehr klein gegen l ist, $S=N^2 4\pi^2r^2/l$, oder, wenn λ die Länge des auf die Längeneinheit der Spule gewickelten Drahtes bedeutet, $S=l\cdot\lambda^2$.

Kurze Spule vom mittleren Halbmesser r mit N Windungen in einer rechteckigen Lage von der Breite b und der Dicke c; b und c seien klein gegen r. Wir bezeichnen $b/r=\beta$ und $c/r=\gamma$. Ferner bedeute Δ den Durchmesser des besponnenen und Δ_0 den des nackten Drahtes. Dann ist (Stefan, Wied. Ann. 22, 114. 1884)

$$S = 4\pi r N^2 \left[\left(1 + \frac{3\beta^2 + \gamma^2}{96}\right) \lg\text{nat} \frac{8}{\sqrt{\beta^2 + \gamma^2}} - y_1 + \frac{\beta^2}{16} y_2\right]$$
$$+ 4\pi r N \left(\lg\text{nat} \frac{\Delta}{\Delta_0} + 0{,}15494\right).$$

y_1 und y_2, letzteres von geringem Einfluß, sind durch das Verhältnis c/b der Seiten des rechteckigen Querschnitts nach folgender Tabelle (ausführlicher bei Stefan l. c.) bestimmt. Bei y_1 ist es gleichgiltig, ob c/b oder b/c gesetzt wird.

$c/b =$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$y_1 =$	0,500	0,592	0,666	0,722	0,765	0,796	0,818	0,833	0,842	0,847	0,848
$y_2 =$	0,12	0,13	0,15	0,19	0,24	0,31	0,38	0,47	0,58	0,69	0,82.

Die Längen in cm gemessen, erhält man S ebenfalls in cm. Division durch 10^9 gibt dann S in Quadrant oder Henry; vgl. unten. Letzteres Maß ist im folgenden stets zu wählen, wenn w in Ohm ausgedrückt wird; für die elektrostatische Kapazität gilt dann das Farad als Einheit.

Einfache Figuren aus Draht, von der Dicke 2ϱ; nach Maxwell, Kirchhoff, Mascart. Vgl M. Wien, Wied. Ann. 53, 928. 1894 unter Beachtung für die daselbst öfters vorkommende Zahl 0,7788, daß lg nat 0,7788 $= -\frac{1}{4}$ ist. Auch Drude, Physik des Äthers S. 204 u. 359 ff. 1894.

1. Gerader Draht, $l =$ Länge, groß gegen ϱ; $S = 2l[\lg\text{nat}(2l/\varrho) - 0{,}75]$.

2. Einfacher Kreis, $R =$ Halbmesser, groß gegen ϱ;
$$S = 4\pi R[\lg\text{nat}(R/\varrho) + 0{,}33].$$

3. Rechteck mit den gegen ϱ großen Seiten a und b; $\sqrt{a^2 + b^2} = p$ bezeichnet;

$$S = 4\left[a \lg\text{nat} \frac{2ab}{\varrho(a+p)} + b \lg\text{nat} \frac{2ab}{\varrho(b+p)} - 2(a+b-p)\right] + (a+b).$$

Hieraus Quadrat von der Seite a: $S = 8a[\lg\text{nat}(a/\varrho) - 0{,}52]$.

4. System zweier langer paralleler Drähte für Hin- und Rückleitung eines Stromes; $a =$ gegenseit. Abstand ihrer Axen. In hinreichendem Abstande von den Enden beträgt der S.-Ind.-K. der Längeneinheit des Paares $4 \lg\text{nat}(a/\varrho) + 1$.

Die Ausdrücke 1 bis 4 gelten für langsame Änderungen des Stromes, bei denen dieser den Querschnitt gleichmäßig ausfüllt.

Für so schnelle el. Schwingungen, daß die Ströme nur in der Oberfläche verlaufen, ist zu ersetzen:

in 1. $-0{,}75$ durch -1; in 2. $+0{,}33$ durch $+0{,}079$; in 3. $+(a+b)$ durch Null; endlich in 4. a durch $\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \varrho^2}$ und ferner $+1$ durch Null.

Über schnelle Schwingungen vgl. auch Sommerfeld, Wied. Ann. 67, 233. 1899; Mie, Ann. der Ph. 2, 201. 1900.

Entstehungszeit eines Stromes. Wird eine el. Kraft E durch einen Leiter vom Widerstande w und vom Selbstpotential S zur Zeit Null geschlossen, so ist zur Zeit t die Stromstärke $i = E/w \cdot \left(1 - e^{-w/S \cdot t}\right)$ (Helmholtz). S/w heißt Verzögerungskonstante oder Relaxationszeit.

Über Wechselströme mit Selbstinduktion, Phasenverschiebung und scheinbaren Widerstand sowie über die Bezeichnungen „effektive“

Stromstärke oder el. Kraft s. **120** I u. II. — Die Beziehungen zwischen el. Kraft, Stromstärke und Zeit (S. 518) lassen sich in verschiedener Weise geometrisch veranschaulichen. Fruchtbar ist z. B. die Darstellung der Periodendauer als eines Winkels von 360° und der elektrischen Größen als Radien, die also in der Periodendauer einmal umlaufen. Ein Zeitunterschied, z. B. eine Phasenverschiebnng zwischen el. Kraft und Stromstärke tritt dann als Winkel zwischen Radien auf, der „effektive Widerstand" $\sqrt{w^2 + a^2 S^2}$ als Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von den Katheten w und aS und der Phasenverschiebung als dem an w anliegenden Winkel. Auf zusammenwirkende el. Kräfte lassen sich dabei parallelogrammatische Konstruktionen anwenden. Näheres über diese vielfach gebrauchte Darstellung s. in den elektrotechnischen Lehrbüchern (vgl. S. 385 u. 520), besonders in Bedell u. Crehore.

Bei sehr großer Wechselzahl wird auch für einen geradlinigen guten Leiter der scheinbare Widerstand größer als der Ohm'sche, nämlich im Verhältnis $\left(1 + \frac{\pi^2 \nu^2}{12\, \gamma^2} - \frac{\pi^4}{180} \frac{\nu^4}{\gamma^4} \cdots\right) : 1$, wenn ν die Wechselzahl/sek und γ den Widerstand von 1 cm in CGS bedeutet (Nr. 29). Falls das Leitmaterial magnetisch ist, hat man μ/γ statt $1/\gamma$ einzuführen, wo μ die magn. Permeabilität ist; vgl. 22a (Rayleigh, Phil. Mag. 21, 387. 1886).

In dicken Leitern bewirkt die Selbstinduktion eines Wechselstromes zugleich, daß die inneren Stromfäden gegen die äußeren abgeschwächt und verzögert werden.

Entladung eines Kondensators durch einen Weg mit Selbstinduktion; elektrische Schwingungen. Ein mit der El.-Menge Q_0 geladener Kondensator von der Kapazität c werde zur Zeit $t = 0$ durch einen Weg vom Widerstande w und dem Selbst-Ind.-K. S geschlossen. Wenn $S < \frac{1}{4} c w^2$, so bezeichnen wir $\sqrt{\left(\frac{1}{4}\frac{w^2}{S^2} - \frac{1}{cS}\right)} = \alpha$ und $\frac{1}{2}\frac{w}{S} = \beta$. Die allmählich abnehmende Ladung beträgt dann zur Zeit t

$$Q_t = Q_0 e^{-\beta t} \frac{1}{2\alpha}\left[(\alpha + \beta) e^{\alpha t} + (\alpha - \beta) e^{-\alpha t}\right].$$

Für $S > \frac{1}{4} c w^2$ wird α imaginär; dann erfolgt die Entladung in der Gestalt **gedämpfter Oszillationen.** Wird nämlich nun $\sqrt{\left(\frac{1}{cS} - \frac{1}{4}\frac{w^2}{S^2}\right)} = \vartheta$ bezeichnet, so ist

$$Q_t = Q_0 e^{-\beta t}\left(\cos\vartheta t + \frac{\beta}{\vartheta}\sin\vartheta t\right);$$

$\tau = \frac{2\pi}{\vartheta} = 2\pi \sqrt{\left(\frac{1}{cS} - \frac{1}{4}\frac{w^2}{S^2}\right)}$ ist also die Schwingungsdauer dieser Oszillationen. Wenn $\frac{1}{4} c w^2$ gegen S klein ist, so wird $\tau = 2\pi\sqrt{cS}$.

Die Stärke der zeitlichen Dämpfung der Oszillationen wird durch $\beta = \frac{1}{2} w/S$ ausgedrückt. $\beta\tau = 2\pi\beta\,\vartheta$ ist das nat. log. Dekrement auf einander folgender Schwingungen.

Die Vorgänge leiten sich aus der Differentialgleichung des entladenden Stromes i ab: $iw + S\,di/dt = E$, wo $i = -dQ/dt$ und, nach 27, die el. Kraft $E = Q/c$ einzusetzen ist.

Gegenseitiger Induktions-Koeffizient oder elektrodynamisches Potential eines Leiters auf einen anderen. Die Größe kann definiert werden als das el. Kraftintegral $\int E\,dt$, welches in dem einen Leiter auftritt, während im anderen der Strom Eins entsteht oder verschwindet.

Gegenseit. Ind.-K. einer langen und einer koaxialen kurzen Spule. — 1) Über eine im Verhältnis zu ihrem Halbmesser r lange oder eine ringförmig geschlossene Spule von je n Windungen auf der Längeneinheit sei eine kurze und enge Spule von der Gesamtwindungszahl N geschoben. In einer der Spulen entstehe oder verschwinde der Strom i. Dabei entsteht in der anderen $\int E\,dt = 4\pi^2 n N r^2 \cdot i$. Also $S = 4\pi^2 n N r^2$.

Ist die lange Spule die primäre, so ist $4\pi n i$ das in ihr entstehende magn. Feld $\mathfrak{H}$ (vgl. 24), also $\int E\,dt = r^2\pi\mathfrak{H}\cdot N$. Wird vom Strome zugleich ein durch beide Spulen gehender, langer Eisenstab magnetisiert, bedeutet hierbei m das entstehende magnetische Moment der Längeneinheit in der Nähe der kleinen Spule, so kommt zu dem obigen $\int E\,dt$ hinzu $4\pi m \cdot N$. Hierfür kann man schreiben $4\pi q \varkappa \mathfrak{H}\cdot N$, wenn q der Querschnitt, $\varkappa$ der Magnetisierungskoeffizient des Eisens ist. Füllt der Stab die Spule ganz aus, so ist $r^2\pi = q$, also das gesamte Integral der el. Kraft $= qN(1 + 4\pi\varkappa)\cdot\mathfrak{H} = qN\mathfrak{B}$, wenn $(1 + 4\pi\varkappa)\mathfrak{H} = \mathfrak{B}$ geschrieben wird. $\mathfrak{B}$ ist die „Induktion" im Eisen; vgl. 115 und 22b.

2) Liegt die kurze Spule innerhalb der langen, so ist $\int E\,dt = 4\pi n i \cdot f$, wo f die gesamte Windungsfläche der kurzen Spule bedeutet. fi entspricht dem M in Nr. 26 bei „Magnetinduktor".

Für zwei beliebige geschlossene Leiter ist der gegenseitige Ind.-Koeffizient gleich $\int\int \frac{1}{r}\cos(dl_1, dl_2)\cdot dl_1 dl_2$, wenn dl_1 und dl_2 die in einer bestimmten Richtung herum gezählten Längenelemente der Leiter bedeuten und r den gegenseitigen Abstand von dl_1 und dl_2 (Neumann).

In der Sprache der Kraftlinien kann man S gleich der Summe der magnetischen Kraftlinien setzen, welche bei der Entstehung der Stromeinheit in der induzierenden Leitung durch die sämtlichen Windungen der induzierten Spule neu hindurchtreten (Vorzeichen!).

Die dem Ohm-Ampere-Volt-System entsprechende Einheit ist der **Quadrant** oder das **Henry** $= 10^9$ [cm].

29. Leitungswiderstand, elektromagn. gemessen $w = [lt^{-1}]$. Der **Widerstand** des Leiters ist Eins, in welchem die elektromotorische Kraft Eins den Strom Eins erzeugt; [cm/sek $= 111\cdot 10^{-23}$ el.-stat. CGS $= 10^{-9}\,\Theta$].

Widerstand = El. Kraft/Strom $= [l^{3/2} m^{1/2} t^{-2}]/[l^{1/2} m^{1/2} t^{-1}] = [l/t]$, q. e. d. Der Widerstand erscheint also gleichbedeutend mit einer **Geschwindigkeit** und läßt sich in der Tat durch eine solche darstellen. Z. B. ist der Widerstand eines geradlinigen Drahtes von der Längeneinheit gegeben durch die Geschwindigkeit, mit der man ihn in einem magnetischen

Felde Eins unter den S. 601 beschriebenen Verhältnissen bewegen muß, damit in ihm der Strom Eins entstände, wenn die Enden durch einen widerstandslosen Leiter (auf welchen natürlich keine Induktion stattfinden dürfte) mit einander verbunden wären.

1 cm³-Quecksilber-Würfel von 0° hat den Widerstand 94070 cm/sek; 1 el.-stat. Widerstandseinheit sek/cm = 900·10¹⁸ cm/sek el.-magn.

Praktische Einheit. 1 Ohm = 10⁹ cm/sek = 1 V/A = 1,063 Siem.-E. oder = 1,063 m/mm² Hg 0° = $\frac{1}{900}\cdot 10^{-9}$ elektrostat. CGS-Widerstands-Einheiten [1]).

Das frühere „legale" Ohm ist = 1,060 m/mm² Hg 0° = 0,9972 richtige Ohm.

Spezifischer Widerstand $[l^2 t^{-1}]$. Den spez. Widerstand Eins hat ein Leiter, welcher als Säule von der Länge und dem Querschnitte Eins den Widerstand Eins ergibt.

Im el.-magn. CGS-System ist also der spez. Widerstand des Quecksilbers bei 0° = 94070 cm²/sek. — Rechnet man den Widerstand in Ohm, die Länge in m, den Querschnitt in mm², so ist der spez. Widerstand Hg 0° gleich 0,9407 zu setzen. — Der reziproke spez. Widerstand heißt Leitvermögen des Körpers.

30. Stromleistung $L = [l^2 m t^{-3}]$. Die Einheit wird geleistet durch den Strom Eins im Widerstande Eins, oder auch durch die el. Kraft Eins, wenn sie den Strom Eins erzeugt; [cm² gr sek⁻³ = 1 Erg/sek = 10⁻⁷ Watt = 1,020·10⁻⁸ Kilogrammgewichtmeter/sek = 136·10⁻¹² Pferdestärke = 2,39·10⁻⁸ gr-Kal/sek].

Die Leistung ist also allgemein $L = Ei$; sie ist $= i^2 w$, sobald sie ausschließlich in der Überwindung des Leitungswiderstandes besteht, also z. B. keine Elektrolyse, elektromagnetische Arbeit oder Induktion auf einen anderen Leiter vorliegt.

Die Stromarbeit in der Zeit t ist $Q = Eit$, oder mit obiger Einschränkung $= i^2 w t$. Dieser Satz gilt sowohl für das elektrostatische wie das elektromagnetische System. Daß das Produkt el. Kraft (Potential) mal Stromstärke mal Zeit in beiden Fällen die Dimension $l^2 m t^{-2}$, d. h. die einer Arbeit hat, ist S. 585 gezeigt worden. — Nennt man die Wärmemenge Eins, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist, so ist Q auch die entwickelte Stromwärme (Clausius, W. Thomson).

Ableitung. Der obige Satz bedarf für das elektrostatische System keines Beweises. Für das elektromagnetische folgt er z. B aus den Gesetzen der Induktion in einem bewegten metallischen Leiter (S. 602) und der Erhaltung der Energie. Denn in einem geschlossenen Leiter, der unter dem Einfluß eines Magnetes bewegt wird, wird ein Strom induziert,

1) Gesetzlich sind die Definitionen der praktischen Einheiten: Ω = 1,063 m/mm² Hg 0°; A = 1,118 mg Silber/sek; V = Ω × A.

auf den nun durch den Magnet eine mechanische („ponderomotorische") Kraft ausgeübt wird, welche stets der wirklich ausgeführten Bewegung entgegenwirkt. Man verrichtet also durch diese Bewegung eine Arbeit, und deren Größe wird durch das Produkt aus dem Weg in die widerstehende Kraft gemessen. Der Weg ist = Geschwindigkeit × Bewegungsdauer $= u \cdot t$; die Kraft ist jedenfalls der Stärke i des induzierten Stromes proportional. Wir können also die Kraft $= p \cdot i$ setzen und die verrichtete mechanische Arbeit $= p \cdot i u t$.

Der Faktor p bedeutet offenbar die Kraft, welche unter den gegebenen Verhältnissen von dem Magnet auf einen Strom Eins im Leiter ausgeübt werden würde. Dann aber sagt das Induktionsgesetz (S. 602), daß pu die induzierte el. Kraft E nach absolutem Maße darstellt; wir haben also die verrichtete Arbeit $piut = Eit$. Dies heißt: wenn wir einen Leiter so bewegen, daß durch Magnet-Induktion in ihm die el. Kraft E und der Strom i entsteht, so verrichten wir während der Zeit t die mechanische Arbeit Eit oder i^2wt.

Da nun nach ausgeführter Bewegung als Wirkung dieser Arbeit in einem metallischen Leiter nur die durch den Strom in dem Leiter entwickelte Wärmemenge vorhanden ist, so folgt aus dem Gesetze der Gleichheit von Wärme und Arbeit, daß Eit (oder i^2wt) eben diese Wärmemenge darstellt, in welche die mechanische Arbeit durch Vermittelung des Stromes umgesetzt worden ist; natürlich die Wärmemenge als Einheit angenommen, welche der Arbeitseinheit äquivalent ist.

Unmittelbar aber ist die in dem Leiter entwickelte Wärme doch nur eine innere Wirkung des Stromes, und so haben wir in i^2wt oder Eit die Wärmemenge gegeben, welche ein Strom i entwickelt, wenn er einen Leiter vom Widerstande w durchfließt, oder wenn er von der el. Kraft E hervorgebracht wird; mit anderen Worten i^2wt ist die von dem Strome verrichtete innere Arbeit.

Praktische Einheit der Stromleistung; 1 Watt $= 1\,\text{V} \times \text{A} = 10^7$ CGS; 1 Wattsekunde oder 1 Joule $= 10^7$ Erg.

Stromerzeugung durch chemische Prozesse; galvanische Elemente. Der Verbrauch von 1 gr-Äqu. im Element gibt (vgl. Nr. 23) die Strommenge $it = 9654$ CGS, also bei der el. Kraft E die el. Arbeit (einschließlich der Stromwärme) $9654\,E$ Erg. Würde die in Erg ausgedrückte (also, wenn sie in gr.-Kal. gemessen war, mit 41900000 multiplizierte) Wärmeentwickelung Q, welche dem chemischen Prozeß im Element pro gr-Äquivalent entspricht, ganz in elektrische Energie umgesetzt, so würde demnach die elektromotorische Kraft $E = Q/9654$ CGS $= Q/(9654 \cdot 10^8)$ V sein müssen.

Beim Daniell-Element trifft dies nahe zu. Nach J. Thomson gibt nämlich die gleichzeitige Auflösung von 1 gr-Äqu. Zn zu $ZnSO_4$ und Abscheidung von Cu aus $CuSO_4$ die Wärmetönung 25060 gr-Kal. also

$Q = 25060 \cdot 41900000 = 105 \cdot 10^{10}$ Erg. Folglich ist $Q/9654 = 1{,}09 \cdot 10^{8}$. Die el. Kraft andererseits beträgt etwa $E = 1{,}1$ V $= 1{,}1 \cdot 10^{8}$ CGS, hat also nahe den berechneten Wert. Ähnliches gilt vom Weston'schen Cadmium-Quecksilber-Element.

Bei den meisten Elementen aber, z. B. beim Clark-Element Zink-Quecksilber ist die el. Kraft kleiner als die aus der Wärmetönung berechnete

Temperatureinfluß auf die el. Kraft eines Elements. Für ein „umkehrbares" Element, d. h. ein Element, in welchem der Wechsel der Stromrichtung den chemischen Prozeß umkehrt (z. B. Cu-Zn mit $CuSO_4$ und $ZnSO_4$, oder die „Normalelemente" Hg-Zn bez. Hg-Cd mit Hg_2SO_4 und $ZnSO_4$ bez. $CdSO_4$) gilt nach einer auf den zweiten Hauptsatz der mechanischen Wärmetheorie gegründeten Ableitung von Helmholtz die folgende Beziehung.

Es seien E bez. $E + \mathrm{d}E$ die el. Kräfte des Elements bei den abs. Temperaturen T bez. $T + \mathrm{d}T$; Q habe die im vorigen angegebene Bedeutung. Dann ist der Temp.-Koeffizient der el. Kraft

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}T} = \frac{1}{T}\left(E - \frac{Q}{9654}\right).$$

Die Temperatur ist mithin ohne Einfluß, wenn die el. Kraft genau der chemischen Wärmetönung entspricht. Nach dem vorigen haben also das Daniell- und das Weston-Element sehr kleine Temperaturkoeffizienten. Die meisten anderen, z. B. das Clark-Element, müssen, weil bei ihnen $E < Q/9654$ ist, eine mit wachsender Temperatur abnehmende el. Kraft zeigen.

Stromwärme. Der Strom 1 $cm^{1/2} gr^{1/2} sek^{-1}$ im Widerstande 1 Ω $= 10^9$ cm sek^{-1} verrichtet in der Sekunde die Arbeit 10^9 $cm^2 gr\, sek^{-3}$. Da nun der Wasser-gr-Kalorie (vgl. Nr. 9a) 41900000 solcher Arbeitseinheiten entsprechen, so beträgt die vom Strome 1 CGS in 1 Ω entwickelte Wärmemenge $10^9/41900000 = 23{,}9$ gr-Kal. Nach dem Ausdruck $Q = i^2 wt$, und da 1 A $= 0{,}1$ CGS ist, entwickelt also der Strom i A in w Ω während t sek die Wärmemenge $0{,}239 \cdot i^2 wt$ gr-Kal.

Zu gleichem Ergebnis führt die folgende Rechnung: Die el. Kraft 1 V $= 10^8$ $cm^{3/2} gr^{1/2} sek^{-2}$ bringe den Strom 1 A $= 0{,}1$ $cm^{1/2} gr^{1/2} sek^{-1}$ hervor, erzeuge also in 1 sek die Arbeit 10^7 $cm^2 gr\, sek^{-3} = 10^7$ Erg $= 10^7 \cdot 1020 \cdot 10^{-9} = 102$ m×gr-Gew. (vgl 9). Da 1 m×gr-Gew. $= 1/427$ gr-Kal., so beträgt die Wärmeentwicklung $102/427 = 0{,}239$ gr-Kal.

Es ist also 1 Wattsekunde oder Joule $= 0{,}239$ gr-Kal.; 1 Wattstunde $= 860$ gr-Kal. Eine 16kerzige Glühlampe verbraucht etwa 50 Watt, entwickelt also $50 \cdot 0{,}239 = 12$ gr-Kal./sek.

Die verschiedenen Umrechnungszahlen zusammengestellt sind:
1 Watt $= 10^7$ Erg/sek $= 0{,}102$ Kilogrammgewichtmeter/sek $= 0{,}00136$ Pferdestärke $= 0{,}239$ gr-Kal./sek

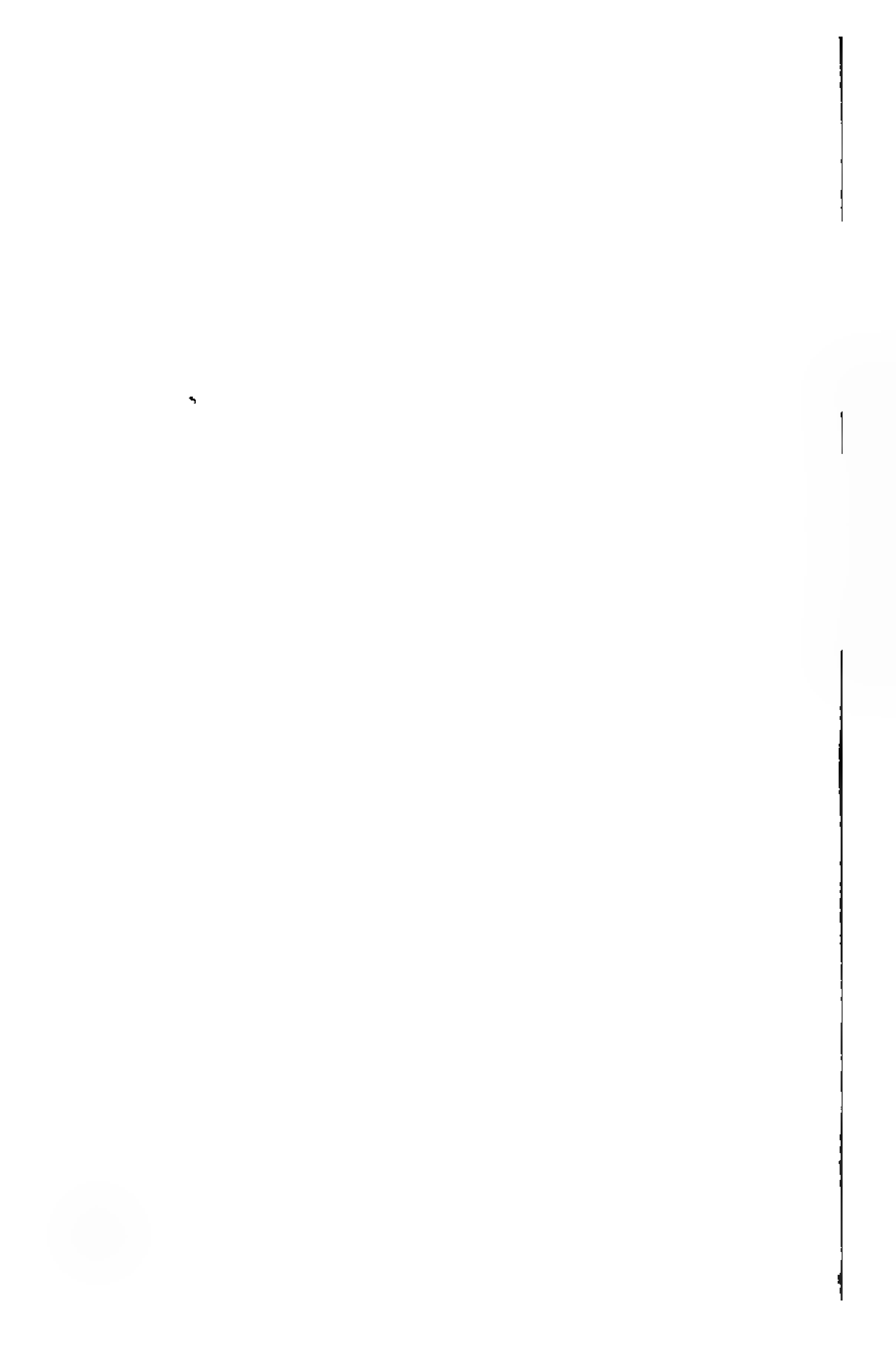
Die Weber'schen Einheiten des elektrischen Stromes lassen sich nach dem vorigen auf zwei Wegen ableiten. Die ursprünglichen Definitionen benutzen die Gesetze der elektromagnetischen Kraftwirkung und der Magnetoinduktion und bestimmen 1) als Stromeinheit den Strom, welcher unter normalen Verhältnissen elektromagnetisch die Einheit der Kraft ausübt oder erleidet; 2) als elektromotorische Kraft Eins die el. Kraft, welche in einem Stromleiter durch die Einheit magnetoelektrischer Beeinflussung induziert wird. 3) Die Widerstandseinheit wird nach dem Ohm'schen Gesetz als der Widerstand eines Leiters definiert, in dem die el. Kraft Eins die Stromeinheit erzeugt.

Von den beiden ersten, auf die Wechselbeziehungen zwischen Elektrizität und Magnetismus gegründeten Definitionen genügt aber eine einzige, wenn man auf einem der folgenden Wege in die Grundlagen des Maßsystems die Stromleistung einführt.

Einerseits kann man davon ausgehen, die Stromeinheit nach Weber elektromagnetisch festzulegen. Daran anschließend läßt sich als zweite Einheit entweder die Einheit der elektromotorischen Kraft definieren als die el. Kraft, welche, wenn sie den Strom Eins erzeugt, die Einheit der Leistung verrichtet; oder aber die Widerstandseinheit als der Widerstand eines Leiters, in dem der Strom Eins die Leistung Eins hervorbringt.

Andrerseits kann man von der, oben auf die Magnetoinduktion gegründeten Einheit der elektromotorischen Kraft ausgehen und daran als zweite Einheit entweder den Strom anschließen, durch dessen Erzeugung, oder den Widerstand, durch dessen Überwindung die elektromotorische Kraft Eins die Einheit der Arbeitsleistung verrichtet.

Den Abschluß bildet jedesmal die Zurückführung der dritten Einheit auf das Ohm'sche Gesetz. Das entstehende Maßsystem ist in allen Fällen das gleiche.



Tabellen.

1. Reduktion einer mit Messinggewichten ausgeführten Wägung auf den leeren Raum.

s	k	s	k	s	k
0,7	+ 1,57	2,0	+ 0,457	8	+ 0,007
0,8	1,36	2,5	0,337	9	− 0,010
0,9	1,19	3,0	0,257	10	− 0,023
1,0	1,06	3,5	0,200	11	− 0,034
1,1	0,95	4,0	0,157	12	− 0,043
1,2	0,86	4,5	0,124	13	− 0,051
1,3	0,78	5,0	0,097	14	− 0,057
1,4	0,71	5,5	0,075	15	− 0,063
1,5	0,66	6,0	0,057	16	− 0,068
1,6	0,61	6,5	0,042	17	− 0,072
1,7	0,56	7,0	0,029	18	− 0,076
1,8	0,52	7,5	0,017	19	− 0,080
1,9	0,49	8,0	+ 0,007	20	− 0,083
2,0	+ 0,46			21	− 0,086

$$k = 1{,}20\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{8{,}4}\right).$$

Wiegt ein Körper von der Dichtigkeit s in der Luft m Gramm, so sind mk Milligramm hinzuzufügen, um die Wägung auf den leeren Raum zu reduzieren. Vgl. 13.

2. Dichtigkeit fester und flüssiger Körper.

				Flüssigkeiten bei 18°.	
Aluminium	2,7	Nickel	8,8		
Blei	11,3	Platin	21,4		
Braunstein	5,0	Quarz, Kristall	2,65	CO_2 0,8; NH_3 0,6; SO_2	1,4
Bronze	8,7	„ verglast	2,20	Äther $C_4H_{10}O$	0,717
Eisen, Schmiede-	7,8	Schwefel	2,0	Äthylacetat $C_4H_8O_2$	0,90
Guß-	7,1—7,7	Silber	10,5	Alkohol C_2H_6O	0,7911
Draht	7,7	Wachs	0,96	Ameisensäure CH_2O_2	1,22
Gußstahl	7,8	Wismut	9,8	Amylacetat (i) $C_7H_{14}O_2$	0,88
Elfenbein	1,9	Zink	7,1	Amylalkohol $C_5H_{12}O$	0,81
Glas (vgl. 3, 5)	2,4—2,6	Zinn	7,3	Anilin C_6H_7N	1,02
Flintglas	3,0—5,9	Eis	0,9167	Benzol C_6H_6	0,881
Gold	19,3	KCl	1,98	Bromoform $CHBr_3$	2,86
Gips	2,32	KNO_3	2,09	Chloroform $CHCl_3$	1,498
Hartkautschuk	1,2	K_2SO_4	2,65	Essigsäure $C_2H_4O_2$	1,053
Holz, Eben-	1,2	KOH	2,0	Glycerin $C_3H_8O_3$	1,26
Buchen-	0,7	NaCl	2,15	Jodmethylen CH_2J_2	3,3
Eichen-	0,7	$NaNO_3$	2,24	Methylacetat $C_3H_6O_2$	0,93
Tannen-	0,5	$Na_2SO_4 + 10\,H_2O$	1,46	Methylalkohol CH_4O	0,80
Kalium	0,87	$Na_2CO_3 + 10\,H_2O$	1,46	Nitrobenzol $C_6H_5O_2N$	1,21
Kalkspat	2,71	$BaCl_2$	3,85	Olivenöl	0,91
Konstantan	8,8	$SrCl_2$	3,05	Petroleum	0,8
Kork	0,2	NH_4Cl	1,52	Phenol C_6H_6O	1,06
Kupfer	8,3—8,9	AgCl	5,56	Schwefelkohlenst. CS_2	1,265
Magnesium	1,7	$MgSO_4 + 7\,H_2O$	1,68	Terpentinöl	0,87
Manganin	8,4	$ZnSO_4 + 7\,H_2O$	2,01	Toluol C_7H_8	0,89
Messing	8,1—8,6	$CuSO_4 + 5\,H_2O$	2,27	Xylol C_8H_{10}	0,87
Natrium	0,98	Weinsäure $C_4H_6O_6$	1,76	Quecksilber 18°	13,552
Neusilber	8,5	Zucker $C_{12}H_{22}O_{11}$	1,59	„ 0°	13,596

3. Spezifisches Gewicht wässriger Lösungen bei 18°, bezogen auf Wasser von 4°.

%	KOH	KCl	KBr	KJ	KNO_3	K_2SO_4	K_2CO_3	$K_2Cr_2O_7$	%
0	0,999	0,9986	0,9986	0,9986	0,9986	0,9986	0,9986	0,999	0
5	1,045	1,0308	1,0350	1,0363	1,0305	1,0395	1,0442	1,035	5
10	1,092	1,0633	1,0732	1,0762	1,0632	1,0818	1,0910	1,072	10
15	1,140	1,0978	1,114	1,120	1,097		1,140	1,109	15
20	1,190	1,1335	1,157	1,1679	1,133		1,191		20
25	1,240		1,204	1,218			1,244		25
30	1,293		1,254	1,278			1,299		30
35	1,347		1,307	1,332			1,356		35
40	1,405		1,365	1,397			1,415		40
45	1,464		1,429	1,468			1,477		45
50	1,53			1,545			1,541		50
55	1,59			1,630					55
60	1,66			1,731					60

%	NH_3	NH_4Cl	NaOH	NaCl	$NaNO_3$	NaAc	Na_2CO_3	LiCl	%
0	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0,9986	0,999	0,999	0,9986	0
5	0,978	1,0142	1,056	1,0345	1,0327	1,026	1,051	1,0274	5
10	0,958	1,0289	1,112	1,0711	1,0681	1,051	1,104	1,0563	10
15	0,940	1,0430	1,169	1,1090	1,105	1,078	1,159	1,085	15
20	0,923	1,0571	1,225	1,1485	1,144	1,105		1,115	20
25	0,908	1,0710	1,281	1,1897	1,185	1,132		1,147	25
30	0,893		1,336		1,227	1,160		1,181	30
35	0,881		1,389		1,270			1,217	35
40			1,440		1,314			1,255	40
45			1,49		1,365				45
50			1,54		1,42				50

%	$BaCl_2$	$SrCl_2$	$CaCl_2$	$MgCl_2$	$MgSO_4$	$ZnSO_4$	$CdSO_4$	$CuSO_4$	%
0	0,999	0,9986	0,999	0,999	0,999	0,909	0,9986	0,999	0
5	1,044	1,0443	1,041	1,042	1,050	1,051	1,0486	1,051	5
10	1,093	1,0932	1,085	1,086	1,104	1,107	1,1026	1,107	10
15	1,147	1,1456	1,131	1,130	1,160	1,167	1,1607	1,167	15
20	1,204	1,2023	1,170	1,176	1,220	1,232	1,2245	1,23*	20
25	1,268	1,256	1,230	1,225	1,283	1,305	1,2950	* über-	25
30		1,320	1,284	1,276		1,379	1,3725	sättigt	30
35			1,342	1,332			1,4575		35
40			1,400						40

%	$AgNO_3$	$PbAc_2$	HCl	HNO_3	H_2SO_4	H_3PO_4	Alkohol	Zucker	%
0	0,9986	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0,999	0,9986	0,9986	0
5	1,0422	1,036	1,0236	1,027	1,0323	1,027	0,9898	1,0183	5
10	1,0893	1,075	1,0482	1,056	1,0669	1,054	0,9824	1,0386	10
15	1,1404	1,118	1,0734	1,086	1,1030	1,083	0,9760	1,0597	15
20	1,1958	1,163	1,0989	1,118	1,1406	1,114	0,9696	1,0815	20
25	1,2555	1,212	1,1248	1,151	1,1796	1,145	0,9628	1,1042	25
30	1,3213	1,265	1,1508	1,184	1,2199	1,179	0,9551	1,1277	30
35	1,3945	1,322	1,1757	1,217	1,2614	1,214	0,9463	1,1520	35
40	1,4773	1,386	1,199	1,250	1,3043	1,251	0,9367	1,1773	40
45	1,5705			1,283	1,349	1,290	0,9264	1,2034	45
50	1,6745			1,314	[illegible]	1,330	0,9155	1,2304	50
55	1,7895			1,344	1,447	1,373	0,9043	1,2584	55
60	1,9158			1,372	1,500	1,418	0,8928	1,2874	60
65				1,397	1,555	1,464	0,8811	1,3173	65
70				1,418	[illegible]	1,512	0,8693	1,3482*	70
75				1,438	1,671	1,562	0,8574	1,380*	75
80				1,457	1,729	1,615	0,8452	* über-	80
85				1,473	[illegible]	1,672	0,8327	sättigt	85
90				1,489	1,817		0,8197		90
95				1,50	1,836		0,8060		95
100				1,52	1,833		0,7911		100

Größtenteils nach Gerlach (ZS f. anal. Chem. 8, 279. 1869) und Kohlrausch (Pogg. Ann. 159, 257. 1876; Wied. Ann. 6, 38 1879); auch Carius, Lunge, Mendeléeff, Schiff, Normal-Eichungskommission. H_2SO_4 ausführlich Wiss. Abh. d. NEK 5. Heft 1904. Die Haupttabelle 3 daselbst bezieht sich auf Wasser von 15°!

Der Prozentgehalt bedeutet die in 100 Gewichtsteilen der Lösung enthaltenen Gewichtsteile der überschriebenen wasserfreien Verbindung.

3a. Ausdehnungskoeffizient wässriger Lösungen um 18°.

Großenteils nach Gerlach, Forch, Plato. — Die Zahlen geben $10^6 \cdot \frac{1}{v} \frac{dv}{dt}$.

	0%	5%	10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	90%	100%
KCl	19	24	29	40								
NaCl ...	19	25	30	40								
LiCl ...	19	20	22	25	27	30						
KNO_3 ..	19	26	32									
$NaNO_3$.	19	30	36									
$LiNO_3$ ..	19	26	[illegible]									
K_2SO_4 ..	19	25	27									
Na_2SO_4 .	19	26	30									
$MgSO_4$.	19	23	27	29								
H_2SO_4 .	19	30	40	58	70	75	79	[illegible]	92	104	107	103
Alkohol.	19	18	23	42	64	79	86	92	[illegible]	103	107	104
Zucker..	19	20	21	25	29	32	35	37	39			

3b. Wässrige Normallösungen von 1 gr-Äqu./Liter bei 18°.

Gehalt A, p; Dichte s; Wärmeausdehnung $-ds/dt$; Leitvermögen $\varkappa$ mit Temp.-Koeffizient $+\left(\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt}\right)_{18}$; Überführungszahl n des Anions

A Äquivalentgewicht (O = 16,00) oder Konzentration in gr/liter.

p Prozentgehalt in 100 Gewichtsteilen der Lösung.

s, $\varkappa$, $-ds/dt$ u. $d\varkappa/dt$ meist nach F. K. mit M. Maltby, v. Steinwehr, Grüneisen; $-ds/dt$ auch nach Gerlach und Forch; n meist nach Hittorf.

	A	p	$s_{18/4}$	$-\frac{ds}{dt_{18}}$	$\varkappa_{18}$	$\frac{1}{\varkappa}\frac{d\varkappa}{dt_{18}}$	n
KOH	56,16	5,359	1,0479	0,00030	0,184	0,0186	0,74
KCl	74,60	7,139	1,0449	27	,09826	193	0,51
KBr	119,11	11,01	1,0814	29	,108	190	0,51
KJ	166,00	14,841	1,1187	33	,1086	190	0,51
KSCN	97,25	9,300	1,0457		,916	192	(0,5,
KF	58,15	5,553	1,0472	25	,0760	—	(0,4)
KNO_3	101,19	9,544	1,0602	33	,0805	200	0,49
$KC_2H_3O_2$ ...	98,17	9,378	1,0468		,0684	215	0,33
$\frac{1}{2}K_2SO_4$	87,16	8,178	1,0660	29	,07159	205	0,50
$\frac{1}{2}K_2CO_3$	69,15	6,538	1,0577	27	,0707	215	0,43
$\frac{1}{2}K_2C_2O_4$	83,15	7,861	1,0577	29	,0787	205	(0,45)
NH_4Cl	53,52	5,271	1,0153	24	,0970	194	0,51
NaOH	40,06	3,844	1,0420	31	,160	197	0,83
NaCl	58,50	5,629	1,0392	28	,07435	212	0,64
$NaNO_3$	85,09	8,070	1,0544	35	,0659	215	0,61
$NaC_2H_3O_2$.	82,05	7,897	1,040	22	,0412	250	0,42
$\frac{1}{2}Na_2SO_4$	71,08	6,703	1,0604	31	,0508	236	0,64
$\frac{1}{2}Na_2CO_3$	53,07	5,044	1,0515	29	,0455	246	0,55
LiCl	42,48	4,157	1,0226	22	,06336	220	0,74
$LiNO_3$	69,07	6,651	1,0385	28	,0608	—	(0,7)
$\frac{1}{2}Li_2SO_4$	55,06	5,271	1,0446	24	,04135	230	(0,7)
$\frac{1}{2}BaCl_2$	104,15	9,563	1,0891	31	,0701	205	0,64
$\frac{1}{2}SrCl_2$	79,26	7,426	1,0674	28	,0685	207	0,65
$\frac{1}{2}Sr(NO_3)_2$ ...	105,84	9,783	1,0819	33	,0521	220	(0,64
$\frac{1}{2}CaCl_2$	55,50	5,319	1,0435	25	,0675	213	0,67
$\frac{1}{2}Ca(NO_3)_2$ ...	82,09	7,754	1,0587	32	,0559	215	0,63
$\frac{1}{2}MgCl_2$	47,63	4,589	1,0379	23	,0615	217	0,71
$\frac{1}{2}MgSO_4$	60,21	5,694	1,0574	26	,02891	225	0,7
$\frac{1}{2}CdSO_4$	104,23	9,501	1,0970	28	,0236	204	(0,7,
$\frac{1}{2}ZnCl_2$	68,15	6,442	1,0576		,055	22	(0,7
$\frac{1}{2}ZnSO_4$	80,78	7,481	1,0791	27	,02621	218	0,68
$\frac{1}{2}CuSO_4$	79,83	7,407	1,0777	28	,02577	216	0,70
$AgNO_3$	169,97	14,91	1,140		,0676	210	0,50
$\frac{1}{2}Pb(NO_3)_2$ ...	165,5	14,53	1,1393		,0420	250	
HCl	36,46	3,587	1,0165		,300	159	0,17
HNO_3	63,05	6,107	1,0325	31	,299	150	0,17
$\frac{1}{2}H_2SO_4$	49,04	4,758	1,0307	30	,197	120	0,17
Zucker	342,2	30,30	1,1294	34			

4. Dichtigkeit des Wassers

für die Temperatur t des Wasserstoff-Thermometers (Thiesen, Scheel u. Diesselhorst, Wiss. Abh. der P T. Reichsanst. 3, S. 68, 1900)

und

Volumen V eines Glasgefäßes bei 18°,

welches bei t^0 mit Messinggewichten in Luft von der Dichtigkeit 0,00120 gewogen, scheinbar 1 gr Wasser faßt, in ccm.

Ausd.-Koeff. des Glases = $^1/_{40000}$ gesetzt

0°	0,999 86$_8$	+ 5$_9$	1,001 64	− 8
1	0,999 92$_7$	+ 4$_1$	1,001 56	− 7
2	0,999 96$_8$	+ 2$_4$	1,001 49	− 5
3	0,999 99$_2$	+ 0$_8$	1,001 44	− 3
4	1,000 00$_0$	− 0$_8$	1,001 41	− 2
5	0,999 99$_2$	− 2$_4$	1,001 39	
6	0,999 96$_8$	− 3$_9$	1,001 39	+ 1
7	0,999 92$_9$	− 5$_3$	1,001 40	+ 3
8	0,999 87$_6$	− 6$_8$	1,001 43	+ 4
9	0,999 80$_8$	− 8$_1$	1,001 47	+ 6
10	0,999 72$_7$	− 9$_5$	1,001 53	+ 7
11	0,999 63$_2$	− 10$_7$	1,001 60	+ 8
12	0,999 52$_5$	− 12$_1$	1,001 68	+ 10
13	0,999 40$_4$	− 13$_3$	1,001 78	+ 11
14	0,999 27$_1$	− 14$_5$	1,001 89	+ 12
15	0,999 12$_6$	− 15$_6$	1,002 01	+ 13
16	0,998 97$_0$	− 16$_9$	1,002 14	+ 15
17	0,998 80$_1$	− 17$_9$	1,002 29	+ 15
18	0,998 62$_2$	− 19$_0$	1,002 44	+ 17
19	0,998 43$_2$	− 20$_2$	1,002 61	+ 17
20	0,998 23$_0$	− 21$_1$	1,002 78	+ 19
21	0,998 01$_9$	− 22$_2$	1,002 97	+ 20
22	0,997 79$_7$	− 23$_2$	1,003 17	+ 21
23	0,997 56$_5$	− 24$_2$	1,003 38	+ 22
24	0,997 32$_3$	− 25$_2$	1,003 60	+ 23
25	0,997 07$_1$	− 26$_1$	1,003 83	+ 23
26	0,996 81$_0$	− 27$_1$	1,004 06	+ 25
27	0,996 53$_9$	− 28$_0$	1,004 31	+ 26
28	0,996 25$_9$	− 28$_8$	1,004 57	+ 27
29	0,995 97$_1$	− 29$_8$	1,004 84	+ 27
30	0,995 67$_3$		1,005 11	

5. Spezifisches Volumen des Wassers,

d. h. Volumen eines Grammes Wasser in Kubikcentimetern, zwischen 0 und 100°

für die Temperatur des Wasserstoffthermometers. (Von 40° an Thiesen, Wiss. Abh. d. P. T Reichsanst. 4, S. 32, 1904.)

Temp.	Volumen	Zunahme auf 1°.
0°	1,000 13	
4	1,000 00	
10	1,000 27	0,000 12
15	1,000 87	0,000 18
20	1,001 77	0,000 23
25	1,002 94	0,000 28
30	1,004 35	0,000 33
35	1,005 98	0,000 37
40	1,007 82	0,000 41
45	1,009 85	0,000 44
50	1,012 07	0,000 48
55	1,014 48	0,000 51
60	1,017 05	0,000 55
65	1,019 79	0,000 58
70	1,022 70	0,000 61
75	1,025 76	0,000 65
80	1,028 99	0,000 68
85	1,032 37	0,000 71
90	1,035 90	0,000 74
95	1,039 59	0,000 76
99	1,042 65	0,000 78
100	1,043 43	0,000 79
101	1,044 22	0,000 79
102	1,045 01	

6. Spezifisches Gewicht der trockenen atmosphärischen Luft,

bezogen auf Wasser von 4°,

bei $t°$ und dem Drucke H mm Quecksilber von 0° unter 45° Breite, berechnet als (13) $\frac{0{,}0012932}{1+0{,}00367\,t}\,\frac{H}{760}$.

Bestandteile der Luft { nach Volumen 21,0 Sauerstoff, 78,05 Stickstoff, 0,95 Argon
{ nach Gewicht 23,2 „ 75,5 „ 1,3 „ .

Die Zahl 0,0012932 nimmt als Volumgehalt an Kohlensäure 3/10000 an.

t	Druck $H = 700$	710	720	730	740	750	760	770
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
0°	1191	1208	1225	1242	1259	1276	[illegible]	1310
1	1187	1204	1221	1238	1255	1272	1288	1305
2	1182	1199	1216	1233	1250	1267	1284	1301
3	1178	1195	1212	1229	1245	1262	1279	1296
4	1174	1191	1207	1224	1241	1258	1274	1291
5	1170	1186	1203	1220	1236	1253	1270	1287
6	1165	1182	1199	1215	1232	1249	[illegible]	1282
7	1161	1178	1194	1211	1228	1244	1261	1277
8	1157	1174	1190	1207	1223	1240	1256	1273
9	1153	1169	1186	1202	1219	1235	1252	1268
10	1149	1165	1182	1198	1215	1231	1247	[illegible]
11	1145	1161	1178	1194	1210	1227	1243	1259
12	1141	1157	1173	1190	1206	1222	1239	1255
13	1137	1153	1169	1186	1202	1218	1234	1251
14	1133	1149	1165	1181	1198	1214	1230	1246
15	1129	1145	1161	1177	1193	1210	1226	1242
16	1125	1141	1157	1173	1189	1205	1221	1238
17	1121	1137	1153	1169	1185	1201	1217	[illegible]
18	1117	1133	1149	1165	1181	1197	1213	1229
19	1113	1129	1145	1161	1177	1193	1209	1225
20	1110	1126	1141	1157	1173	1189	1205	1221
21	1106	1122	1137	1153	1169	1185	1201	1216
22	1102	1118	1134	1149	1165	1181	1197	1212
23	1098	1114	1130	1145	1161	1177	1193	[illegible]
24	1095	1110	1126	1142	1157	1173	1189	1204
25	1091	1107	1122	1138	1153	1169	1185	1200
26	1087	1103	1118	1134	1149	1165	1181	1196
27	1084	1099	1115	1130	1146	1161	1177	1192
28	1080	[illegible]	1111	1126	1142	1157	1173	1188
29	1077	1092	1107	1123	1138	1153	1169	1184
30	1073	1088	1104	1119	1134	1150	1165	1180

P. P.

mm	17	mm	16	mm	[illegible]
1	2	1	2	1	1
2	3	2	3	2	[illegible]
3	5	3	5	3	4
4	7	4	6	4	6
5	[illegible]	5	8	5	7
6	10	6	10	6	9
7	[illegible]	7	11	7	10
8	14	8	13	8	12
9	[illegible]	9	14	9	13

7. Reduktion eines Gasvolumens auf 0° und 760 mm.

Volumen v und Dichtigkeit s eines Gases, bei der Temperatur t und dem Drucke H gemessen, werden für 0° und 760 mm, wenn $\alpha = 0,00367$ ist,

$$v_0 = \frac{v}{1+\alpha t} \cdot \frac{H}{760} \quad \text{und} \quad s_0 = s(1+\alpha t)\frac{760}{H}.$$

t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$	t	$1+\alpha t$
0°	1,0000	40°	1,1468	80°	1,2936
1	1,0037	41	1,1505	81	1,2973
2	1,0073	42	1,1541	82	1,3009
3	1,0110	43	1,1578	83	1,[illegible]
[illegible]	1,0147	44	1,1615	84	1,[illegible]
5	1,0183	45	1,1651	85	1,3119
6	1,0220	46	1,1688	86	1,3156
7	1,0257	47	1,1725	87	1,3193
8	1,0294	48	1,1762	88	1,3230
9	1,0330	49	1,1798	89	1,3266
10	1,0367	50	1,1835	90	1,3303
11	1,0404	51	1,1872	91	1,3340
12	1,0440	52	1,1908	92	1,3376
13	1,0477	53	1,1945	93	1,3413
14	1,0514	54	1,1982	94	1,3450
15	1,0550	55	1,2018	95	1,3486
16	1,0587	[illegible]	1,2055	96	1,3523
17	1,0624	57	1,2092	97	1,[illegible]
18	1,0661	58	1,2129	98	1,3597
19	1,0697	59	1,2165	99	1,3633
20	1,0734	60	1,2202	100	1,3670
21	1,0771	61	1,2239	101	1,3707
22	1,0807	62	1,2275	102	1,3743
23	1,0844	63	1,2312	103	1,3780
24	1,0881	64	1,2349	104	1,3817
25	1,0917	65	1,2385	105	1,[illegible]
26	1,0954	66	1,2422	106	1,[illegible]
27	1,0991	67	1,2459	107	1,3927
28	1,1028	68	1,2496	108	1,3964
29	1,1064	69	1,2532	109	1,4000
30	1,1101	70	1,2569	110	1,4037
31	1,1138	71	1,2606	111	1,4074
32	1,1174	72	1,2642	112	1,4110
33	1,1211	73	1,2679	113	1,4147
34	1,1248	74	1,2716	114	1,4184
35	1,1284	75	1,2752	115	1,4220
36	1,1321	76	1,2789	116	1,4257
[illegible]	1,1358	77	1,2826	117	1,4294
38	1,1395	78	1,2863	118	1,4331
39	1,1431	79	1,2899	119	1,4367
40	1,1468	80	1,2936	120	1,4404

H mm	$H/760$	H mm	$H/760$
700	0,9211	740	0,9737
701	0,9224	741	0,9750
702	0,9237	742	0,9763
703	0,9250	743	0,9776
704	0,9263	744	0,9789
[illegible]	0,9276	745	0,9803
706	0,9289	746	0,9816
707	0,9303	747	0,9829
770	0,9316	748	0,9842
770	0,9329	749	0,9855
710	0,9342	750	0,9868
711	0,9355	751	0,9882
712	0,9368	752	0,9895
713	0,9382	753	0,9908
714	0,9395	754	0,9921
715	0,9408	755	0,9934
716	0,9421	756	0,9947
717	0,9434	757	0,9961
718	0,9447	758	0,9974
719	0,9461	759	0,9987
[illegible]	0,9474	760	1,0000
721	0,9487	761	1,0013
722	0,9500	[illegible]	1,0026
723	0,9513	763	1,0039
724	0,9526	764	1,0053
725	0,9539	765	1,0066
726	0,9553	[illegible]	1,0079
727	0,9566	767	1,0092
728	0,9579	768	1,0105
729	0,9592	769	1,0118
730	0,9605	770	1,0132
731	0,9618	771	1,0145
732	0,9632	772	1,0158
733	0,9645	773	1,0171
734	0,9658	774	1,0184
735	0,9671	775	1,0197
736	0,9684	776	1,0211
737	0,9697	777	1,0224
738	0,9711	778	1,0237
[illegible]	0,9724	779	1,0250
740	0,9737	780	1,0263

8. Reduktion der Barometerablesung auf 0°.

Von einem Barometerstande h, der bei t° an einem bei 0° richtigen Maßstabe abgelesen wird, ist $(0{,}000182 - \beta) h t$ abzuziehen. Der Ausdehnungskoeffizient β des Maßstabes ist in den Zahlen der Tabelle (für Messing) $= 0{,}000019$ angenommen. — Für einen Glas-Maßstab sind die Zahlen um $0{,}008\, t$ zu vergrößern; s. die letzte Spalte.

	Abgelesener Stand h in mm										
	680	690	700	710	720	730	740	750	760	770	$0{,}008\, t$
t	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
1°	0,11	0,11	0,11	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,12	0,13	0,01
2	0,22	0,22	0,23	0,23	0,23	0,24	0,24	0,24	0,25	0,25	0,02
3	0,33	0,34	0,34	0,35	0,35	0,36	0,36	0,37	0,37	0,38	0,02
4	0,44	0,45	0,46	0,46	0,47	0,48	0,48	0,49	0,50	0,50	0,03
5	0,55	0,56	0,57	0,58	0,59	0,59	0,60	0,61	0,62	0,63	0,04
6	0,67	0,67	0,68	0,69	0,70	0,71	0,72	0,73	0,74	0,75	0,05
7	0,78	0,79	0,80	0,81	0,82	0,83	0,84	0,86	0,87	0,88	0,06
8	0,89	0,90	0,91	0,93	0,94	0,95	0,96	0,98	0,99	1,00	0,06
9	1,00	1,01	1,03	1,04	1,06	1,07	1,09	1,10	1,11	1,13	0,07
10	1,11	1,12	1,14	1,16	1,17	1,19	1,21	1,22	1,24	1,26	0,08
11	1,22	1,24	1,26	1,27	1,29	1,31	1,33	1,34	1,36	1,38	0,09
12	1,33	1,35	1,37	1,39	1,41	1,43	1,45	1,47	1,49	1,51	0,10
13	1,44	1,46	1,48	1,50	1,53	1,55	1,57	1,59	1,61	1,63	0,10
14	1,55	1,57	1,60	1,62	1,64	1,67	1,69	1,71	1,73	1,76	0,11
15	1,66	1,69	1,71	1,74	1,76	1,78	1,81	1,83	1,86	1,88	0,12
16	1,77	1,80	1,83	1,85	1,88	1,90	1,93	1,96	1,98	2,01	0,13
17	1,88	1,91	1,94	1,97	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,13	0,14
18	2,00	2,02	2,05	2,08	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	0,14
19	2,11	2,14	2,17	2,20	2,23	2,26	2,29	2,32	2,35	2,38	0,15
20	2,22	2,25	2,28	2,31	2,35	2,38	2,41	2,45	2,48	2,51	0,16
21	2,33	2,36	2,40	2,43	2,46	2,50	2,53	2,57	2,60	2,64	0,17
22	2,44	2,47	2,51	2,55	2,58	2,62	2,65	2,69	2,73	2,76	0,18
23	2,55	2,59	2,62	2,66	2,70	2,74	2,77	2,81	2,85	2,89	0,18
24	2,66	2,70	2,74	2,78	2,82	2,86	2,89	2,93	2,97	3,01	0,19
25	2,77	2,81	2,85	2,89	2,93	2,97	3,02	3,06	3,10	3,14	0,20
26	2,88	2,92	2,97	3,01	3,05	3,09	3,14	3,18	3,22	3,26	0,21
27	2,99	3,04	3,08	3,12	3,17	3,21	3,26	3,30	3,34	3,39	0,22
28	3,10	3,15	3,19	3,24	3,29	3,33	3,38	3,42	3,47	3,51	0,22
29	3,21	3,26	3,31	3,36	3,40	3,45	3,50	3,55	3,59	3,64	0,23
30	3,33	3,37	3,42	3,47	3,52	3,57	3,62	3,67	3,72	3,77	0,24

9. Mittlerer Barometerstand b in der Höhe H Meter über dem Meeresspiegel.

Unter Annahme der Lufttemperatur 10° Vgl. 38.

$H =$	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900	1000 m
$b =$	760	751	742	733	724	716	707	699	690	[illegible]	674 mm
$H =$	1000	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000 m
$b =$	674	666	658	650	642	635	627	620	612	605	598 mm

10. Korrektion eines Thermometers auf das Gasthermometer.

Nach Chappuis, Thiesen, Scheel u. Sell, Wiebe u. Böttcher, Lemke; zusammengestellt von Scheel (Wied. Ann. 58, 168. 1896) u. Grützmacher (ib. 68, 769. 1899).

Unter 100°: Korrektion des Luft- und der Quecksilber-Thermometer aus Jenaer Glas XVI u. 59 sowie aus verre dur auf die Wasserstoffskale; über 100°: Korrektion auf das Luftthermometer.

Die Zahlen korrigieren die Ablesungen an einem in sich richtigen Thermometer. Vgl. S. 156.

Ables	Luft auf Wasserstoff	Auf Wasserstoff XVI	Auf Wasserstoff 59	Auf Wasserstoff v. dur	Ables	Auf Luft XVI	Auf Luft 59	Ables.	Auf Luft XVI
0°	±	±	±	±	100°	±	±	200°	—,04
5	—,004	—,03	—,01	—,03	105	+,01	—,00	205	—,07
10	—,007	—,06	—,02	—,05	110	+,03	—,00	210	—,11
15	—,009	—,08	—,03	—,07	115	+,04	—,01	215	—,16
20	—,010	—,09	—,04	—,08	120	+,05	—,02	220	—,21
25	—,010	—,10	—,04	—,10	125	+,06	—,03	225	—,26
30	—,010	—,11	—,04	—,10	130	+,07	—,04	230	—,33
35	—,010	—,12	—,04	—,11	135	+,08	—,06	235	—,39
40	—,010	—,12	—,03	—,11	140	+,09	—,08	240	—,47
45	—,009	—,12	—,03	—,11	145	+,10	—,10	245	—,55
50	—,009	—,12	—,03	—,10	150	+,10	—,13	250	—,63
55	—,007	—,11	—,02	—,10	155	+,10	—,16	255	—,73
60	—,007	—,10	—,02	—,09	160	+,10	—,19	260	—,83
65	—,006	—,09	—,01	—,08	165	+,09	—,23	265	—,93
70	—,005	—,08	—,01	—,07	170	+,08	—,28	270	—1,05
75	—,004	—,07	—,00	—,06	175	+,07	—,33	275	—1,17
80	—,005	—,06	—,00	—,05	180	+,06	—,39	280	—1,30
85	—,004	—,04	—,00	—,04	185	+,04	—,45	285	—1,44
90	—,002	—,03	—,00	—,03	190	+,02	—,52	290	—1,59
95	—,002	—,02	—,00	—,01	195	—,01	—,59	295	—1,74
100	±	±	±	±	200	—,04	—,67	300	—1,91

Unterhalb 0° (extrapoliert).

Ables.	XVI	59	v. dur	Ables.	XVI	59	v. dur
0°	±	±	±	—20°	+,19	+,10	+,17
— 5	+,04	+,02	+,03	—25	+,25	+,14	+,23
—10	+,08	+,04	+,07	—30	+,32	+,18	+,30
—15	+,13	+,07	+,12	—35	+,40	+,23	+,38
—20	+,19	+,10	+,17				

11. Wärme-Eigenschaften fester Körper. Ausdehnung. Spezifische Wärme und Wärmeleitvermögen in gr-Kal/(cm·Grad·sek) bei 18°. Schmelzpunkt und Schmelzwärme.

Verunreinigungen erniedrigen das Leitvermögen meistens erheblich.

	Ausd.-Koeff. um 18°	Ausd.-Koeff. zw. 0° u. 100°	Spezif. Wärme	Wärme-leitvermögen	Schmelzpunkt (*, unscharf)	Schmelz-wärme
	0,0000	0,0000				Kalor.
Aluminium	216	242	0,214	0,48	*657°	
Antimon	097	105	0,050	0,04	[illegible]	
Blei	275	290	0,031	0,08	327	6
Cadmium	286	316	0,055	0,22	321	14
Eisen	11	[illegible]	0,105	0,14 bis 0,17	1200 bis 1400	etwa 30
Stahl	10	11	0,114	0,06 bis 0,12	1300 bis 1400	
Invar, 64 Fe, 36 Ni	009					
Gold	138	147	0,031	0,70	1064	
Iridium	065	067		0,34	2200	
Kobalt	123	127	0,11		etwa 1600	
Konstantan		152	0,098	0,054		
Kupfer	161	171	0,091	0,90	[illegible] 1065 mit Luft	
Magnesium	245	32	0,25	0,38	630	
Mangan			0,12		1245	
Messing	18	19	0,093	0,15 bis 0,30	etwa 900	
Neusilber		18	0,095	0,07 bis 0,09	etwa 1000	
Nickel	124	135	0,106	0,14	1470	
Palladium	117	119	0,058	0,17	1540	36
Platin	089	090	0,032	0,17	1720	27
Pt-Irid. (10% Ir)	087	088			1760	
Rhodium	083	086	0,058	0,30	1850	
Tantal	079		0,036		2200	
Schwefel	6	9	,16 bis 24		114	9
Silber	184	[illegible]	0,055	1,01	961 *955 mit Luft	21
Wismut	128	137	0,029	0,019	269	13
Zink	286	297	0,092	0,27	419	28
Zinn	213	230	0,052	0,15	232	13
Rose's Metall			0,04	0,04	95	7
Wood's Metall			0,04	0,03	65 bis 70	8
Berliner Porzellan	028	030			1550	
Glas, Jenaer XVI	078	[illegible]	0,19	0,001 bis 0,002	800 bis 1400	
" " 59	057	059				
Bergkristall s. S. 175, ⟂ Axe	137	144	0,190	0,0001	1700	
Bergkristall, ‖ "	074	080				
Bergkristall, verglast	004	005				
Holzfaser	03 bis 09			0,0003		
Hartgummi	8					
Kalkspat	[illegible] (kub.)		0,21			
KNO_3			0,28		[illegible]	48
$NaNO_3$			0,27		etwa 310	63
KCl			0,17		760	
$NaCl$			0,21		790	
K_2SO_4			0,19		1060	

12. Wärme-Eigenschaften flüssiger Körper.

Ausdehnung und spezifische Wärme um 18°; Schmelzpunkt t_0, Siedepunkt t_1,

die Erniedrigung $-\Delta t_0$, bez. Erhöhung $+\Delta t_1$ durch Auflösen von 1 gr-Mol. in 100 gr des Lösungsmittels und die Erhöhung δt_1 durch $+1$ mm Quecksilberdruck.

Schmelzwärme ϱ, Verdampfungswärme σ

bei dem atmosphärischen Siedepunkt.

	Ausdehn.-koeffizient	Spezif Wärme	Schmelzp. t_0	$-\Delta t_0$	ϱ Kalor.	Siedep. t_1	δt_1	$+\Delta t_1$	σ Kalor.
Aceton	0,001 31					56,7°	,089°	1,7°	12,5
Äthylacetat						77,1		2,5	88
Äthylalkohol ...	0,001 10	0,58	—110°			78,3	,034	1,16	202
Äthyläther	0,001 68	0,56	—118			34,5		2,1	90
Äthylbenzoat...						213			
Äthylbromid ...	0,001 37	0,21				38		2,8	59
Äthyljodid	0,001 16	0,16				73		5,2	47,5
Ameisensäure ..	0,000 99	0,53	+8,6	2,8°	56	101	,048		120
Amylacetat						140			
Amylalkohol ...	0,000 93	0,55	—117			130		3,2	121
Amylbenzoat ..						260			
Anilin	0,000 85	0,50	—8			184,2	,051	3,2	104
Benzol	0,001 24	0,41	+5,5	5,1	30	80,3	,043	2,7	94,4
Chloroform ..	0,001 26	0,23	—70			61,2		3,6	58
Essigsäure	0,001 07	0,50	+16,6	3,9	45	118		2,5	90
Glycerin	0,000 50	0,58	—20			290			
Methylacetat . .						57,2		2,1	97
Methylalkohol..	0,001 22	0,60	—94			66	,037	0,9	265
Methylbenzoat .						199			
Methyljodid .	0,001 21		+5			43		4,3	46
Nitrobenzol ..	0,000 85	0,34	+5,3	7,0	22	210		5,0	
Petroleum ...	0,000 92	0,51							
Schw.-Kohlenst.	0,001 21	0,24	—113			46,2	,041	2,4	85
Terpentinöl ...	0,000 94	0,42							70
Toluol.........	0,001 09	0,40	—102			110,8			87
Wasser	0,000 18	1	0	1,84	80	100	037	0,52	539
Xylol..........	0,001 01	0,40	+15		39	138,5	,051		83
Quecksilber	0,000 181	0,0333	—38,8		2,8	357,0	,074		68
Phenol			+39	7,5	26	183	,050	3,0	
Naphthalin			+79	7,0	36	218,0	,059		
Benzophenon ...			+48	9,5	21	306,0	,068		
Stearinsäure ...			+64	4,4	48	370			
Schwefel......			+114			446,0	,083		362
Selen......			+217			690	,10		
Cadmium ...			+321			778	,11		
Zink			+419		28	918	,12		

12a. Gase. Dichte, Wärmeausdehnung (Spannungskoeffizient), spezifische Wärme, Schmelzpunkt, Siedepunkt, Dampfwärme, kritische Daten, Lichtbrechung, Absorption im Wasser.

Vielfach nach Rayleigh, Leduc, Ramsay u. Travers (Dichte); Chappuis (Spann.-Koeff.); Regnault, E. Wiedemann (c_p); Röntgen, Strecker, Wüllner, Lummer u. Pringsheim u. a. (c_p/c_v); Olszewski, Dewar, Travers (Schmelzpunkt, Siedepunkt, kritische Daten); Mascart, Rayleigh, Ramsay u. Travers (Brech.-Koeff.); Bunsen, L. W. Winkler (Absorption in Wasser); Moissan (Chlor, Fluor).

	Dichtigkeit 0°; 760 mm Hg unter 45° Br. in Meereshöhe			Spann.-Koeff. 0—100° p_0=1 m	Spez. Wärme bei konst. Dr zw. 0 u. 200° c_p	$\frac{c_p}{c_v}$	Schmelzpunkt	Siedepunkt	Dampfwärme	Kritische Temp.	Krit. Druck	Brech.-Exp. Na-Licht 0°; 760 mm	1 Liter Wass[er] bei 760 mm ccm von 0° u[nd]	
	Wasser =1	Luft =1	Sauerst. =16						Kalor.					
	0,00			0,00							m Hg	1,000	bei 0°	b
Luft	12928	1,0000	14,476	3674	0,238	1,40		−193*		−140°	30,0	2928	28,8	
Wasserstoff . H_2	008985	0,06950	1,006	3668	3,41	1,41	−259°	−252,6		−238	11,6	139	21,5	
Helium . . . He	0177	0,137	1,98	3668 [1])		1,66				−263?		0362	15,0	
Stickstoff . . N_2	12505	0,9673	14,008	3675			−210,5	−195,7	50	−149	20,9	297		
Stickstoff, atm.	12567	0,9721	14,072		0,244	1,41							23,5	
Sauerstoff . . O_2	14290	1,1053	16,000	3674 [2])	0,220	1,40	−227	−182,8	60	−119	44,1	271	48,9	
Fluor .... F_2	169	1,31	19,0				−223	−187		Unter			* folgt nicht [...] Absorptions[...]	
Neon .... Ne	0890	0,688	9,96			1,66		−243?		−210		069		
Chlor ...... Cl_2	322	2,49	36,0		0,121	1,32	−102	−33,4		+146	70	773		3
Argon .... A	1782	1,378	19,96	3668 [2])	0,123	1,66	−188	−186		−117	40,2	283	57,8	
Krypton .... Kr	3642	2,817	40,78			1,66	−169	−152		−63	41,2	425		
Xenon X	572	4,42	64,0			1,66	−140	−109		+15	48,5	694		
Chlorwass. HCl	16408	1,2692	18,373		0,121	1,40	113	−80		+51	65,4	447	500000	44
Kohlenoxyd . CO	12503	0,9671	14,00	3667 [3])	0,243	1,41	−207	−190		−136	25,4	335	35,4	
Kohlensäure CO_2	19766	1,5289	22,132	3726	0,218	1,30	−57	−78,2	142	+31	55	451	1800	
Acetylen . C_2H_2	11759	0,9096	13,167	p_0= [1]) 600 mm			Unter	−82,5		+35	46,4	610		1
Äthan .... C_2H_6	1390	1,075	15,56	[2]) 760			−158	−93		+28	38,1		98,7	
Methan .... CH_4	07209	0,5576	8,072	[3]) 517	0,593	1,32	−186	−165		−62	42,4	444	55,6	
Ammoniak NH_3	0763	0,590	8,54		0,52	1,32	−78	−38		+131	83,8	379	1050000	65
Stickoxydul N_2O	19777	1,5298	22,145	368 [2])	0,225	1,28	−103	−90		+37	60	516	1300	
Stickoxyd . . NO	1344	1,039	15,04		0,232	1,40	−167	−150		−94?	54	297	73,8	
Schw.wass. H_2S	153	1,18	17,1		0,243	1,26	−85	−51,5		+100	70	623	4370	2
Schwefl. S. . SO_2	29268	2,2639	32,772	385 [2])	0,154	1,25	−76	−10	96	+155	60	69	79800	39

12b. Dichtigkeit s verflüssigter, unter 1 Atm. siedender Gase. Zusammensetzung der Flüssigkeit und des Dampfes siedender Gemische aus Stickstoff und Sauerstoff am Siedepunkte t bei 1 Atm.

Nach Baly, Behn u. Kiebitz, Travers u. A.

*) CO_2 fest. **) Prozente nach Volumen im Gaszustande gemessen.

	H	CH_4	NH_3	N	F	O	A	SO_2	Cl	CO_2*	Kr	X
$s=$	0,06	0,42	0,68	0,79	1,11	1,13	1,21	1,46	1,51	1,53	2,15	3,52

Stickstoff	$t=$	—195,7°	193,0	192,2	190,8	189,0	186,5	184,8	182,8°
mit Sauerst.	$s=$	0,79	0,92	0,95	1,00	1,05	1,10	1,12	1,13
Proz.**	Flüss.	0	36	43	55	68	83	91	100
Sauerst.	Dampf	0	13	18	27	40	60	76	100

13. Gesättigter Wasserdampf.

Spannkraft e in mm Quecksilber (unterhalb 0° über Eis), nach den Beobachtungen von Regnault-Broch, Julin, Marvin, Wiebe und Thiesen u. Scheel (bezogen auf das Wasserstoffthermometer).

Masse f eines Kubikmeters in Gramm.

t	e	f	t	e	f	t	e	f	t	e	t	e
	mm	gr/cbm		mm	gr/cbm		mm	gr/cbm		mm		mm
			—30°	0,29	0,35	0°	4,6	4,8	30°	31,6	60°	149,2
			—29	0,32	0,38	+1	4,9	5,2	31	33,4	61	156,3
			—28	0,36	0,42	2	5,3	5,6	32	35,4	62	163,7
			—27	0,40	0,47	3	5,7	6,0	33	37,4	63	171,3
			—26	0,44	0,51	4	6,1	6,4	34	39,6	64	179,2
			—25	0,48	0,56	5	6,5	6,8	35	41,9	65	187,5
			—24	0,53	0,62	6	7,0	7,3	36	44,2	66	196,1
			—23	0,59	0,68	7	7,5	7,8	37	46,7	67	205,0
			—22	0,65	0,75	8	8,0	8,3	38	49,3	68	214,2
			—21	0,71	0,82	9	8,6	8,8	39	52,1	69	223,8
—50°	0,034	0,044	—20	0,79	0,90	10	9,2	9,4	40	55,0	70	233,8
—49	0,038	0,049	—19	0,87	0,99	11	9,8	10,0	41	58,0	71	244,1
—48	0,043	0,055	—18	0,96	1,08	12	10,5	10,7	42	61,1	72	254,8
—47	0,048	0,061	—16	1,05	1,18	13	11,2	11,3	43	64,4	73	265,9
—46	0,054	0,069	—17	1,15	1,29	14	11,9	12,0	44	67,9	74	277,4
—45	0,061	0,077	—15	1,26	1,41	15	12,7	12,8	45	71,5	75	289,3
—44	0,068	0,086	—14	1,38	1,53	16	13,6	13,6	46	75,3	76	301,6
—43	0,076	0,095	—13	1,51	1,67	17	14,5	14,4	47	79,2	77	314,4
—42	0,085	0,106	—12	1,65	1,83	18	15,4	15,3	48	83,4	78	327,6
—41	0,094	0,118	—11	1,81	1,99	19	16,4	16,2	49	87,7	79	341,3
—40	0,104	0,130	—10	1,97	2,17	20	17,4	17,2	50	92,2	80	355,5
—39	0,115	0,142	— 9	2,15	2,36	21	18,5	18,2	[illegible]	96,9	81	370,1
—38	0,127	0,156	— 8	2,35	2,56	22	19,7	19,3	[illegible]	101,8	82	385,2
—37	0,141	0,173	— 7	2,56	2,78	23	20,9	20,4	53	106,9	83	400,9
—36	0,156	0,190	— 6	2,79	3,01	24	22,2	21,6	54	112,2	84	417,1
—35	0,173	0,211	— 5	3,03	3,27	25	23,5	22,9	55	117,8	85	433,8
—34	0,193	0,233	— 4	3,30	3,54	26	25,0	24,2	[illegible]	123,6	86	451,1
—33	0,215	0,259	— 3	3,59	3,84	27	26,5	25,6	57	129,6	87	468,9
—32	0,238	0,285	— 2	3,89	4,15	28	28,1	27,0	58	135,9	88	487,3
—31	0,264	0,315	— 1	4,22	4,48	29	29,8	28,5	59	142,4	89	506,4
—30	0,292	0,347	0	4,58	4,84	30	31,6	30,1	60	149,2	90	526,0

14. Spannkraft des Wasserdampfes

in mm Quecksilber von 0° zwischen 90° und 101° (Tabelle von Wiebe)

	90°	91°	92°	93°	94°	95°	96°	97°	98°	99°	100°
,0	526,0	546,3	567,2	588,8	611,0	634,0	657,7	682,1	707,3	733,2	760,0
,1	28,0	48,3	69,3	91,0	13,3	36,3	60,1	84,6	09,8	35,9	62,7
,2	30,0	50,4	71,4	93,2	15,6	38,7	62,5	87,1	12,4	38,5	65,4
,3	32,0	52,5	73,6	95,4	17,9	41,0	64,9	89,6	15,0	41,2	68,2
,4	34,0	54,6	75,7	97,6	20,1	43,4	67,4	92,1	17,6	43,8	70,9
,5	36,0	56,6	77,9	599,8	22,4	45,8	69,8	94,6	20,2	46,5	73,7
,6	38,1	58,7	80,1	602,0	24,7	48,1	72,3	97,1	22,8	49,2	76,4
,7	40,1	60,8	82,2	04,3	27,0	50,5	74,7	699,7	25,4	51,9	79,2
,8	42,2	63,0	84,4	06,5	29,4	52,9	77,2	702,2	28,0	54,6	82,0
,9	44,2	65,1	86,6	08,8	31,7	55,3	79,6	704,7	30,6	57,3	84,8
1,0	546,3	567,2	588,8	611,0	634,0	657,7	682,1	707,3	733,2	760,0	787,6

14a. Siedetemperatur *t* des Wassers bei dem Barometerstand *b*

(Tabelle von Wiebe, Braunschweig 1903).

b	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*	*b*	*t*
mm	0	mm	0	mm	0	mm	0	mm	0	mm	0
680	96,92	700	97,71	720	98,49	740	99,26	760	100,00	780	100,73
81	96,96	01	,75	21	,53	41	,29	61	,04	81	,76
[illegible]	97,00	02	,79	22	,57	42	,33	62	,07	82	,80
83	,04	03	,83	23	,61	43	,37	63	,11	83	,84
84	,08	04	,87	24	,65	44	,41	64	,15	84	,87
85	,12	05	,91	25	,69	45	,44	65	,18	85	,91
86	,16	06	,95	26	,72	46	,48	66	,22	86	,94
87	,20	07	97,99	27	,76	47	,52	67	,26	87	100,98
88	,24	08	98,03	28	,80	48	,56	68	,29	88	101,02
89	,28	09	,07	29	,84	49	,59	69	,33	89	,05
690	,32	710	,11	730	,88	750	,63	770	,37	790	,09
91	,36	11	,14	31	,91	51	,67	71	,40	91	,12
92	,40	12	,18	32	,95	52	,70	72	,44	92	,16
93	,44	13	,22	33	98,99	53	,74	73	,48	93	,19
94	,48	14	,26	34	99,03	54	,78	74	,51	94	,23
95	,52	15	,30	35	,07	55	,82	75	,55	95	,26
96	,56	16	,34	36	,10	56	,85	76	,58	96	,30
97	,60	17	,38	37	,14	57	,89	77	,62	97	,33
98	,63	18	,42	38	,18	58	,93	78	,66	98	,37
699	,67	19	,45	39	,22	59	99,96	79	,69	799	,41
700	97,71	720	98,49	740	99,26	760	100,00	780	100,73	800	101,44

15. Dampfspannung einiger Gase und Dämpfe.

Besonders nach Cailletet, Hertz, Ramsay u. Young, Regnault.

	CO_2	NH_3	SO_2
	mm	mm	mm
—120°	10		
—110	40		
—100	130		
— 90	310		
— 80	670		
— 70	1500		
— 60	2900		
— 40	[illegible]		
— 30		870	280
— 20	15100	1390	470
0°	26500	3180	1150
+ 20	42000	6390	2510
[illegible]	53800	8700	3500
[illegible]		11600	4700
60		19500	8100
80		[illegible]	13700
100		46600	21200
120			31600
140			45600

	Äthyl-Äther	Schwef.-Kohlenst.	Chloroform	Methyl-Alkoh.	Äthyl-Alkoh.	Benzol	Wasser s. a. Tab. 13—14a.	Quecksilber
	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm üb. Wass.	mm
— 20°	66	47		6,3	3,3	6	0,96	
— 10	118	79		18,5	6,5	14	2,16	
0°	185	128		28	12,5	26	4,58	0,0004
+ 20	[illegible]	298	160	91	44,1	75	17,4	0,0015
+ 40	920	618	369	260	133,6	182	55,0	0,006
60	1740	1160	755	630	351	[illegible]	149,2	0,021
80	3000	2030	1408	1260	812	753	355,5	0,09
100	4900	3320	2430	2400	1690	1342	760	0,28
120	7600	5150	3930	4300	3220	2240	1490	0,75
140	11100	7600	6000	7800	5670	3520	2710	1,8
160	15800		8700		9400	5280	4640	4,2
[illegible]	21800				14800	7620	7510	8,9
200					22200	10660	11630	17,6
220					32100	14530	17400	33,4
[illegible]					45500	19400	25100	57
260						25400	35400	97
280						32800	50600	156
300							66000	244
320							88000	371
340							114000	548
[illegible]							142000	791

Quecksilber, fortgesetzt.					
	mm		mm		mm
400°	1540	550°	10500	700°	38000
450	3230	600	16900	750	55000
500	6080	650	26000	800	77000
550	10500	700	38000	850	104000

16. Dampfspannung von Wasserstoff, Stickstoff und Sauerstoff.

Nach Fischer u. Alt, Olszewski, Travers.

Wasserstoff		Stickstoff				Sauerstoff			
	mm		mm		mm		mm		mm
—259°	60	—210°	90	—195°	800	—194°	198	—180°	[illegible]
—258	114	—205	206	—190	1370	—191	298	—170	2470
—257	172	—202	308	—185	2170	—189	380	—160	4740
—256	250	—200	435	—180	3220	—187	484	—150	8340
—255	350	—198	566	—170	6720	—185	608	—140	15700
—254	470	—197	635	—160	12200	—184	680	—130	25200
—253	650	—196	720	—150	20000	—183	748	—120	38000

17. Löslichkeit in Wasser.

Als Bodenkörper gilt die bei der Temperatur stabile Kristallform.
In 100 Gewichtsteilen Wasser sind im Sättigungszustande gelöst Gewichtsteile wasserfreien Salzes:

Bei der Temp.:	0°	18°	100°	Bei der Temp.:	0°	18°	100°
KCl	28	34	57	$CaCl_2$	60	71	155
KJ	128	142	209	$CaSO_4$	0,19	0,204	0,17
$KClO_3$	3	6,9	56	$MgCl_2$	52	56	—
KNO_3	13	29	250	$MgSO_4$	27	35	74
K_2SO_4	8	10,5	26	$ZnCl_2$	210	360	610
$K_2Cr_2O_7$	5	11	94	$ZnSO_4$	43	51	95
K_2CO_3	89	111	156	$CdSO_4$	75	76	61
NH_4Cl	28	36	73	$CuSO_4$	15	23	75
NaCl	35,6	36,0	39,6	$NiSO_4$	29	39	—
$NaNO_3$	73	86	180	$AgNO_3$	122	220	900
$NaClO_3$	82	98	204	$Pb(NO_3)_2$	38	51	130
Na_2CO_3	7	20	45	Hg_2SO_4	—	0,05	—
LiCl	64	79	130	$BaSO_4$	$0,0_317$	$0,0_323$	—
Li_2CO_3	1,5	1,3	0,8	BaC_2O_4	—	0,0086	—
TlCl	—	0,304	—	CaC_2O_4	—	$0,0_356$	—
$BaCl_2$	31	35	59	AgCl	$0,0_307$	$0,0_316$	—
$SrCl_2$	44	52	102	Rohrzucker	179	201	490

18. Kapillarkonstante α in mg-Gew/mm um 18°.

Wasser	7,7	Glycerin	6,6	Quecksilber	50
Methylalkohol	2,4	Olivenöl	3,3	Gold geschm. etwa	80
Äthylalkohol	2,0	Petroleum	3	Zinn „ etwa	60
Amylalkohol	2,4	Terpentinöl	2,7	Flüss. Luft —190°	1,2
Äthyläther	1,8	Schwefelsäure 10%	7,7	„ Chlor —72°	3,4
Benzol	3,0	„ 50%	8,3	„ SO_2 —29°	3,4

18a. Kapillardepression des Quecksilbers.

Interpoliert nach Mendeléeff und Gutkowsky. Vgl. aber S. 241.

Durchmesser	Höhe des Meniskus in mm							
	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm
4	0,83	1,22	1,54	1,98	2,37			
5	0,47	0,65	0,86	1,19	1,45	1,80		
6	0,27	0,41	0,56	0,78	0,98	1,21	1,43	
7	0,18	0,28	0,40	0,53	0,67	0,82	0,97	1,13
8		0,20	0,29	0,38	0,46	0,56	0,65	0,77
9		0,15	0,21	0,28	0,33	0,40	0,46	0,52
10			0,15	0,20	0,25	0,29	0,33	0,37
11			0,10	0,14	0,18	0,21	0,24	0,27
12			0,07	0,10	0,13	0,15	0,18	0,19
13			0,04	0,07	0,10	0,12	0,13	0,14

19. Reibungskoeffizient $[\eta]$ des Wassers in CGS. Vgl. 59.

$[\eta]_{18}$ nach Beobachtungen von Gartenmeister, Heydweiller, Noack, Pacher, Poiseuille, Slotte, Sprung, Thorpe u. Rodger; Temperaturgang auch nach Grotrian, O. E. Meyer, Wagner. Berechnet von Heydweiller

t	$10^4[\eta]$	auf $+1°$
0°	1797	
		−56
5	1518	
		−42
10	1307	
		−33
15	1140	
		−30
16	1110	
		−28
17	1082	
		−27
[illegible]	1055	
		−26
19	1029	

t	$10^4[\eta]$	auf $+1°$
19°	1029	
		−25
20	1004	
		−24
21	980	
		−23
22	957	
		−21
23	936	
		−21
24	915	
		−20
25	895	
		−18
30	803	

t	$10^5[\eta]$	auf $+1°$
30°	803	
		−15
40	656	
		−10
50	551	
		−8,1
60	470	
		−6,3
70	407	
		−5,0
80	357	
		−4,0
90	317	
		−3,3
100	284	

t	$10^4[\eta]$	auf $+1°$
100°	284	
		−2,8
110	256	
		−2,4
120	232	
		−2,0
130	212	
		−1,6
140	196	
		−1,2
150	184	
		−1,0
160	174	

19a. Zusammendrückbarkeit ζ

durch 1 Atm.;

innerer Reibungskoeffizient $[\eta]$

bei 18° in CGS
und Änderung dieser Größen auf
1° Temperaturzunahme bei 18°.

	ζ	$10^6 \frac{d\zeta}{dt}$	$[\eta]$	$10^4 \frac{d\eta}{dt}$
	0,000			
Äther	186	+2	0,0026	−0,25
Alkohol . . .	110	+0,7	0,0130	−2,5
Amylalk. .	091	+0,6	0,05	−10
Benzol . .	090	+0,8	0,0066	-1,1
Methylalk.	120	+0,9	0,0064	−0,9
Quecksilber	0039		0,0159	−0,5
Schw.-Kohlst.	089	+0,7	0,0038	−0,25
Wasser . . .	046	−0,2	0,0106	−2,7

20. Elastizitätsmodul E, Schallgeschwindigkeit u, Tragkraft p

gezogener Metalle. E und p in kg-Gew/mm²; u in m/sek.

Nur als Näherungen zu benutzen.

	E	Dichte	u	p
Alumin. .	6500	2,7	5000	
Blei	1700	11,3	1300	2
Cadmium	7000	8,6	2800	
Schmiedeeisen	19000	7,8	5000	25 bis 60
Stahl	21000	7,8	5100	70
Gold	8000	19,2	2100	25
Kupfer . .	12000	8,7	3700	40
Magnes. .	4000	1,7	4800	
Messing .	9000	8,3	3200	60
Neusilber	12000	8,5	3700	
Nickel . .	20000	8,8	4700	
Pallad. .	11000	12,0	3000	36
Platin . .	17000	21,4	2800	30
Silber . . .	7800	10,5	2700	29
Tantal .	19000	16,6	3400	93
Zink	9000	7,1	3600	13
Zinn	4500	7,3	2500	2
Glas	6500	2,5	5000	
Holzfaser	500 bis 1200		3000 bis 4000	1,5 bis 5

21. Tonhöhe und Schwingungszahl in 1 Sekunde.

(Für gleichschwebende Stimmung: $a_1 = 435$. Vgl. 57.)

	C_{-2}	C_{-1}	C	c	c_1	c_2	c_3	c_4
C	16,17	32,33	64,66	129,3	258,7	517,3	1035	2069
Cis ...	17,13	34,25	68,51	137,0	274,0	548,1	1096	2192
D......	18,15	36,29	72,58	145,2	290,3	580,7	1161	2323
Dis ...	19,22	38,45	76,90	153,8	307,6	615,2	1230	2461
E... ..	20,37	40,74	81,47	162,9	325,9	651,8	1304	2607
F......	21,58	43,16	86,31	172,6	345,3	690,5	1381	2762
Fis	22,86	45,72	91,45	182,9	365,8	731,6	[illegible]	[illegible]
G......	24,22	48,44	96,89	193,8	387,5	775,1	1550	3100
Gis	25,66	51,32	102,65	205,3	410,6	821,2	[illegible]	3285
A......	27,19	54,37	108,75	217,5	**435,0**	870,0	1740	3480
Ais ...	28,80	57,61	115,22	230,4	460,9	921,7	1843	[illegible]
H......	30,52	61,03	122,07	244,1	488,3	976,5	1953	3906

22. Linien im Spektrum von Flammen oder Geißler'schen Röhren.

Skale von Bunsen-Kirchhoff; Natriumlinie auf 50; Spaltbreite = 1 Sk.-T.

Obere Zahl = Mittellage, untere Zahl = Breite der Linie, wenn diese von 1 Sk.-T. abweicht. Römische Zahl = Helligkeit bei dauerndem Spektrum.

S bedeutet ganz scharf begrenzt, *s* mäßig scharf. Die übrigen Linien der Flammenspektra sind mehr oder weniger verwaschene Banden.

Die für die Analyse wichtigsten Linien sind fett gedruckt.

Das Spektrum erscheint (ungefähr): rot bis 48, gelb bis 52, grün bis 80, blau bis 120, violett von 120 an.

λ =	762	718	687	656	589	527	517	486	434	431·10^{-6} mm	
Sonne	A	a	B	C(*H*)	D(*Na*)	E	b	F(*H*)	f(*H*)	G	H
	18,5	24	29	35	50,0	71,3	76	90	125	128	162

	Linien
K	**17,5** II *S*; Schwaches Spektrum von 55 bis 120.; **153,0** IV *S*
Li	**32,0** I *S*; 46,2 IV *s*
Ca	33,1 IV 2; 36,7 IV; **41,7** I 1,5; 46,3 III 2; 49,0 III; 52,3 IV; 54,9 IV; **60,3** I 1,5; 68,0 IV 2; **135,0** IV *S*
Sr	29,8 III; **32,1** II; **33,8** II; 36,3 II; 39,0 III; 41,8 III; **45,8** I *S*; **105,0** III *S*
Ba	35,2 IV 2; 41,5 III 3; 46,6 III 1,5; 52,1 IV; 56,0 III 2; **60,3** II *s*; 66,5 III 3; **71,4** III 3; **76,8** III 2; 82,7 IV 4; **89,3** III 2
Tl	**58,5** I *S*
He	32,7 III; **50,4** I; **82,6** I; 87,1 III; **118,6** II

23. Lichtwellenlängen λ in Luft von 20° und 760 mm Quecksilberdruck, gemessen in $\mu = 0{,}001$ mm.

Nach Beobachtungen von Rowland, Kayser u. Runge, Ames, Cornu, Hartley u. Adeney, Liveing u. Dewar, Mascart, Müller u. Kempf, Fabry u. Perot u. A., gemäß den Messungen der *Cd*-Linien von A. Michelson (65 IV) reduziert auf $D_1 = 0{,}58960\,\mu$; meist Auszug aus den Zusammenstellungen von Dufet in Recueil de Données numériques, publ. par la Société Française de Physique; Optique T. I.

Die Buchstaben geben die gebräuchlichen Namen der Linien im Fraunhofer'schen (etwa von 0,77 bis 0,39 μ), im ultraroten und im ultravioletten Sonnenspektrum, oder (kursiv) die chemischen Elemente, in deren Dämpfen die Linien auftreten. Zur geometrischen Orientierung vgl. die Zeichnungen von G. Müller (Publ. 6 des Astrophys. Obs. Potsdam).

Die Wellenlänge λ_0 im Vakuum ist $\lambda_0 = \lambda(1+\delta)$, wo $1+\delta$ das Br.-V. in Luft von 20° u. 760 mm; für $\lambda =$ 0,2 0,4 0,6 0,8 μ
$\delta = 0{,}000$ 318 277 272 270.

In einem Gase von $t°$ u. p mm Hg gilt $\lambda_{t,p} = \dfrac{\lambda_0}{1 + c \cdot p/(1+\alpha t)}$,

wo für H N O CO_2; Luft
c nahe $= 0{,}0_6$ 18 39 36 59 ; $0{,}0_6 39$, genauer 0,00141 δ.

		λ			λ			λ			λ
Y		,[illegible]		*Cd 3*	,53381	H	*H, Ca*	,3968	s	*Fe*	,30476
X_4		,8805	E	*Fe, Ca*	,52704		*Al*	,39616		*Zn*	,30358
X_3		,866	E	*Fe*	,52696		*Al*	,39440		*Cd 14*	,29807
X_2		,854		*Ag*	,52091	K	*Ca*	,39337		*Cd 15*	,28808
X_1		,849	b_1	*Mg*	,51837		*Mg*	,38838		*Cd 16*	,28369
Z		,822	b_2	*Mg*	,51727		*Fe*	,38259		*Zn*	,28008
	K	,7699	b_3	*Fe*	,51690	L	*Fe*	,38206		*Zn*	,27708
	K	,7665	b_4	*Mg, Fe*	,51674		*Fe*	,38159		*Cd 17*	,27484
A		,7628		*Cd 4*	,50859	M	*Fe*	,37349		*Zn*	,27125
A		,7621		*He*	,50157	M	*Fe*	,37200		*Zn*	,26842
A		,7594	(c)	*Fe*	,49576		*Cd 9*	,3611		*Al*	,25751
a		,7185	F	*H*	,48614	N	*Fe*	,35812		*Cd 18*	,25730
B	*O*	,6870		*Cd 5*	,47999		*Cd 10*	,3467		*Al*	,25680
	Li	,67079		*Cd 6*	,46782	O	*Fe*	,3441		*Al*	,23731
C	*H*	,65629	(d)	*Fe*	,4668		*Cd 11*	,3404		*Al*	,23671
	Cd 1	,64385		*Sr*	,46074	P		,3360		*Cd 22*	,23293
α	*O*	,62781		*He*	,44716		*Zn*	,33450		*Cd 23*	,23129
	Hg	,61521		*Cd 7*	,44180		*Zn*	,3303		*Al*	,22691
	Li	,61036	(e)	*Fe*	,43836	Q		,3287		*Cd 24*	,2265
D_1	*Na*	,58960		*Hg*	,43584		*Zn*	,3282		*Cd 25*	,21946
D_2	*Na*	,58900	(f)	*H*	,43405		*Cd 12*	,3261		*Cd 26*	,21444
D	*He*	,58758	(G')	*Fe*	,43258		*Cd 12*	,3250		*Zn 27*	,2099
	Hg	,57905	G	*Fe, Ca*	,43079	R	*Ca*	,3180		*Zn 28*	,2062
	Hg	,57694	(g)	*Ca*	,42268	r		,3145		*Zn 29*	,2025
	Ag	,[illegible]	(h)	*H*	,41018	S	*Fe, Ni*	,3101		*Al 30*	,1990
	Hg	,54608		*Hg*	,40780		*Al*	,30928		*Al 31*	,1935
	Cd 2	,53790		*Hg*	,4047		*Al*	,30822		*Al 32*	,1862
	Tl	,53505		*K, Fe*	,4046		*Zn*	,3074		*Al 32*	,1854
				Cd 8	,3982						

24. Lichtbrechungsverhältnis einiger Körper bei 18° und Drehvermögen des Quarzes bei 1 mm Dicke.

Das B.-V. nimmt auf + 1° ab: in mittlerer Temperatur für Schwefelkohlenstoff um 0,0008 für D, um 0,0009 für H; für Alkohol um 0,0004; für Wasser bei 5° um 0,00003, bei 10° um 0,00005, bei 15° um 0,00007, bei 20° um 0,00009, bei 25° um 0,00010.

Bei den zweiaxigen Kristallen gelten die Zahlen, wenn nicht anderes bemerkt ist, für den mittleren Strahl.

	A	B	C(*H*)	D(*Na*)	E	F(*H*)	f(*H*)	G	H
Wellenlänge in μ	0,760	,687	,6563	,5893	,5270	,4861	,4341	,4308	,3968
Wasser	1,3293	,3309	,3317	,3335	,3358	,3377	,3410	,3412	,3441
Alkohol	1,3586	,3599	,3606	,3624	,3647	,3667	,3703	,3705	,3736
Schw kohlenstoff	1,6103	,6166	,6198	,6293	,6421	,6541	,6771	,6786	,7016
Cassiaöl	1,586	,592	,596	,605	,619	,634	,663	,665	,701
Kronglas leicht	1,5099	,5118	,5127	,5153	,5186	,5214	,5264	,5267	,5312
Kronglas schwer	1,6097	,6117	,6126	,6152	,6185	,6213	,6262	,6265	,6308
Flintglas leicht	1,5986	,6020	,6038	,6085	,6145	,6200	,6302	,6308	,6404
Flintglas schwer	1,7351	,7406	,7434	,7515	,7623	,7723	,7910	,7922	,811
Kalkspat ord.	1,6500	,6530	,6545	,6585	,6635	,6679	,6755	,6762	,6833
Kalkspat extr.	1,4827	,4840	,4846	,4864	,4887	,4908	,4943	,4946	,4978
Quarz ord.	1,5391	,5409	,5418	,5442	,5471	,5496	,5539	,5543	,5581
Quarz extr.	1,5481	,5500	,5509	,5533	,5563	,5589	,5634	,5637	,5677
Gips, mitt.	1,517	,519	,520	,523	,525	,528	,532	,532	
Aragonit, mitt.	1,672	,676	,678	,682	,686	,691	,698	,698	,705
Topas(sibir.)mitt.	1,608	,610	,611	,614	,617	,619	,624	,624	,627
Drehung in Quarz bei 18°	12,7°	15,7°	17,3°	21,71°	27,5°	32,7°	42,0°	42,6°	51,2°

Aceton	1,36	Glimmer	1,56 bis 1,60
Äther	1,36	Methylenjodid	1,74
Arsenbromür	1,78	Monobromnaphthalin	1,66
Benzol	1,503	Phosphor in CS_2	1,97
Beryll	1,57	Rüböl	1,47
Canadabalsam	1,54	Terpentinöl	1,48
Chloroform	1,45	Turmalin	1,64
Eis	1,31	KNO_3	1,50
Feldspat	1,52	$NaNO_3$, für *Na*, extr. 1,335; ord.	1,584
Flintglas, schwerstes	1,9	Zucker	1,56

Luft 0° u. 760 mm, $1{,}0002879 + 0{,}0_5132/\lambda^2 + 0{,}0_732/\lambda^4$; Kayser u. Runge, Wied. Ann. 50, 312. (λ in $\mu = 0{,}001$ mm gemessen.)

Die drei Hauptbrechungsverhältnisse des Natronlichtes betragen für

Gips	1,530	1,523	1,520
Ostindischen Glimmer	1,600	1,594	1,561
Aragonit	1,686	1,682	1,530
Baryt	1,648	1,637	1,636

24a. Brechungsverhältnis n von Quarz, Flußspat, Steinsalz und Sylvin bei 18°.

Im Ultraviolett nach Sarasin (Quarz, Flußspat); Martens (Steinsalz, Sylvin). Im Ultrarot nach Langley (Steinsalz), Paschen (Flußspat), Rubens, teilweise mit Nichols u. Trowbridge (Quarz, Sylvin, Steinsalz von 6 μ an).

Der Temperaturkoeffizient $-dn/dt$ beträgt nach Fizeau, Stefan, Pulfrich, Dufet u. A. für Natrium-Licht in Luft von konstanter Temperatur: Quarz ord. $0,0_4062$, Flußspat $0,0_4142$, Steinsalz $0,0_437$, Sylvin $0,0_436$; in gleich temperierter Luft ist von diesen Zahlen $0,0_4011$ abzuziehen.

Die Wellenlängen λ (in μ gemessen) sind einheitlich auf $D_1 = 0,58960$ zurückgeführt.

Die Differenzen unter d bedeuten $-100\,dn/d\lambda$, d. h. $-\Delta n$ in Einheiten der 4. Dezimale auf $\Delta\lambda = +0,01\,\mu$.

Quarz (ord. Strahl) λ	n	d	Flußspat λ	n	d	Steinsalz λ	n	d	Sylvin λ	n	d
Al 0,1857	1,6750	183	*Al* 0,1857	1,5094	98,5	*Al* 0,1854	1,8933	717	*Al* 0,1854	1,8270	755
Al 0,1990	1,6507	133	*Al* 0,1990	1,4963	76,0	*Al* 0,1990	1,7958	413	*Al* 0,1990	1,7243	406
Cd 0,2144	1,6304	97	*Cd* 0,2144	1,4846	55,6	*Cd* 0,2144	1,7322	259	*Cd* 0,2144	1,6618	245
Cd 0,2313	1,6140	69	*Cd* 0,2313	1,4752	40,0	*Cd* 0,2313	1,6884	163	*Cd* 0,2313	1,6204	151
Cd 0,2573	1,5962	49,7	*Cd* 0,2573	1,4648	29,7	*Cd* 0,2573	1,6460	109	*Cd* 0,2573	1,5812	99,4
Cd 0,2748	1,5875	30,6	*Cd* 0,2748	1,4596	18,0	*Cd* 0,2748	1,6269	62,3	*Cd* 0,2748	1,5638	55,8
Cd 0,3404	1,5674	16,5	*Cd* 0,3404	1,4478	10,0	*Cd* 0,3404	1,5860	31,7	*Cd* 0,3404	1,5272	28,0
H 0,3968	1,5581	11,3	H 0,3968	1,44214	7,10	*Al* 0,3944	1,5689	20,7	*Al* 0,3944	1,5121	17,9
f 0,4341	1,5539	8,21	f 0,4341	1,4395	4,71	f 0,4341	1,5607	14,6	f 0,4341	1,5050	13,3
F 0,4861	1,54968	5,24	F 0,4861	1,43705	3,06	F 0,4861	1,5531	8,72	F 0,4861	1,4981	7,85
D 0,5893	1,54422	3,57	D 0,5893	1,43390	2,03	D 0,5893	1,5441	5,52	D 0,5893	1,4900	4,78
C 0,6563	1,54188	2,55	C 0,6563	1,43254	1,47	C 0,6563	1,5404	3,57	C 0,6563	1,4868	2,77
K 0,7682	1,5390	1,56	*K* 0,7682	1,4309	0,736	*K* 0,7682	1,5364	1,53	*K* 0,7682	1,4837	1,86
1,160	1,5329	1,25	2 *Na* 1,179	1,4279	0,492	2 *Na* 1,179	1,5301	0,493	0,940	1,4805	0,683
1,617	1,5272	1,59	3 *Na* 1,768	1,4250	0,509	3 *Na* 1,768	1,5272	0,306	1,584	1,4761	0,248
1,969	1,5216	1,66	4 *Na* 2,357	1,4220	0,627	4 *Na* 2,357	1,5254	0,187	2,230	1,4745	0,186
2,327	1,5156	2,09	5 *Na* 2,947	1,4183	0,76	5 *Na* 2,947	1,5243	0,272	3,200	1,4727	0,129
2,59	1,5101	2,48	6 *Na* 3,536	1,4138	0,90	6 *Na* 3,536	1,5227	0,204	4,05	1,4716	0,145
2,84	1,5039	2,74	7 *Na* 4,125	1,4085	1,05	7 *Na* 4,125	1,5215	0,238	4,81	1,4705	0,200
3,03	1,4987	2,87	8 *Na* 4,714	1,4023	1,20	8 *Na* 4,714	1,5201	0,255	5,31	1,4695	0,203
3,18	1,4944	2,95	9 *Na* 5,304	1,3952	1,37	9 *Na* 5,304	1,5186	0,440	5,95	1,4682	0,26
3,40	1,4879	3,48	10 *Na* 5,893	1,3871	1,51	6,78	1,5121	0,444	7,08	1,4658	(0,28)
3,63	1,4799	3,47	11 *Na* 6,482	1,3782	1,73	7,59	1,5085	0,568	8,92	1,4600	(0,44)
3,80	1,4740	3,81	12 *Na* 7,072	1,3680	1,90	9,95	1,4951	0,756	10,19	1,4544	(0,27)
3,96	1,4679	4,51	13 *Na* 7,661	1,3568	2,11	11,88	1,4805	0,856	11,20	1,4516	(0,53)
4,09	1,4620	4,64	14 *Na* 8,250	1,3444	2,31	13,96	1,4627	1,13	14,14	1,4362	0,50
4,20	1,4569		15 *Na* 8,840	1,3308	2,49	15,89	1,4410	1,26	18,10	1,4162	(1,12)
			16 *Na* 9,429	1,3161		17,98	1,4148	1,59	20,60	1,3882	1,00
						20,57	1,3735	1,93	22,5	1,3692	
						22,3	1,3403				

25. Absorption ultraroter Strahlen von der Wellenlänge λ in einigen Mitteln.

1. Merritt; 2. Rubens u. Trowbridge; 3. Aschkinass; 4. Paschen; Rubens u. Aschkinass.

1. Kalkspat — Schichtdicke = 0,1 cm

λ	ord.	extr.
μ	%	%
1,02	0	0
1,45	0	0
2,07	1,0	0
2,30	17,8	0
2,44	25,7	0
2,53	17,8	1,0
2,60	11,2	0,5
2,65	15,7	0
2,74	21,0	0
2,83	12,4	0,5
2,90	6,6	1,0
2,95	16,2	2,0
3,04	37,4	5,0
3,30	90	12
3,47	86	11
3,62	61	17
3,80	84	16
3,98	100	9
4,35	48	1
4,52	76	3
4,66	68	15
4,88	45	17
4,96	42	13
5,25	55	29
5,50		73

Quarz — Schichtdicke = 0,1 cm

λ	ord.	extr.
μ	%	%
1	0	0
1,5	0	0
2	0	0
2,5	0	0
2,72	1,6	0
2,88	4,3	0
2,95	5,4	2,2
3,07	3,0	2,6
3,17	1,6	1,0
3,38	1,3	3,5
3,67	11,5	16
3,82	14,6	12
3,96	18,8	10
4,12	29	20
4,36	—	55
4,50	48	

2. Schichtd. = 1 cm

λ	Steinsalz	Sylvin	Flußspat
μ	%	%	%
7	0	—	1,0
8	0	—	15,6
9	0,5	0	45,7
10	0,5	1,2	88,6
11	0,5	1,0	99,0
12	0,7	0,5	100
13	2,4	0,5	
14	6,9	2,5	
15	15,4	4,6	
[illegible]	33,9	6,4	
17	48,4	7,8	
18	72,5	18,8	
[illegible]	90,4	24,2	
20,7	99,4	41,5	
23,7	100	84,5	

3. Wasser

Dicke	λ	%
1 m	0,77	91
1 cm	1,00	35
	1,25	71
cm 0,005	1,50	18
	1,71	5
	1,94	40
	2,2	14
	2,7	88
cm 0,001	1,8	2
	3,1	94
	3,8	19
	4,7	42
	5,3	27
	6,1	92
	7,1	56
	8,4	50

4. Absorptionsbanden: Kohlensäure

	Von λ	bis λ	Max. λ
Schwach	2,36	3,02	2,71
Stark	4,01	4,80	4,27
Stark*	13,5	16	14,7

* Breite variiert stark mit Schichtdicke.

Wasserdampf

	Von λ	bis λ	Max. λ
Schwach	1,14	1,73	1,46
Schwach	1,73	2,24	1,92
Stärker	2,24	3,27	2,66
Stark	4,8	6,25	
Maxima:	5,25	5,90	6,07
Stark	6,25	8,54	

stärkstes Max. bei 6,53

Absorpt.-Gebiet v. 11 μ an: Max. bei 11,6 12,4 13,4 14,3 15,7 u. 17,5 μ.

25a. Reflexionsvermögen von Metallen

in Prozenten, bei nahe senkrechtem Einfall; Hagen u. Rubens.

λ	Ag	Pt	Ni	Stahl	Au	Cu*)	Spiegelmetalle R	Spiegelmetalle B	Spiegelmetalle M	Ag an Glas	Hg an Glas
0,251	34,1	38,6	37,8	32,9	33,8	25,9	29,9	35,8	67,0		
0,288	21,2	33,8	42,7	36,0	34,0	24,3	37,7	37,1	70,6		
0,305	9,1	39,8	44,2	37,2	31,8	25,3	41,7	37,2	72,2		
0,316	4,2	—	—	—	—	—	—	—	—		
0,326	14,6	41,4	45,2	40,3	28,6	24,9	—	39,3	75,5		
0,338	55,5	—	46,5	—	—	—	—	—	—		
0,357	74,5	43,4	48,8	45,0	27,9	27,3	51,0	43,8	81,2		
0,385	81,4	45,4	49,6	47,8	27,1	28,6	53,1	44,3	83,9		
0,420	86,6	51,8	56,6	51,9	29,3	32,7	56,4	47,2	83,3		
0,450	90,5	54,7	59,4	54,4	33,1	37,0	60,0	49,2	83,4	85,7	72,8
0,500	91,3	58,4	60,8	54,8	47,0	43,7	63,2	49,3	83,3	86,6	70,9
0,550	92,7	61,1	62,6	54,9	74,0	47,7	64,0	48,3	82,7	88,2	71,2
0,60	93,6	64,2	64,9	55,4	84,4	71,8	64,3	47,5	83,0	88,1	69,9
0,65	95,9	66,5	66,6	56,4	88,9	80,0	65,4	51,5	82,7	89,1	71,5
0,70	96,2	69,0	68,8	57,6	92,3	83,1	66,8	54,9	83,3	89,6	72,8
0,80	—	70,3	69,8	58,0	94,9	88,6	—	63,1	84,3		
1,0	97,5	72,9	72,0	63,1	—	90,1	70,5	69,8	84,1		
1,5	—	77,7	78,6	70,8	—	93,8	75,0	79,1	85,1		
2,0	97,8	80,6	83,5	76,7	96,8	95,5	80,4	82,3	86,7		
3,0	98,1	88,8	88,7	83,0	—	97,1	86,2	85,4	87,4		
5,0	98,1	93,5	94,4	89,0	97,0	97,9	89,1	87,3	89,0		
9,0	98,7	95,4	95,6	92,9	98,0	98,4	92,2	90,3	90,6		
14,0	98,3	96,4	97,2	96,0	97,9	—	93,6	90,3	92,2		

R = Ross = 68,2 Cu + 31,8 Sn; M = Mach = 67 Al + 33 Mg; B = Brandes u. Schünemann = [illegible] Cu + 20 Ni + [illegible] Sn + 5 Fe

*) Die Zahlen gelten für reinstes Handelskupfer. Elektrolytisches Cu reflektiert etwa 8 Proz. mehr.

26. Farben Newton'scher Ringe,

welche im reflektierten und durchgehenden weißen Licht für senkrecht auffallende Strahlen eine Luftschicht von der Dicke *d* zeigt.

d	Reflektiert	Durchgehend
mm 10⁴	**1. Ordnung.**	
0	Schwarz	Weiß
20	Eisengrau	Weiß
48	Lavendelgrau	Gelblich Weiß
79	Graublau	Bräunl. Weiß
109	Klareres Grau	Gelbbraun
117	Grünl. Weiß	Braun
129	Fast Weiß	Klares Rot
133	Gelblich Weiß	Karminrot
137	Blaß Strohgelb	Dunkel Rotbraun
140	Strohgelb	Dunkel Violett
153	Klares Gelb	Indigo
166	Lebhaft. Gelb	Blau
215	Braungelb	Graublau
252	Rötlich Orange	Bläulich Grün
268	Warmes Rot	Blaß Grün
275	Tieferes Rot	Gelblich Grün
	2. Ordnung.	
282	Purpur	Helleres Grün
287	Violett	Grünlich Gelb
294	Indigo	Goldgelb
232	Himmelblau	Orange
364	Grünlichblau	Bräunl. Orange
374	Grün	Hell Karminrot
413	Helleres Grün	Purpur
421	Gelblich Grün	Violett-Purpur
433	Grünlich Gelb	Violett
455	Reines Gelb	Indigo
474	Orange	Dunkel Blau
499	Lebhaft rötlich Orange	Grünlich Blau
550	Dunkel Violettrot	Grün

d	Reflektiert	Durchgehend
mm 10⁴	**3. Ordnung.**	
564	Hell bläulich Violett	Gelblich Grün
575	Indigo	Unrein Gelb
629	Blau (grünl.)	Fleischfarben
667	Meergrün	Braunrot
688	Glänzend Grün	Violett
713	Grünlich Gelb	Graublau
747	Fleischfarbe	Meergrün
767	Karminrot	Schön Grün
810	Matt Purpur	Matt Meergrün
826	Violett Grau	Gelblich Grün
	4. Ordnung.	
841	Graublau	Grünlich Gelb
855	Matt Meergrün	Gelbgrau
872	Bläulich Grün	Malv. Graurot
905	Schön Hellgrün	Karminrot
963	Hell Graugrün	Graurot
1003	Grau, fast Weiß	Graublau
1024	Fleischrot	Grün
	5. Ordnung.	
1169	Matt Blaugrün	Matt Fleischrot
[illegible]	Matt Fleischrot	Matt Blaugrün

Zu Tab. 25. Die dort genannten Körper zeigen in einigen ultraroten Spektralbezirken metallische Reflexion, verbunden mit Undurchlässigkeit in sehr dünnen Schichten. Die Maxima liegen

für Quarz bei $\lambda = 8{,}5$, 9,0 u 20,7 μ (jenseits 50 μ ist Quarz wieder durchlässig);
für Flußspat bei 24,0 u. 31,6; für Kalkspat bei 6,7, 11,4 und 29,4;
für Steinsalz bei 51,2; für Sylvin bei 61,1 μ. Sylvin zeigt, wahrscheinlich von $MgCl_2$-Gehalt herrührend, auch bei 3,2 u. 7,1 μ Absorptionsstreifen.

27. Zur Reduktion einer Schwingungsdauer auf unendlich kleine Schwingungen.

Von der bei einem ganzen Schwingungsbogen α beobachteten Schwingungsdauer t eines Magnets oder Pendels ist abzuziehen kt (28).

α	k		α	k		α	k		α	k	
0°	0,00000	0	10°	0,00048	10	20°	0,00190	20	30°	0,00428	29
1	000	2	11	058	11	21	210	20	31	457	30
2	002	2	12	069	11	22	230	21	32	487	31
3	004	4	13	080	13	23	251	23	33	518	32
4	008	4	14	093	14	24	274	23	34	550	33
5	012	5	15	107	15	25	297	25	35	583	33
6	017	6	16	122	16	26	322	25	36	616	35
7	023	7	17	138	16	27	347	26	37	651	35
8	030	9	18	154	18	28	373	27	38	686	37
9	039	9	19	172	18	29	400	28	39	723	38
10	0,00048		20	0,00190		30	0,00428		40	0,00761	

28. Reduktion des an einer Skale beobachteten Ausschlages,

wenn der Abstand vom Spiegel A Skalenteile beträgt (25).

Durch Subtraktion der Zahlen wird der beobachtete Skalenausschlag dem Ablenkungswinkel proportional. Die Korrektion auf die Tangente beträgt $\frac{3}{4}$, auf den Sinus $\frac{9}{8}$, auf den Sinus des halben Winkels $\frac{33}{32}$ der Zahlen.

A	$e = 50$	100	150	200	250	300	350	400	450	500
1000	0,04	0,33	1,11	2,60	5,02	8,54	13,33	19,5	27,1	36,3
1200	0,03	0,23	0,77	1,82	3,58	6,03	9,45	13,9	19,5	26,2
1400	0,02	0,17	0,57	1,34	2,61	4,47	7,03	10,4	14,6	19,7
1600	0,02	0,13	0,44	1,03	2,00	3,44	5,43	8,0	11,3	15,4
1800	0,01	0,10	0,35	0,82	1,59	2,73	4,30	6,4	9,0	12,3
2000	0,01	0,08	0,28	0,66	1,29	2,22	3,51	5,21	7,37	10,05
2200	0,01	0,07	0,23	0,55	1,07	1,83	2,91	4,32	6,12	8,35
2400	0,01	0,06	0,19	0,46	0,90	1,54	2,45	3,64	5,16	7,05
2600	0,01	0,05	0,16	0,39	0,77	1,32	2,09	3,11	4,42	6,03
2800	0,01	0,04	0,14	0,34	0,66	1,14	1,81	2,69	3,82	5,21
3000	0,00	0,04	0,12	0,29	0,58	0,99	1,58	2,35	3,33	4,55
3200	0,00	0,03	0,11	0,26	0,51	0,87	1,38	2,07	2,93	4,01
3400	0,00	0,03	0,10	0,23	0,45	0,77	1,23	1,83	2,60	3,56
3600	0,00	0,03	0,09	0,21	0,40	0,69	1,10	1,64	2,32	3,18
3800	0,00	0,02	0,08	0,18	0,36	0,62	0,98	1,47	2,09	2,86
4000	0,00	0,02	0,07	0,17	0,32	0,56	0,89	1,33	1,88	2,58

29. Zur Rechnung an gedämpften Schwingungen. (Vgl. 27 u. 108.)

T und α_1 = Schwingungsdauer u. Ausschlag bei dem Dämpfungsverhältnis k,
τ und α = entsprechende Schwingungsdauer u. Ausschlag ohne Dämpfung:
dann gilt $T/\tau = \sqrt{1 + \Lambda^2/\pi^2}$; $\alpha/\alpha_1 = k^{1/\pi \cdot \operatorname{arctg} \pi/\Lambda}$.

$\lambda =$ log k	$\Lambda =$ lgnat k	k	$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}$	$k^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}$	$\lambda =$ log k	$\Lambda =$ lgnat k	k	$\sqrt{1+\frac{\Lambda^2}{\pi^2}}$	$k^{\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{\Lambda}}$
0.00	0.0000	1,000	1,0000	1,0000	0.44	1.0131	2,754	1,0507	1,5008
.01	.0230	1,023	,0000	,0115	.46	.0592	2,884	,0553	,5219
.02	.0461	1,047	,0001	,0231	.48	.1052	3,020	,0601	,5428
.03	.0691	1,072	,0002	,0347	.50	.1513	3,162	,0650	,5635
.04	.0921	1,096	,0004	,0463	.52	.1973	3,311	,0702	,5839
.05	.1151	1,122	,0007	,0578	.54	.2434	3,467	,0755	,6041
.06	.1382	1,148	,0010	,0694	.56	.2894	3,631	,0810	,6240
.07	.1612	1,175	,0013	,0811	.58	.3355	3,802	,0866	,6437
.08	.1842	1,202	,0017	,0927	.60	.3816	3,981	.0924	,6630
.09	.2072	1,230	,0022	,1044	.62	.4276	4,169	,0984	,6820
.10	.2303	1,259	,0027	,1160	.64	.4737	4,365	,1046	,7008
.11	.2533	1,288	,0032	,1277	[illegible]	5197	4,571	,1109	,7193
.12	.2763	1,318	,0039	,1393	.68	.5658	4,786	,1173	,7375
.13	.2993	1,349	,0045	,1510	.70	.6118	5,012	,1239	,7554
.14	.3224	1,380	,0052	,1626	.72	.6579	5,248	,1307	,7730
.15	3454	1,413	,0060	,1743	.74	.7039	5,495	,1376	,7904
.16	.3684	1,445	,0069	,1859	.76	.7500	5,754	,1447	,8074
17	.3914	1,479	,0077	,1975	.78	.7960	6,026	,1519	,8241
.18	.4145	1,514	,0087	,2091	.80	8421	6,310	,1592	,8406
.19	4375	1,549	,0097	,2208	.82	.8881	6,607	,1667	,[illegible]
.20	4605	1,585	,0107	,2324	.84	.9342	6,918	,1743	,8726
.21	.4835	1,622	,0118	,2440	.86	1.9802	7,244	,1821	,[illegible]
22	.5066	1,660	,0130	,2556	[illegible]	2.0263	7,586	,1900	,9035
.23	.5296	1,698	,0142	,2670	.90	.0723	7,943	,1980	,9185
.24	.5526	1,738	,0155	,2785	.92	.1184	8,318	,2061	,9332
.25	.5756	1,778	,0167	,2900	.94	.1644	8,710	,2144	,9476
26	.5987	1,820	,0180	,3014	96	.2105	9,120	,2228	,9617
.27	.6217	1,86[illegible]	,0194	,3128	.98	.2565	9,550	,2312	,9756
.28	.6447	1,905	,0208	,3242	1.00	.3026	10,00	,2396	1,9892
.29	.6677	1,950	,0223	,3356	.1	.5328	12,59	,2845	2,0531
.30	.6908	1,995	,0239	,3469	.2	.7631	15,85	,3318	,1108
.31	.7138	2,042	,0255	,3582	.3	2.9934	19,95	,3813	,1627
.32	.7368	2,089	,0271	,3694	.4	[illegible]	25,12	,4328	,2098
.33	.7599	2,138	,0288	,3806	.5	4539	31,62	,4862	,2512
.34	.7829	2,188	,0306	,3918	.6	.6841	39,81	,5412	,2888
.35	.8059	2,239	,0324	,4029	.7	3.9144	50,12	,5976	,3226
.36	.8289	2,291	,0342	,4140	.8	4.1447	63,10	,6554	,3530
.37	8520	2,344	,0361	,4250	1.9	4.3749	79,43	,7144	,3803
.38	.8750	2,399	,0381	,4360	2.0	4.6052	100,0	1,7745	,4050
.39	.8980	2,455	,0401	,4469	2.5	5.7565	316,2	2,0875	,4978
.40	.9210	2,512	,0421	,4578	3.0	6.9078	1000	2,4155	,5562
.41	.9441	2,570	,0442	,4686	4 0	9.2103	10^4	3,0976	,6214
.42	.9671	2,630	,0463	,4794	5.0	11.513	10^5	3,7987	,6544
.43	0.9901	2,692	,0485	,4901	10.0	23.026	10^{10}	7,3972	,7015
.44	1 0131	2,754	1,0507	1,5008	∞	∞	∞	∞	2,7183

30. Spezifischer elektrischer Widerstand σ von Metallen bei 18°.

	$10^4\sigma$	$10^3\alpha$		$10^4\sigma$	$10^3\alpha$
Silber . . .	0,016	+4,0	Blei	0,21	+4,0
Kupfer . . .	0,017	4,0	Antimon . .	0,45	4,1
Gold	0,023	4,0	Tantal	0,16	3
Aluminium . .	0,032	3,6	Wismut	1,2	4,2
Iridium	0,053	4,1	Quecksilber .	0,958	+0,92
Rhodium . .	0,060	4,4	Konstantan . . .	0,49	—,03 bis +,05
Zink	0,061	3,7	Manganin	0,42	bis +0,03
Cadmium . . .	0,076	4,0	Neusilber	0,16—,40	+0,6 bis +,23
Palladium . . .	0,107	3,8	Nickelin	0,42	0,23
Platin, rein . .	0,108	3,9	Patentnickel . .	0,33	0,2
„ käuflich	0,14	2 bis 3	20 Pt, 80 Ag . . .	0,30	0,33
Nickel	0,08—,11	bis 6	10 Rh, 90 Pt . . .	0,20	1,7
Eisen	0,09—,15	bis 6	Messing	0,07—,09	
Stahl	0,15—0,5		Gaskohle	etwa 50	—,02 bis —,3

31. Leitvermögen κ wässriger Lösungen bei 18° in Θ^{-1} cm^{-1}.

Lösung[1]	KCl κ	KCl Δκ	NH_4Cl κ	NH_4Cl Δκ	NaCl κ	NaCl Δκ	K_2SO_4 κ	K_2SO_4 Δκ	$MgSO_4$ κ	$MgSO_4$ Δκ	$ZnSO_4$ κ	$ZnSO_4$ Δκ	$CdSO_4$ κ	$CdSO_4$ Δκ
5%	,069	2,0	,092	2,0	,067	2,2	,046	2,2	,0263	2,6	,0191	2,2	,0146	2,1
[illegible]	,136	1,9	,178	1,9	,121	2,1	,086	2,0	,0414	2,4	,0321	2,2	,0247	2,1
15	,202	1,8	,259	1,7	,164	2,1			,048	2,5	,0415	2,3	,033	2,1
20	,268	1,7	,337	1,6	,196	2,2			,048	2,7	,047	2,4	,039	2,1
25			,403	1,5	,214	2,3			,042	2,9	,048	2,6	,043	2,2
[illegible]											,044	2,7	,044	2,4
35													,042	2,5
Max. = bei									0,0492 17,4%		0,0481 23,5%		0,044 28%	

Lösung	$CuSO_4$ κ	$CuSO_4$ Δκ	KJ κ	KJ Δκ	$AgNO_3$ κ	$AgNO_3$ Δκ	KOH κ	KOH Δκ	HCl κ	HCl Δκ	HNO_3 κ	HNO_3 Δκ	H_2SO_4 κ	H_2SO_4 Δκ
5%	,0189	2,2	,034	2,1	,0256	2,2	,172	1,9	,395	1,59	,258	1,50	,209	1,21
10	,0320	2,2	,068	2,0	,0476	2,2	,315	1,9	,630	1,56	,461	1,45	,392	1,28
15	,0421	2,3	,105	1,9	,068	2,2	,425	1,9	,745	1,55	,613	1,40	,543	1,36
[illegible]			,146	1,8	,087	2,1	,499	2,0	,762	1,54	,711	1,38	,653	1,45
25			,188	1,6	,106	2,1	,540	2,1	,723	1,53	,770	1,38	,717	1,54
30			,230	1,7	,124	2,1	,542	2,3	,662	1,52	,785	1,39	,740	1,62
35			,273	1,6	,141	2,1	,509	2,4	,591	1,51	,769	1,43	,724	1,70
40			,317	1,5	,157	2,1	,450	2,7	,515	—	,733	1,49	,680	1,78
50			,392	1,4	,186	2,1					,631	1,6	,541	1,93
60					,210	2,1					,513	1,6	,373	2,13
70											,396	1,5	,216	2,56
80											,267	1,3	,111	3,49
Max. = bei							0,544 28%		0,767 18,3%		0,785 29,7%		0,740 30,0%	

Zu Tab. 30. Widerstand eines cm-Würfels $=\sigma$, eines 1 m langen Drahtes von 1 qmm $=10000\,\sigma\,\Omega$; $\alpha=$ relative Zunahme von σ auf $+1°$. — Im allgemeinen giltig für weiche reine Metalle; Härte und besonders Verunreinigung erhöht σ und verkleinert α.

Zu Tab. 31. Gehalt: Gewichtsprozente der Lösung; die Salze wasserfrei gerechnet. $\Delta\varkappa=$ Mittl. Zunahme von $\varkappa$ zw. 18 u. 26° auf $+1°$ in Proz. von $\varkappa_{18}$. — Vollständiger bei K. u. Holborn, Leitvermögen der Elektrolyte.

32. Äquivalentleitvermögen $\Lambda=\varkappa/\eta$ wässriger Lösungen bei 18°.

Konzentration η in gr.-Äqu./ccm; 96 II. (F. K. mit M. Maltby, v. Steinwehr, Grüneisen.)

$1000\,\eta$	KCl	NaCl	LiCl	KNO_3	$AgNO_3$	$\frac{1}{2}MgCl_2$	$\frac{1}{2}K_2SO_4$	$\frac{1}{2}MgSO_4$	$\frac{1}{2}ZnSO_4$	$\frac{1}{2}CuSO_4$	HCl	$\frac{1}{2}H_2SO_4$
0	130,1	109,0	98,9	126,5	115,8	111,4	133,1	114,4	115,1	115,7	383	366
0,0001	129,1	108,1	98,1	125,5	115,0	109,4	130,8	109,9	109,5	109,9		
0,0002	128,8	107,8	97,8	125,2	114,6	108,9	130,1	108,1	107,5	107,9		
0,0005	128,1	107,2	97,2	124,4	113,9	107,7	128,6	104,2	103,2	103,6		363
0,001	127,3	106,5	96,5	123,6	113,1	106,3	126,9	99,9	98,4	98,6	377	361
0,002	126,3	105,6	95,6	122,6	112,1	104,5	—	94,1	92,0	91,9	376	351
0,005	124,4	103,8	93,9	120,5	110,0	101,8	120,3	84,5	81,8	81,0	373	330
0,01	122,4	102,0	92,1	118,2	107,8	98,1	115,8	76,2	72,8	71,7	370	308
0,02	120,0	99,6	89,9	115,2	—	94,8	110,4	67,7	63,1	62,4	367	286
0,05	115,8	95,7	86,1	109,9	99,5	88,5	101,9	56,9	52,1	51,2	360	253
0,1	112,0	92,0	82,4	104,8	94,3	83,4	94,9	49,7	45,3	43,8	351	225
0,2	108,0	87,7	77,9	98,7	—	77,8	87,8	43,2	39,1	37,7	342	214
0,5	102,4	80,9	70,7	89,2	77,5	69,5	78,5	—	—	—	327	[illegible]
1	98,3	74,3	63,4	80,5	67,6	61,4	71,6	28,9	26,2	25,8	301	198

33. Ionenbeweglichkeiten im Wasser bei 18°. Vgl. S. 445.

Kationen						Anionen					
Cs	68	Ag	54,0	$\frac{1}{2}$Mg	46,0	J	66,4	JO_3	33,9	CHO_2	47
Rb	68	Tl	66,0	$\frac{1}{2}$Zn	46,7	Br	67,6	BrO_3	46	$C_2H_3O_2$	35
K	64,7	H	318	$\frac{1}{2}$Cd	47,5	Cl	65,4	ClO_3	55,0	$C_3H_5O_2$	31
Na	43,6	$\frac{1}{2}$Ba	55,5	$\frac{1}{2}$Cu	47,2	SCN	56,6	JO_4	48	$\frac{1}{2}SO_4$	68,4
Li	33,4	$\frac{1}{2}$Sr	51,7	$\frac{1}{2}$Pb	61,3	F	46,6	ClO_4	64	$\frac{1}{2}CrO_4$	72
NH_4	64	$\frac{1}{2}$Ca	51,6			NO_3	61,8	OH	174	$\frac{1}{2}C_2O_4$	63

34. Elektrochemische Äquivalente.

Der Strom 1 A $=0{,}1$ CGS zersetzt oder scheidet aus

	mg Silber	mg Kupfer	mg-Äquivalente	mg Wasser	cmm Knallgas v 0° u. 760 mm
in 1 sek	1,118	0,3294	0,01036	0,0933	0,1740
in 1 min	67,08	19,76	0,6215	5,60	10,44
in 1 h	4025	1186	37,29	335,9	626

35. Schlagweite s in cm und Spannung P in el.-stat. CGS zwischen Kugeln vom Halbmesser r cm

in Luft von 18° u. 745 mm Hg, meist nach Heydweiller und Paschen.

Zusammenstellung von Heydweiller, Wied. Ann. 48, 235. 1893.

Auf je $-3°$ oder je $+8$ mm Druck wachsen die Zahlen um 1 Prozent.

1 el.-stat. CGS = 300 V.

s	$r = 0{,}25$	0,5	1,0	2,5 cm
cm				
0,1	$P =$ 16,1	16,0	15,7	
0,2	27,9	27,9	27,0	
0,3	37,8	37,9	37,9	
0,4	46	48	48	
0,5	52	58	58	61
0,6	57	66	68	72
0,7	61	73	77	82
0,8	63	80	87	91
0,9	65	85	96	100
1,0	67	90	104	109
1,1	69		111	119
1,2	70		118	128
1,3	72		124	137
1,4	73		129	146
1,5	74		134	154
1,6			138	162

35a. Magnetisierungs-Koeffizienten $\varkappa \cdot 10^6$ in CGS

bei 18°, bezogen auf Vakuum $= \pm 0$.

Wismut	—14
Gold	—3
Quecksilber	—2
Silber	—1,5
Zink	—0,9
Schwefel	—0,8
Wasser	—0,76
Kupfer	—0,7
Luft, 760 mm	+0,029
Sauerstoff, desgl.	+0,12
Aluminium	+1,8
Platin	+30
Palladium	+55
Fe_2Cl_6 i. wässr. Lös. $s=1{,}5$	+60

36. Dielektrizitätskonstante

bei 18° (vgl. 133),

u. A. nach Arons, Boltzmann, Cohn, Curie, Drude, Franke, Heerwagen, Nernst, Schlundt, Schmidt, Starke, Tereschin, Thwing, Turner.

Vgl. Drude, ZS f. physik. Ch. 23, 298 u. 308. 1897; Turner, ib. 35, 410. 1900.

$-\Delta D$ = Abnahme auf $+1°$ in Proz.

	D	$-\Delta D$
Aceton	21	0,6
Äthylacetat	6,5	
Äthyläther	4,35	0,46
Äthylalkohol	26	
Äthylenchlorid	10,8	0,5
Ameisensäure	60	
Anilin	7,2	0,35
Benzol	2,27	0,07
Brom	3,2	
Bromoform	4,6	
Chloroform	5,1	
Methylalkohol	33	
Nitrobenzol	36	0,5
o-Nitrotoluol	27,8	0,55
Petroleum	2,0	
Ricinusöl	4,7	
Schwef.-Kohlenst.	2,5	
Terpentinöl	2,2	
Toluol	2,3	
Wasser	81	0,45
Xylol, Ortho-	2,6	
„ Meta-	2,37	0,05
„ Para-	2,2	
Alaun	6,4	
Flußspat	6,7	
Glas, gewöhnl.	4 bis 7	
Optische Gläser	bis 10	
Glimmer	4 bis 8	
Guttapercha	2,5	
Hartkautschuk	2,8	
Kautschuk	2,2 bis 3,7	
Kalkspat	8; 8,5	
Paraffin	1,7 bis 2,3	
Porzellan	5	
Quarz	4,5	
Schellack	2,8 bis 3,7	
Schwefel	3,5 bis 4,6	
Steinsalz	5,6	
Sylvin	4,7	
Luft, bezogen auf d. Vakuum	1,0006	

37. Magnetisierbarkeit einiger Eisensorten.

Nach Beobachtungen in der P. T. Reichsanstalt von Gumlich u. E. Schmidt.

Magnetische Permeabilität μ, bez. magn. Induktion $\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H}$ des Materials für die innere magnetisierende Feldstärke $\mathfrak{H}$ Gauſs.

$\mathfrak{B}$ ist die Dichte der von $\mathfrak{H}$ durch das Material getriebenen Kraftlinien. Die Magnetisierung ist $\mathfrak{J} = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{H}}{4\pi}$, der Magn.-Koeffizient $\varkappa = \frac{\mathfrak{J}}{\mathfrak{H}} = \frac{\mu - 1}{4\pi}$.

$\mathfrak{H}_0$ = Koerzitivkraft, d. h. Feldstärke, die zur Beseitigung einer starken Magnetisierung nötig ist.

$\mathfrak{B}_0$ = Remanenz der Induktion, d. h. Dichte der nach Aufhören einer starken magnetisierenden Kraft im geschlossenen Eisen bleibenden Kraftlinien, also $\mathfrak{B}_0/4\pi$ = remanentes magn. Moment der Volumeinheit.

Q_e = Arbeit („Energievergeudung") in Erg/cm³ bei einem magnetisierenden Kreisprozeß zwischen den Grenzen $\pm\mathfrak{H}_e$, denen die Induktionen $\pm\mathfrak{B}_e$ entsprechen.

Alle Größen in CGS-Einheiten. Vgl. 115 und Anh. 21 bis 22b u. 26a.

$\mathfrak{H}$	Magnetisch weiches Eisen				Magnetisch hartes Eisen		
	Schwed. Schmiedeeisen	Stahlguß 5mal geglüht	Stahlguß geglüht	Stahlguß ungeglüht	Gußeisen	Wolfram-Magnetstahl	Magnetstahl gehärtet
0,5	μ = 2500	1450	—	490			
0,75	3120	2890	—	710			
1,0	3710	3500	820	970			
1,25	3680	3680	1220	1270			
1,5	3560	3570	1840	1600			
2	3300	3280	2500	2060			
2,5	3020	[illegible]	2630	2080			
3	[illegible]	[illegible]	2520	2010			
4	2350	2380	2260	1850			
5	2060	2100	2020	1700	81		
7,5	1600	[illegible]	[illegible]	1360	110		
10	1300	1320	[illegible]	1140	141	80	
15	942	953	945	[illegible]	131	[illegible]	68
20	736	747	740	[illegible]	[illegible]	119	78
25	603	615	610	[illegible]	173	159	[illegible]
30	513	524	520	485	163	203	103
40	396	405	403	380	[illegible]	233	155
50	323	[illegible]	330	315	129	222	194
60	274	280	[illegible]	[illegible]	117	[illegible]	193
[illegible]	210	[illegible]	216	210	99	170	164
100	172	177	177	173	[illegible]	144	133
150	120	123	133	[illegible]	65	105	100
50	$\mathfrak{B}$ = 16140	16540	16500	15740	6450	11100	9700
60	16440	16790	16790	16190	7000	12220	11570
80	16800	17270	17270	16800	[illegible]	[illegible]	13090
100	17200	17700	17700	17300	[illegible]	14400	13800
150	17950	18490	[illegible]	18280	9800	15750	15000
$\mathfrak{H}_0$ =	0,8	0,97	1,63	2,06	11,9	27,5	52,6
$\mathfrak{B}_0$ =	4000	7100	8500	9000	[illegible]	9880	11700
$\mathfrak{H}_e$ =	200	151	[illegible]	156	166	505	234
$\mathfrak{B}_e$ =	18650	18500	18660	18390	9900	18720	16320
Q_e =	6700	11700	13300	20400	34300	[illegible]	311000

Erdmagnetismus im mittleren Europa für 1906,0.

Nach einer neuen Aufstellung der Deutschen Seewarte.

Mittlere jährliche Änderung:
Horizontal-Intensität +0,00014 bis 0,00034 CGS;
Deklination im Mittel für das Gebiet —0°,07; Inklination —0°,02 bis —0°,05.

38. Horizontal-Intensität in CGS-Einheiten oder Gauss.

Nördl. Breite	Länge östlich von Greenwich										
	2°	4°	6°	8°	10°	12°	14°	16°	18°	20°	22°
45°	0,215	0,216	0,218	0,219	0,220	0,222	0,223	0,224	0,226	0,227	0,228
46	,210	,212	,213	,215	,216	,217	,219	,220	,221	,222	,223
47	,206	,207	,209	,210	,211	,213	,214	,215	,216	,217	,218
48	,201	,203	,204	,205	,207	,208	,209	,210	,212	,213	,214
49	,197	,198	,200	,201	,202	,203	,205	,206	,207	,208	,209
50	,192	,194	,195	,196	,198	,199	,200	,202	,203	,204	,205
51	,188	,190	,191	,192	,193	,195	,196	,197	,199	,200	,201
52	,184	,185	,187	,188	,189	,190	,192	,193	,194	,196	,197
53	,180	,181	,183	,184	,185	,186	,188	,189	,191	,192	,193
54	,176	,177	,178	,180	,181	,182	,183	,184	,186	,187	,188
55	,172	,173	,175	,176	,177	,178	,179	,180	,181	,182	,183

39. Westliche Deklination.

N. Br.	Länge östlich von Greenwich												
	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°	8°	9°	10°	11°	12°
45°	14,6°	14,2	13,7	13,4	13,0	12,6	12,1	11,7	11,4	11,0	10,5	10,1	9,6
50	15,6	15,2	14,7	14,2	13,8	13,3	12,9	12,4	11,9	11,4	11,0	10,5	10,1
55	16,7	16,2	15,6	15,1	14,5	14,1	13,6	13,1	12,4	11,8	11,3	10,7	10,2

N. Br.	13°	14°	15°	16°	17°	18°	19°	20°	21°	22°	23°	24°	25°
45°	9,2°	8,9	8,5	8,0	7,5	7,1	6,6	6,2	5,8	5,3	4,8	4,2	3,7
50	9,5	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0	6,6	6,1	5,6	5,1	4,6	4,1	3,6
55	9,6	9,0	8,5	8,0	7,5	7,0	6,5	5,8	5,1	4,1	3,9	3,4	2,8

40. Nördliche Inklination.

Nördl. Breite	Länge östlich von Greenwich			
	5°	10	15	20
45°	61,3°	60,8	60,2°	59,7°
46	2,1	1,6	1,1	60,5
47	3,0	2,4	2,0	1,4
48	3,8	3,2	2,8	2,3
49	4,6	4,1	3,6	3,2
50	5,3	4,8	4,3	4,0
51	6,1	5,6	5,1	4,7
52	6,8	6,4	5,9	5,5
53	7,5	7,0	6,6	6,2
54	8,2	7,7	7,3	7,0
55	8,8	8,3	8,0	7,6

41. Einheiten des absoluten Maßsystems.

Grundgrößen: Länge l, Masse m, Zeit t. Die übrigen Größen drücken sich hierdurch in der Form aus:

$$l^{\lambda} \cdot m^{\mu} \cdot t^{\tau};$$

λ, μ, τ sind die Dimensionen der Größenart bezüglich Länge, Masse u. Zeit.

Zeiteinheit = 1 sek.

Zusammengehörige Einheiten für Länge und Masse:

dm, kg; cm, gr; mm, mg.

Die Zahlen unter N geben das Verhältnis an, in dem eine Einheit wächst, wenn man von mm, mg zu cm, gr oder von cm, gr zu dm, kg übergeht. Angaben in mm, mg sind also durch N zu dividieren, um sie auf cm, gr zu reduzieren.

In der vorletzten Spalte Namen gebräuchlicher Einheiten und Angabe, wie viele von diesen auf die CGS-Einheit gehen.

Das Größenverhältnis: $\frac{\text{elektromagn. Einh.}}{\text{elektrostat. Einh.}}$ ist =

v für El.-Menge od. Strom,
$1/v$ „ elektr. Potential,
v^2 „ elektr. Kapazität,
$1/v^2$ „ elektr. Widerstand,

wo im CGS-System

$$v = 300 \cdot 10^8.$$

Zahlen, die in beiden Systemen dieselbe Größe darstellen, verhalten sich umgekehrt.

	λ	μ	τ	1 CGS-Einh. ist gleich	N
Winkel	0	0	0		1
Länge	1	0	0	1 Centim.	10
Lineare Krümmung	−1	0	0		0,1
Fläche	2	0	0		10^2
Volumen	3	0	0		10^3
Masse	0	1	0	1 Gramm	10^3
Dichtigkeit	−3	1	0		1
Zeit, Schwingdauer	0	0	1	1 Sekunde	1
Geschwindigkeit	1	0	−1		10
Wink.-Geschwind.	0	0	−1		1
Beschleunigung	1	0	−2		10
Winkelbeschleunig.	0	0	−2		1
Kraft	1	1	−2	1 Dyne	10^4
Drehmoment, Direktionskraft	2	1	−2		10^5
Druck	−1	1	−2		10^2
Elastizitätsmodul	−1	1	−2		10^2
Kapillarkonstante	0	1	−2		10^3
Inn. Reibungskoeff.	−1	1	−1		10^2
Trägheitsmoment	2	1	0		10^5
Arbeit, Energie, Leb. Kraft, Wärmemenge	2	1	−2	1 Erg 10^{-7} Joule	10^5
Leistung	2	1	−3	10^{-7} Watt	10^5
Schwingungszahl, Tonhöhe	0	0	−1		1
Lichtbrech.-Verh.	0	0	0		1
Lichtdreh.-Konst.	−1	0	0		0,1
Elektrostat. System:					
Elektr.-Menge	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	$\frac{1}{3}10^{-9}$ Coul.	10^3
Potential	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	300 V	10^2
Kapazität	1	0	0	$\frac{1}{9}10^{-11}$ Far.	10
Dielektr.-Konst.	0	0	0		1
Elektr. Strom	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	$\frac{1}{3}10^{-9}$ A	10^3
Widerstand	−1	0	1	$9 \cdot 10^{11}$ Ω	0,1
Elektromagn. System:					
Magnetpol, Induktionsfluß	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1 Maxwell	10^3
Magn. Potential	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1		10^2
Magn. Moment	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1		10^4
Magn. Feldstärke, Magn. Induktion, Spez. Magn. (Vol.)	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1 Gauß	10
Magnetisier.-Koeff., Mag. Permeabilität	0	0	0		1
Elektr. Strom	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1	1 Web. = 10 A	10^2
Stromdichte	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−1		1
Elektr.-Menge	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	10 Coul.	10^2
Elm. Kraft, Potential	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	−2	10^{-8} V	10^3
Kapazität	−1	0	2	10^9 Farad	0,1
Widerstand	1	0	−1	10^{-9} Ω	10
Spez. Widerstand	2	0	−1		10^2
Stromleistung	2	1	−3	10^{-7} Watt	10^5
El.-dyn. Potential, Selbstind.-Koeff.	1	0	0	10^{-9} Quadr., Henry	10

42. Atomgewichte (O = 16,00).

A	39,9	Fe	55,9	Pd	106,5
Ag	107,93	H	1,008	Pt	194,8
Al	27,1	He	4	Ra	225
As	75,0	Hg	200,0	Rb	85,5
Au	197,2	J	126,97	Rh	103
B	11,0	Ir	193,0	S	32,06
Ba	137,4	K	39,15	Sb	120,2
Bi	208,5	Li	7,03	Se	79,2
Br	79,96	Mg	24,36	Si	28,4
C	12,00	Mn	55,0	Sn	119,0
Ca	40,1	N	14,04	Sr	87,6
Cd	112,4	Na	23,05	Te	127,6
Cl	35,45	Ne	20	Tl	204,1
Co	59,0	Ni	58,7	U	238,5
Cr	52,1	O	16,00	W	184
Cs	132,9	Os	191	X	[illegible]
Cu	63,6	P	31,0	Zn	65,4
F	19,0	Pb	206,9	Zr	90,6

43. Schwere g und Länge des Sekundenpendels l unter der geogr. Br. φ (35)

$g_{45} = 980,62$ cm/sek².

φ	g	$\frac{g}{g_{45}}$	l
Grad	cm/sek²		cm
0	978,1	0,9974	99,10
10	978,2	0,9976	99,12
20	978,7	0,9980	99,15
30	979,3	0,9987	99,23
40	980,2	0,9995	99,31
50	981,1	1,0005	99,40
60	981,9	1,0013	99,49
70	982,6	1,0020	99,56
80	983,0	1,0024	99,60
90	983,2	1,0026	99,62

44. Geographische Lage und Höhe einiger Orte.

Die östl. geogr. Länge ab Ferro ist um 17°,66 größer.

	Östl. Greenw.	Nördl. Breite	Über Meer		Östl. Greenw.	Nördl. Breite	Über Meer
	°	°	m		°	°	m
Aachen [1]) . . .	6,1	50,78	180	Jena . . .	11,6	50,94	160
Amsterdam .	4,9	52,37		Innsbruck . .	11,4	47,27	570
Basel	7,6	47,56	260	Karlsruhe. . . .	8,4	49,01	120
Berlin.	13,4	52,50	40	Kiel.	10,2	54,34	
Bern	7,4	46,95	560	Köln	7,0	50,94	40
Bonn	7,1	50,73	50	Königsberg . .	20,5	54,71	
Braunschweig	10,5	52,27	100	Kopenhagen	12,6	55,69	
Bremen	8,8	53,08		Leipzig.	12,4	51,34	100
Breslau	17,0	51,11	130	Madrid	− 3,7	40,41	660
Brüssel	4,4	50,85	90	Mailand	9,2	45,47	130
Cassel	9,5	51,32	160	Marburg [2]) . .	8,8	50,81	210
Danzig	18,7	54,35		München	11,6	48,15	530
Darmstadt . .	8,7	49,87	140	Münster	7,6	51,97	60
Dorpat . . .	26,7	58,38	50	Paris	2,3	48,83	60
Dresden . . .	13,7	51,04	100	Pest	19,1	47,50	70
Erlangen . . .	11,0	49,60	320	Petersburg. . .	30,3	59,94	
Frankfurt a.M.	8,7	50,11	90	Prag	14,4	50,09	200
Freiburg i. B	7,8	48,00	280	Rom	12,4	41,90	30
Gießen . . .	8,6	50,59	140	Rostock	12,1	54,09	
Göttingen . .	9,9	51,53	130	Stockholm . . .	18,1	59,34	
Graz	15,4	47,08	360	Straßburg. . . .	7,8	48,58	150
Greenwich . .	0,0	51,48		Stuttgart	9,2	48,78	270
Greifswald . .	13,4	54,10		Tübingen [3]) . .	9,1	48,52	350
Halle	12,0	51,49	100	Washington.	−77,0	38,89	
Hamburg . . .	10,0	53,55		Wien	16,4	48,23	180
Hannover. . .	9,7	52,38	70	Würzburg .	9,9	49,79	170
Heidelberg . .	8,7	49,41	100	Zürich [4])	8,6	47,38	460

1) 160 bis 200 m. 2) 180 bis 240 m. 3) 320 bis 380 m. 4) 420 bis 500 m.

45. Deklination der Sonne, Zeitgleichung und Sternzeit für den mittleren Mittag des 15. Meridians östl. von Greenwich (mitteleuropäische Einheits-Zeit). S. noch Tabelle 46.

Die Sternzeit um Mittag wächst in einem Tage um $3^{\mathrm{min}}\,56{,}6^{\mathrm{sek}} = 236{,}6^{\mathrm{sek}}$.

Mittlere Ortszeit = Sonnenzeit + Zeitgleichung.

* Die eingeklammerten Daten gelten für Schaltjahre.

*	Deklination der Sonne °	Diff. für 1 Tag °	Zeitgleichung m s	Sternzeit am Mittag h m s
Jan. 0 (1)	—23,10		+ 3 15	18 38 42
		[illegible]		
5 (6)	—22,64		5 34	58 24
		,130		
10(11)	—21,99		7 42	19 18 7
		,166		
15(16)	—21,16		9 36	37 50
		,200		
20(21)	-20,16		11 13	57 38
		,230		
25(26)	—19,01		12 38	20 17 16
		,260		
30(31)	—17,71		13 32	36 58
		,288		
Febr. 4 (5)	—16,27		14 10	56 41
		,308		
9(10)	—14,78		14 27	21 16 24
		,330		
14(15)	—13,08		14 25	36 7
		,348		
19(20)	—11,34		14 5	[illegible]
		,364		
24(25)	— 9,52		13 28	22 15 32
		,374		
März 1	— 7,65		[illegible]	35 15
		,384		
6	— 5,73		11 31	54 58
		,390		
11	— 3,78		10 15	23 14 41
		,394		
16	— 1,81		8 52	34 23
		,394		
21	+ 0,16		7 23	54 6
		,394		
26	2,13		5 52	0 13 49
		,390		
31	4,08		4 19	[illegible]
		,384		
April 5	6,00		2 49	53 14
		,374		
10	7,87		1 23	1 12 57
		,364		
15	9,69		+ 0 4	32 40
		,352		
20	11,45		— 1 5	52 23
		,334		
25	13,12		— 2 4	2 12 5
		,018		
[illegible]	14,71		— 2 52	31 48
		,296		
Mai 5	16,19		— 3 27	51 31
		,276		
10	17,57		— 3 48	3 11 14
		,250		
15	18,82		— 3 53	30 57
		224		
20	19,94		— 3 45	[illegible]
		,196		
25	20,92		— 3 23	4 10 22
		,164		
30	21,74		— 2 49	30 5
		,156		
Juni 4	22,42		— 2 4	49 48
		,100		
9	22,92		— 1 11	5 9 30
		,068		
14	23,26		— 0 10	29 13
		,034		
19	23,43		+ 0 55	48 56
		,000		
24	23,43		+ 2 0	6 8 39
		,034		
29	+23,26		+ 3 2	6 28 22
		,066		

*	Deklination der Sonne °	Diff. für 1 Tag °	Zeitgleichung m s	Sternzeit am Mittag h m s
		,069		
Juli 4	+22,92		+ 4 0	6 48 4
		,102		
[illegible]	22,41		4 49	7 7 47
		,136		
14	21,73		5 29	27 30
		,164		
[illegible]	20,91		[illegible]	47 13
		,194		
[illegible]	19,94		6 13	8 6 56
		,222		
29	18,83		6 13	26 38
		,248		
Aug. 3	17,59		5 57	46 21
		,272		
8	16,23		5 27	9 6 4
		,294		
13	14,76		4 42	25 47
		,314		
18	13,19		3 44	45 29
		,330		
23	11,54		[illegible]	10 5 12
		,346		
28	9,81		+ 1 11	24 55
		,360		
Sept. 2	8,01		— 0 20	44 38
		,370		
7	6,16		— 1 59	11 4 21
		,378		
12	4,27		— 3 41	24 3
		,384		
17	2,35		— 5 26	43 46
		,390		
[illegible]	+ 0,40		— 7 12	12 3 29
		,390		
27	— 1,55		— 8 55	23 12
		,388		
Okt. 2	— 3,49		—10 34	42 54
		,386		
7	— 5,42		—12 4	13 2 37
		,380		
12	— 7,32		—13 24	22 20
		,374		
17	- 9,19		—14 31	42 3
		,360		
22	—10,99		—15 23	14 1 45
		,348		
27	—12,73		—16 0	21 28
		,330		
Nov. 1	—14,38		—16 18	41 11
		,312		
[illegible]	—15,94		—16 16	15 0 54
		,288		
11	—17,38		—15 52	20 37
		,266		
[illegible]	—18,71		—15 7	40 19
		,236		
21	—19,89		—14 2	16 0 2
		,206		
26	—20,92		—12 36	19 45
		,174		
Dez. 1	-21,79		—10 58	39 26
		,140		
6	-22,49		— 8 54	59 10
		,102		
11	—23,00		— 6 40	17 18 53
		,064		
[illegible]	-23,32		— 4 17	38 36
		,026		
[illegible]	23,45		— 1 49	58 19
		,012		
26	—23,39		+ 0 41	18 18 2
		,054		
[illegible]	—23,12		+ 3 8	18 37 44

46. Korrektionstafel für den Anfang des Jahres.

Jahr	Korrektion k
	Tage
1903	— 0,755
1904	+ 0,003
1905	— 0,239
1906	— 0,481
1907	— 0,724
1908	+ 0,034
1909	- 0,208
1910	— 0,450
1911	— 0,693
1912	+ 0,065
1913	— 0,177
1914	— 0,419

47. Halbmesser der Sonne.

Datum	Halbmesser
	°
Januar 1.	0,272
Februar 1.	0,271
März 1.	0,269
April 1.	0,267
Mai 1.	0,265
Juni 1.	0,263
Juli 1.	0,263
August 1.	0,263
Septbr. 1.	0,265
Oktbr. 1.	0,267
Novbr. 1.	0,269
Dzbr. 1.	0,271

48. Mittlere Refraktion eines Gestirns.

Höhe	Refraktion
°	°
5	0,16
7	0,12
10	0,09
15	0,06
20	0,044
30	0,028
40	0,019
50	0,013
60	0,009
70	0,006
80	0,003
90	0,000

49. Mittlere Örter einiger Hauptsterne für 1906,0.

	Rektaszension			Jährl. Zuwachs	Deklination			Jährl. Zuwachs
	h	min	sek	sek	°	′	″	″
α Cassiopeiae	0	35	10,0	+ 3,38	56	1	19	+ 19,8
α Arietis	2	1	52,3	+ 3,37	23	1	6	+ 17,2
α Persei	3	17	36,4	+ 4,26	49	31	37	+ 13,0
α Tauri (Aldebaran)	4	30	31,5	+ 3,44	16	19	15	+ 7,4
α Aurigae (Capella)	5	9	44,6	+ 4,43	45	54	10	+ 3,9
α Orionis	5	50	4,9	+ 3,25	7	23	24	+ 0,9
α Can. maj. (Sirius)	6	41	0,5	+ 2,64	— 16	35	18	— 4,8
α Gemin. (Castor)	7	28	36,0	+ 3,83	32	5	43	— 7,6
α Can. min. (Procyon)	7	34	22,9	+ 3,14	5	27	59	— 9,1
α Hydrae	9	22	58,1	+ 2,95	— 8	15	3	— 15,5
α Leonis (Regulus)	10	3	22,0	+ 3,20	12	25	37	— 17,5
α Ursae maj.	10	57	56,0	+ 3,73	62	15	31	— 19,4
β Leonis	11	44	15,9	+ 3,06	15	5	51	— 20,1
α Virginis (Spica)	13	20	14,8	+ 3,15	— 10	40	15	— 18,9
α Bootis (Arcturus)	14	11	22,4	+ 2,73	19	40	18	— 18,8
α Coronae (Gemma)	15	30	42,5	+ 2,54	27	1	50	— 12,3
α Scorpii (Antares)	16	23	38,5	+ 3,67	— 26	13	27	— 8,2
α Ophiuchi	17	30	34,2	+ 2,78	12	37	41	— 2,8
α Lyrae (Wega)	18	33	45,3	+ 2,03	38	41	45	+ 3,2
α Aquilae (Atair)	19	46	11,3	+ 2,93	8	37	10	+ 9,3
α Cygni	20	38	13,6	+ 2,04	44	56	39	+ 12,8
α Piscium (Fomalhaut)	22	52	27,4	+ 3,32	— 30	7	15	+ 19,0
α Pegasi	23	0	4,6	+ 2,98	14	41	58	+ 19,3
α Urs. min. (Polaris)	1	25	8,5	+ 26,5	88	48	19	+ 18,7
δ Ursae minoris	18	2	35,9	— 19,5	86	36	50	+ 0,3

50. Verschiedene Zahlen.

$\pi = 3{,}1416$ ($^{22}/_{7}$); $\pi^2 = 9{,}8696$; $1/\pi = 0{,}31831$; $\lg \pi = \cdot 49715$.
$4\pi = 12{,}566$ ($^{100}/_{8}$); $1/4\pi = 0{,}079577$; $\lg 4\pi = 1 \cdot 09921$.
Basis d. nat. Logar. $e = 2{,}7183$; $\lg e = \cdot 43429$; $\lg \lg e = \cdot 63778 - 1$.
Modul der nat. Logarithmen $M = 1/\lg e = 2{,}3026$; $\lg M = \cdot 36222$.
Der Winkel, für welchen der Bogen dem Halbmesser gleich ist:
$= 57{,}2958^\circ = 3437{,}75' = 206265''$.
$\lg = 1 \cdot 758123 \quad 3 \cdot 536274 \quad 5 \cdot 314425$.
1 Pariser Fuß (12″; 144‴) = 0,32484 m; 1 m = 3,0784 Pariser Fuß.
1 Rhein. Fuß (12″; 144‴) = 0,31385 m; 1 m = 3,1862 Rhein. Fuß.
1 Engl. Fuß (12″; 120‴) = 0,30479 m; 1 m = 3,2809 Engl. Fuß.
1 Geogr. Meile = 7,4204 km; 1 km = 0,13476 Geogr. Meile.
1 Seemeile = 1,852 km; 1 km = 0,5400 Seemeile.
1 Engl. Meile = 1,609 km; 1 km = 0,6214 Engl. Meile.
(Die geogr. Meile entspricht 4 Bogenminuten des Äquators; die Seemeile entspricht der mittleren Bogenminute des Meridians.)
Die halbe große Axe der Erde = 6378,3 km,
die halbe kleine Axe „ „ = 6356,5 km,
der mittlere Halbmesser „ „ = 6367,4 km.
Mittlere Länge des bürgerlichen Jahres = 365 t 5 h 48,8 min.
Sterntag = mittlerer Tag − 3 min 55,9 sek = 0,99727 mittl. Tag.
Schallgeschwindigkeit bei 0° in trockener Luft = 331 m/sek.
Ausdehnungskoeffizient der Gase = 0,00367 = $^1/_{273}$.
Ausd.-Koeffizient des Wassers um 18° = 0,000186 = 1/5400.
1 gr-Gew. unter 45° Breite = 980,6 cm gr sek^{-2} = 980,6 Dyne.
1 Atm. Druck = 1033 gr-Gew./cm^2 = 1013200 cm^{-1} gr sek^{-2}.
1 Wasser-gr-Kal. (15°) = 427 gr-Gew. m = 41900000 cm^2 gr sek^{-2}.
Schmelzwärme des Wassers = 80,0; Dampfwärme = 539.
Spezifische Wärme der Luft bei konstantem Druck = 0,238.
Verhältnis der sp. Wärmen für zweiatom. vollkommene Gase = 1,40.
Verhältnis des Molekulargewichtes zur Dampfdichte = 28,95.
Wellenlänge des Natriumlichtes (D Fraunhofer) = 0,0005893 mm.
Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume $v = 300 \cdot 10^8$ cm/sek.
Lichtstärke von 1 qmm des schwarzen Körpers (72a) etwa:
bei 1500° 0,1 HK; bei 1700° 0,5 HK; bei 1800° 1,0 HK.
„Schwarze“ Temp. (S 171) d. elektr. Kohlebogens 3500°;
der Sonne 6000°; Solarkonstante = 3 bis 4 gr-Kal/qcm. min.
1 A = 0,1 elektromagnetische CGS = 1,118 mg Silber/sek.
1 Ω = 10^9 elektromagnetische CGS = 1,063 m/mm^2 Hg 0°.
1 V = 10^8 el.-magn. CGS = 1/300 el.-stat. CGS.
Akkumulator = 2,0; Daniell = 1,1 bis 1,2 V; Clark bei 18° = 1,4292 V.
Quecksilber-Cadmium-Element, bei 4° gesätt. (Weston) = 1,0190 V;
dasselbe, mit stets gesättigter Lösung, bei 15 bis 19° = 1,0187 V.

50a. Einfache mathematische Formeln.

Vollständiger z. B. in: Des Ingenieurs Taschenbuch, herausgegeben von dem Verein „Hütte"; Ligowski, Taschenbuch der Mathematik; Meyer Hirsch, Integraltafeln; Sohncke, Aufgaben aus der Diff.- u. Integr.-Rechnung. — Elementare Formeln mit Ableitung besonders auch in Nernst u. Schönfliess, Einführung in die math. Behandl. d. Naturwissenschaften.

Tafeln der Hyperbelfunktionen $\mathfrak{Sin}$ usw. siehe bei Ligowski oder des Ing. Taschenb.

$\lg x$ bedeutet lgnat$x$; $i=\sqrt{-1}$. — Die mit *) bezeichneten Reihen gelten nur für $+1>x>-1$.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3+\cdots{}^{*)};$$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots;\qquad a^x=e^{x\lg a};$$

$$\lg(1+x)=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots{}^{*)};\qquad \lg(a+x)=\lg a+\lg\left(1+\frac{x}{a}\right);$$

$$\tfrac{1}{2}\lg\frac{1+x}{1-x}=\frac{x}{1}+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots{}^{*)};\qquad \overset{a}{\lg}x=\lg x\cdot\overset{a}{\lg}e=\frac{\lg x}{\lg a};$$

$$\sin x=\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots;\qquad \mathfrak{Sin}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{2};$$

$$\cos x=\frac{e^{xi}+e^{-xi}}{2}=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots;\qquad \mathfrak{Cof}\,x=\frac{e^x+e^{-x}}{2};$$

$$\operatorname{tg}x=x+\frac{x^3}{3}+\frac{2x^5}{15}+\frac{17x^7}{315}+\cdots;\qquad \mathfrak{Tg}\,x=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}};$$

$$\operatorname{arctg}x=\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots{}^{*)};\qquad \arcsin x=x+\frac{x^3}{6}+\frac{3}{40}x^5+\cdots{}^{*)};$$

$$\mathrm{d}(x^m)=mx^{m-1}\mathrm{d}x;\qquad \mathrm{d}(e^x)=e^x\mathrm{d}x;\qquad \mathrm{d}(a^x)=\lg a\cdot a^x\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}\lg x=\frac{\mathrm{d}x}{x};\qquad \mathrm{d}\overset{a}{\lg}x=\frac{\mathrm{d}x}{x}\,\frac{1}{\lg a}=\frac{\mathrm{d}x}{x}\overset{a}{\lg}e;$$

$$\mathrm{d}\sin x=\cos x\,\mathrm{d}x;\qquad \mathrm{d}\cos x=-\sin x\,\mathrm{d}x;\qquad \mathrm{d}\operatorname{tg}x=\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=(1+\operatorname{tg}^2x)\,\mathrm{d}x;$$

$$\mathrm{d}\arcsin x=-\,\mathrm{d}\arccos x=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}};\qquad \mathrm{d}\operatorname{arctg}x=\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2};$$

$$\mathrm{d}(uv)=v\,\mathrm{d}u+u\,\mathrm{d}v;\qquad \mathrm{d}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\,\mathrm{d}u-u\,\mathrm{d}v}{v^2};$$

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int v\,\mathrm{d}u;\qquad \int_a^b f(kx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{k}\int_{ka}^{kb}f(z)\,\mathrm{d}z;$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=f(b);\qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=-f(a);$$

50a. Formeln, fortgesetzt.

Die Werte der unbestimmten Integrale sind zu ergänzen durch + Const.

$$\int (a+bx)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} \cdot \frac{(a+bx)^{n+1}}{b}; \qquad \int x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx} = \frac{1}{b} \lg(a+bx); \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg x;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a+bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \cdot \operatorname{arctg} x\sqrt{\frac{b}{a}}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a-bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \lg \frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{1-x^2} = \frac{1}{2} \lg \frac{1+x}{1-x};$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a+bx^2}} = \frac{\lg(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2})}{\sqrt{b}}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} = \lg(x+\sqrt{1+x^2});$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a \pm bx^2)^{3/2}} = \frac{1}{a} \frac{x}{\sqrt{a \pm bx^2}}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 \pm x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{1 \pm x^2}};$$

$$\int \sqrt{a+bx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{a+bx^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{b}} \lg(x\sqrt{b}+\sqrt{a+bx^2});$$

$$\int \sqrt{a-bx^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{a-bx^2} + \frac{1}{2} \frac{a}{\sqrt{b}} \arcsin x\sqrt{\frac{b}{a}};$$

$$\int a^x \mathrm{d}x = \frac{a^x}{\lg a}; \qquad \int e^x \mathrm{d}x = e^x; \qquad \int x a^x \mathrm{d}x = \frac{x a^x}{\lg a} - \frac{a^x}{\lg^2 a};$$

$$\int x^n \lg x \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\lg x - \frac{1}{n+1}\right); \qquad \int \lg x \,\mathrm{d}x = x \lg x - x;$$

$$\int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x; \qquad \int \cos x \,\mathrm{d}x = \sin x; \qquad \int \operatorname{tg} x \,\mathrm{d}x = -\lg \cos x;$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \lg \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \lg \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right); \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x;$$

$$\int \sin^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin x \cos x}{2}; \qquad \int x \sin x \,\mathrm{d}x = -x \cos x + \sin x;$$

$$\int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{\sin^2 x}{2}; \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \lg \operatorname{tg} x;$$

$$\int e^{ax} \sin bx \,\mathrm{d}x = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2+b^2}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{a};$$

$$\int \arcsin x \,\mathrm{d}x = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}.$$

51. 2te u. 3te Potenzen; Reziproke, Quadrat- u. Kubikwurzeln; natürliche Logarithmen. Es ist $\lg nat(n \cdot 10^p) = \lg nat\, n + \lg nat(10^p)$:

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n\frac{\pi}{180}$	$n^2\frac{\pi}{4}$	lg nat n
1	1	1	1,0000	1,000	1,000	0,0175	0,785	0.0000
2	4	8	,5000	1,414	1,260	0,0349	3,142	0.6931
3	9	27	,3333	1,732	1,442	0,0524	7,069	1.0986
4	[illegible]	64	,2500	2,000	1,587	0,0698	12,57	[illegible]
5	[illegible]	125	,2000	2,236	1,710	0,0873	19,64	1.6094
6	36	216	,1667	2,449	1,817	0,1047	28,27	1.7918
7	[illegible]	343	,1429	2,646	1,913	0,1222	38,48	1.9459
8	64	512	,1250	2,828	2,000	0,1396	50,27	2.0794
9	81	729	,1111	3,000	2,080	0,1571	63,62	2.1972
10	100	1000	,10000	3,162	2,154	0,1745	78,54	2.3026
11	121	1331	,09091	3,317	2,224	0,1920	95,03	[illegible]
12	144	1728	,08333	3,464	2,289	0,2094	113,1	2.4849
13	169	2197	,07692	3,606	2,351	0,2269	132,7	2.5649
14	196	2744	,07143	3,742	2,410	0,2443	153,9	[illegible]
15	225	3375	,06667	3,873	2,466	0,2618	176,7	[illegible]
16	256	[illegible]	,06250	4,000	2,520	0,2793	201,1	2.7726
17	[illegible]	4913	,05882	4,123	2,571	0,2967	227,0	2.8332
18	324	[illegible]	,05556	4,243	2,621	0,3142	254,5	2.8904
19	[illegible]	6859	,05263	4,359	2,668	0,3316	283,5	2.9444
20	400	8000	,05000	4,472	2,714	0,3491	314,2	2.9957
21	441	9261	[illegible]	4,583	2,759	0,3665	346,4	3.0445
22	484	10648	,04545	4,690	2,802	0,3840	380,1	3.0910
23	529	12167	,04348	4,796	2,844	0,4014	415,5	3.1355
24	576	13824	,04167	4,899	2,884	0,4189	452,4	3.1781
25	625	15625	,04000	5,000	2,924	0,4363	490,9	3.2189
26	676	17576	[illegible]	5,099	2,962	0,4538	530,9	3.2581
27	729	19683	[illegible]	5,196	3,000	0,4712	572,6	3.2958
28	784	21952	,03571	5,292	3,037	0,4887	615,8	3.3322
29	841	24389	[illegible]	5,385	3,072	0,5061	660,5	[illegible]
30	900	27000	,03333	5,477	3,107	0,5236	706,9	3.4012
31	961	[illegible]	[illegible]	5,568	3,141	0,5411	754,8	[illegible]
32	1024	32768	,03125	5,657	3,175	0,5585	804,2	3.4657
33	1089	35937	,03030	5,745	3,208	0,5760	855,3	[illegible]
34	1156	39304	,02941	5,831	3,240	0,5934	907,9	[illegible]
35	1225	42875	,02857	5,916	3,271	0,6109	962,1	3.5553
36	1296	46656	,02778	6,000	3,302	0,6283	1018	3.5835
37	1369	50653	,02703	6,083	3,332	0,6458	[illegible]	3.6109
38	1444	54872	,02632	6,164	3,362	0,6632	1134	3.6376
39	1521	59319	,02564	6,245	3,391	0,6807	1195	[illegible]
40	1600	64000	,02500	6,325	3,420	0,6981	1257	[illegible]
41	1681	68921	,02439	6,403	3,448	0,7156	[illegible]	3.7136
42	1764	74088	[illegible]	6,481	3,476	0,7330	1385	3.7377
43	1849	79507	,02326	6,557	3,503	0,7505	[illegible]	[illegible]
44	1936	85184	,02273	6,633	3,530	0,7679	1521	[illegible]
[illegible]	2025	[illegible]	,02222	6,708	3,557	0,7854	1590	[illegible]
46	2116	97336	,02174	6,782	3,583	0,8029	[illegible]	[illegible]
47	2209	103823	,02128	6,856	3,609	0,8203	1735	[illegible]
[illegible]	2304	110592	,02083	6,928	3,634	0,8378	1810	3.8712
49	2401	117649	,02041	7,000	3,659	0,8552	1886	3.8918
50	2500	125000	,02000	7,071	3,684	0,8727	1964	[illegible]

Kreisbogen aus Bogengraden; Kreisfläche aus Durchmesser;
lg nat 10 = 2.3026; lg nat 100 = 4.6052; lg nat 1000 = 6.9078; lg nat 10000 = 9.2103.

n	n^2	n^3	$\frac{1}{n}$	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	$n\frac{\pi}{180}$	$n^2\frac{\pi}{4}$	lg nat n
50	2500	125000	,02000	7,071	3,684	0,873	1964	3.9120
51	2601	132651	,01961	7,141	3,708	0,890	2043	3.9318
52	2704	140608	,01923	7,211	3,733	0,908	2124	3.9512
53	2809	148877	,01887	7,280	3,756	0,925	2206	3.9703
54	2916	157464	[illegible]	7,348	3,780	0,942	2290	[illegible]
55	3025	166375	,01818	7,416	3,803	0,960	2376	4.0073
56	3136	175616	[illegible]	7,483	3,826	0,977	2463	4.0254
57	3249	185193	,01754	7,550	3,849	0,995	2552	4.0431
58	[illegible]	195112	,01724	7,616	3,871	1,012	2642	4.0604
59	3481	205379	[illegible]	7,681	3,893	1,030	2734	4.0775
60	3600	216000	,01667	7,746	3,915	1,047	2827	4.0943
61	3721	[illegible]	,01639	7,810	3,936	1,065	2922	4.1109
62	3844	238328	[illegible]	7,874	3,958	1,082	3019	4.1271
63	3969	250047	,01587	7,937	3,979	1,100	3117	4.1431
64	4096	[illegible]	,01563	8,000	4,000	1,117	3217	4.1589
65	4225	274625	,01538	8,062	4,021	1,134	[illegible]	4.1744
66	4356	287496	,01515	8,124	4,041	1,152	3421	4.1897
67	4489	[illegible]	,01493	8,185	4,062	1,169	3526	4.2047
68	4624	314432	,01471	8,246	4,082	1,187	3632	4.2195
69	4761	328509	,01449	8,307	4,102	1,204	3739	4.2341
70	4900	343000	,01429	8,367	4,121	1,222	3848	4.2485
71	5041	357911	,01408	8,426	4,141	1,239	[illegible]	4.2627
72	5184	373248	[illegible]	8,485	4,160	1,257	4072	4.2767
73	5329	389017	,01370	8,544	4,179	1,274	[illegible]	4.2905
74	5476	405224	,01351	8,602	4,198	1,292	4301	4.3041
75	[illegible]	421875	,01333	8,660	4,217	1,309	4418	4.3175
76	5776	438976	,01316	8,718	4,236	1,326	[illegible]	4.3307
77	5929	456533	,01299	8,775	4,254	1,344	4657	[illegible]
78	6084	[illegible]	,01282	8,832	4,273	1,361	4778	4.3567
79	6241	493039	[illegible]	8,888	4,291	1,379	4902	4.3694
80	6400	512000	,01250	8,944	4,309	1,396	5027	4.3820
[illegible]	[illegible]	531441	,01235	9,000	4,327	1,414	5153	4.3944
82	6724	551368	,01220	9,055	4,344	1,431	5281	4.4067
83	6889	571787	,01205	9,110	4,362	1,449	5411	4.4188
84	[illegible]	592704	,01190	9,165	4,380	1,466	[illegible]	[illegible]
85	7225	614125	,01176	9,220	4,397	1,484	[illegible]	4.4427
86	7396	636056	,01163	9,274	4,414	1,501	5809	4.4543
87	[illegible]	658503	,01149	9,327	4,431	1,518	5945	4.4659
88	7744	681472	,01136	9,381	4,448	1,536	6082	4.4773
89	7921	704969	,01124	9,434	4,465	1,553	6221	4.4886
[illegible]	8100	729000	,01111	9,487	4,481	1,571	6362	4.4998
91	8281	753571	,01099	9,539	4,498	1,588	6504	4.5109
92	8464	778688	[illegible]	9,592	4,514	1,606	[illegible]	4.5218
93	8649	804357	,01075	9,644	4,531	1,623	[illegible]	4.5326
94	8836	830584	[illegible]	9,695	4,547	1,641	6940	4.5433
95	9025	857375	,01053	9,747	4,563	1,658	[illegible]	4.5539
[illegible]	[illegible]	884736	,01042	9,798	4,579	1,676	7238	[illegible]
97	9409	[illegible]	,01031	9,849	4,595	1,693	7390	4.5747
[illegible]	9604	941192	,01020	9,899	4,610	1,710	7543	[illegible]
99	9801	970299	,01010	9,950	4,626	1,728	7698	4.5951
100	10000	1000000	,01000	10,000	4,642	1,745	7854	4.6052

52. Zur Wheatstone-Kirchhoff'schen

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
0	0,0000	0,1111	0,2500	0,4286	0,6667	1,0000	1,500	2,333	4,000	9,00
1	,0010	,1123	,2516	,4306	,6694	1,0040	1,506	2,344	4,025	9,10
2	,0020	,1136	,2531	,4327	,6722	1,0080	1,513	2,356	4,051	9,20
3	,0030	,1148	,2547	,4347	,6750	1,0121	1,519	2,367	4,076	9,31
4	,0040	,1161	,2563	,4368	,6779	1,0161	1,525	2,378	4,102	9,42
5	,0050	,1173	,2579	,4388	,6807	1,0202	1,532	2,390	4,128	9,53
6	,0060	,1186	,2594	,4409	,6835	1,0243	1,538	2,401	4,155	9,64
7	,0070	,1198	,2610	,4430	,6863	1,0284	1,545	2,413	4,181	9,75
8	,0081	,1211	,2626	,4451	,6892	1,0325	1,551	2,425	4,208	9,87
9	,0091	,1223	,2642	,4472	,6921	1,0367	1,558	2,436	4,236	9,99
10	,0101	,1236	,2658	,4493	,6949	1,0408	1,564	2,448	4,263	10,11
11	,0111	,1249	,2674	,4514	,6978	1,0450	1,571	2,460	4,291	10,24
12	,0121	,1261	,2690	,4535	,7007	1,0492	1,577	2,472	4,319	10,36
13	,0132	,1274	,2706	,4556	,7036	1,0534	1,584	2,484	4,348	10,49
14	,0142	,1287	,2723	,4577	,7065	1,0576	1,591	2,497	4,376	10,63
15	,0152	,1299	,2739	,4599	,7094	1,0619	1,597	2,509	4,405	10,76
16	,0163	,1312	,2755	,4620	,7123	1,0661	1,604	2,521	4,435	10,90
17	,0173	,1325	,2771	,4641	,7153	1,0704	1,611	2,534	4,464	11,05
18	,0183	,1338	,2788	,4663	,7182	1,0747	1,618	2,546	4,495	11,20
19	,0194	,1351	,2804	,4684	,7212	1,0790	1,625	2,559	4,525	11,35
20	,0204	,1364	,2820	,4706	,7241	1,0833	1,632	2,571	4,556	11,50
21	,0215	,1377	,2837	,4728	,7271	1,0877	1,639	2,584	4,587	11,66
22	,0225	,1390	,2853	,4749	,7301	1,0921	1,646	2,597	4,618	11,82
23	,0235	,1403	,2870	,4771	,7331	1,0964	1,653	2,610	4,650	11,99
24	,0246	,1416	,2887	,4793	,7361	1,1008	1,660	2,623	4,682	12,16
25	,0256	,1429	,2903	,4815	,7391	1,1053	1,667	2,636	4,714	12,33
26	,0267	,1442	,2920	,4837	,7422	1,1097	1,674	2,650	4,747	12,51
27	,0277	,1455	,2937	,4859	,7452	1,1142	1,681	2,663	4,780	12,70
28	,0288	,1468	,2953	,4881	,7483	1,1186	1,688	2,676	4 814	12,89
29	,0299	,1481	,2970	,4903	,7513	1,1231	1,695	2,690	4,848	13,08
30	,0309	,1494	,2987	,4925	,7544	1,1277	1,703	2,704	4,882	13,29
31	,0320	,1507	,3004	,4948	,7575	1,1322	1,710	2 717	4,917	13,49
32	,0331	,1521	,3021	,4970	,7606	1,1368	1,717	2,731	4,952	13,71
33	,0341	,1534	,3038	,4993	,7637	1,1413	1,725	2,745	4,988	13,93
34	,0352	,1547	,3055	,5015	,7668	1,1459	1,732	2,759	5,024	14,15
35	,0363	,1561	,3072	,5038	,7699	1,1505	1,740	2,774	5,061	14,38
36	,0373	,1574	,3089	,5060	,7731	1,1552	1,747	2,788	5,098	14,63
37	,0384	,1587	,3106	,5083	,7762	1,1598	1,755	2,802	5,135	14,87
38	,0395	,1601	,3123	,5106	,7794	1,1645	1,762	2,817	5,173	15,13
39	,0406	,1614	,3141	,5129	,7825	1,1692	1,770	2,831	5,211	15,39
40	,0417	,1628	,3158	,5152	,7857	1,1739	1,778	2,846	5,250	15,67
41	,0428	,1641	,3175	,5175	,7889	1,1786	1,786	2,861	5,289	15,95
42	,0438	,1655	,3193	,5198	,7921	1,1834	1,793	2,876	5,329	16,24
43	,0449	,1669	,3210	,5221	,7953	1,1882	1,801	2,891	5,369	16,54
44	,0460	,1682	,3228	,5244	,7986	1,1930	1,809	2,906	5,410	16,86
45	,0471	,1696	,3245	,5267	,8018	1,1978	1,817	2,922	5,452	17,18
46	,0482	,1710	,3263	,5291	,8051	1,2026	1,825	2,937	5,494	17,52
47	,0493	,1723	,3280	,5314	,8083	1,2075	1,833	2,953	5,536	17,87
48	,0504	,1737	,3298	,5337	,8116	1,2124	1,841	2,968	5,579	18,23
49	,0515	,1751	,3316	,5361	,8149	1,2173	1,849	2,984	5,623	18,61
50	0,0526	0,1765	0,3333	0,5385	0,8182	1,2222	1,857	3,000	5,667	19,00

Drahtbrücke. Zahlenwerte für a/b, wenn $a+b=1000$.

a	0	100	200	300	400	500	600	700	800	900
50	0,0526	0,1765	0,3333	0,5385	0,8182	1,2222	1,857	3,000	5,667	19,00
51	,0537	,1779	,3351	,5408	,8215	1,2272	1,865	3,016	5,711	19,41
52	,0549	,1792	,3369	,5432	,8248	1,2321	1,874	3,032	5,757	19,83
53	,0560	,1806	,3387	,5456	,8282	1,2371	1,882	3,049	5,803	20,28
54	,0571	,1820	,3405	,5480	,8315	1,2422	1,890	3,065	5,849	20,74
55	,0582	,1834	,3423	,5504	,8349	1,2472	1,899	3,082	5,897	21,22
56	,0593	,1848	,3441	,5528	,8382	1,2523	1,907	3,098	5,944	21,73
57	,0604	,1862	,3459	,5552	,8416	1,2573	1,915	3,115	5,993	22,26
58	,0616	,1876	,3477	,5576	,8450	1,2624	1,924	3,132	6,042	22,81
59	,0627	,1891	,3495	,5601	,8484	1,2676	1,933	3,149	6,092	23,39
60	,0638	,1905	,3514	,5625	,8519	1,2727	1,941	3,167	6,143	24,00
61	,0650	,1919	,3532	,5649	,8553	1,2779	1,950	3,184	6,194	24,64
62	,0661	,1933	,3550	,5674	,8587	1,2831	1,959	3,202	6,246	25,32
63	,0672	,1947	,3569	,5699	,8622	1,2883	1,967	3,219	6,299	26,03
64	,0684	,1962	,3587	,5723	,8657	1,2936	1,976	3,237	6,353	26,78
65	,0695	,1976	,3606	,5748	,8692	1,2989	1,985	3,255	6,407	27,57
66	,0707	,1990	,3624	,5773	,8727	1,3041	1,994	3,274	6,463	28,41
67	,0718	,2005	,3643	,5798	,8762	1,3095	2,003	3,292	6,519	29,30
68	,0730	,2019	,3661	,5823	,8797	1,3148	2,012	3,310	6,576	30,25
69	,0741	,2034	,3680	,5848	,8832	1,3202	2,021	3,329	6,634	31,26
70	,0753	,2048	,3699	,5873	,8868	1,3256	2,030	3,348	6,692	32,33
71	,0764	,2063	,3717	,5898	,8904	1,3310	2,040	3,367	6,752	33,48
72	,0776	,2077	,3736	,5924	,8939	1,3364	2,049	3,386	6,813	34,71
73	,0787	,2092	,3755	,5949	,8975	1,3419	2,058	3,405	6,874	36,04
74	,0799	,2107	,3774	,5974	,9011	1,3474	2,067	3,425	6,937	37,46
75	,0811	,2121	,3793	,6000	,9048	1,3529	2,077	3,444	7,000	39,00
76	,0823	,2136	,3812	,6026	,9084	1,3585	2,086	3,464	7,065	40,67
77	,0834	,2151	,3831	,6051	,9120	1,3641	2,096	3,484	7,130	42,48
78	,0846	,2165	,3850	,6077	,9157	1,3697	2,106	3,505	7,197	44,45
79	,0858	,2180	,3870	,6103	,9194	1,3753	2,115	3,525	7,264	46,62
80	,0870	,2195	,3889	,6129	,9231	1,3810	2,125	3,545	7,333	49,00
81	,0881	,2210	,3908	,6155	,9268	1,3866	2,135	3,566	7,403	51,63
82	,0893	,2225	,3928	,6181	,9305	1,3923	2,145	3,587	7,475	54,56
83	,0905	,2240	,3947	,6207	,9342	1,3981	2,155	3,608	7,547	57,82
84	,0917	,2255	,3966	,6234	,9380	1,4038	2,165	3,630	7,621	61,50
85	,0929	,2270	,3986	,6260	,9417	1,4096	2,175	3,651	7,696	65,67
86	,0941	,2285	,4006	,6287	,9455	1,4155	2,185	3,673	7,772	70,43
87	,0953	,2300	,4025	,6313	,9493	1,4213	2,195	3,695	7,850	75,92
88	,0965	,2315	,4045	,6340	,9531	1,4272	2,205	3,717	7,929	82,33
89	,0977	,2330	,4065	,6367	,9569	1,4331	2,215	3,739	8,009	89,91
90	,0989	,2346	,4085	,6393	,9608	1,4390	2,226	3,762	8,091	99,00
91	,1001	,2361	,4104	,6420	,9646	1,4450	2,236	3,785	8,174	110,1
92	,1013	,2376	,4124	,6447	,9685	1,4510	2,247	3,808	8,259	124,0
93	,1025	,2392	,4144	,6474	,9724	1,4570	2,257	3,831	8,346	141,9
94	,1038	,2407	,4164	,6502	,9763	1,4631	2,268	3,854	8,434	165,7
95	,1050	,2422	,4184	,6529	,9802	1,4691	2,279	3,878	8,524	199,0
96	,1062	,2438	,4205	,6556	,9841	1,4752	2,289	3,902	8,615	249,0
97	,1074	,2453	,4225	,6584	,9881	1,4814	2,300	3,926	8,709	332,3
98	,1086	,2469	,4245	,6611	,9920	1,4876	2,311	3,950	8,804	499,0
99	,1099	,2484	,4265	,6639	,9960	1,4938	2,322	3,975	8,901	999,0
100	0,1111	0,2500	0,4286	0,6667	1,0000	1,5000	2,333	4,000	9,000	∞

53. Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	42
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	38
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	35
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	32
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	30
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	28
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	26
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	25
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	24
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	22
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	21
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	20
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	19
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	19
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	18
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	17
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	16
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	16
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	15
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	15
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	14
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	14
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	13
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	13
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	13
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	12
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	12
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	12
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	11
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	11
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	11
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	10
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	10
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	10
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	10
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	10
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	9
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	9
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	9
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	9
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	9
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	8
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	8
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	8
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	8
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	8
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	8
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.

Logarithmen.

N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	7
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	7
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	7
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	7
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	7
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	7
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	7
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	6
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	6
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	6
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	6
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	6
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	6
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	6
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	6
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	5
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	5
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	5
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	5
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	5
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	5
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	5
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	5
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	5
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	5
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	4
100	0 0000	0043	0087	0130	0173	0217	0260	0303	0346	0389	43
101	0 0432	0475	0518	0561	0604	0647	0689	0732	0775	0817	43
102	0 0860	0903	0945	0988	1030	1072	1115	1157	1199	1242	42
103	0 1284	1326	1368	1410	1452	1494	1536	1578	1620	1662	42
104	0 1703	1745	1787	1828	1870	1912	1953	1995	2036	2078	42
105	0 2119	2160	2202	2243	2284	2325	2366	2407	2449	2490	41
106	0 2531	2572	2612	2653	2694	2735	2776	2816	2857	2898	41
107	0 2938	2979	3019	3060	3100	3141	3181	3222	3262	3302	40
108	0 3342	3383	3423	3463	3503	3543	3583	3623	3663	3703	40
109	0 3743	3782	3822	3862	3902	3941	3981	4021	4060	4100	40
110	0 4139	4179	4218	4258	4297	4336	4376	4415	4454	4493	39
N.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff.